Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 4, 588 – 603

Використання континуанти для оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле

Михайло М. Пагіря

(Представлена О. А. Довгошиєм)

Анотація. Доведені нові властивості континуанти. Використовуючи взаємозв'язок між континуантою та ланцюговим дробом, отримано оцінку залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле.

2010 MSC. 30B70, 41A05, 65D05.

Ключові слова та фрази. Ланцюговий дріб, континуанта, інтерполяція функцій, залишковий член.

1. Вступ

Функцію, яка визначена на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ і задана значеннями у точках множини $X \subset \mathcal{R}$, можна наближати інтерполяційним многочленом [1,2], сплайном [3], апроксимантою Паде [4], інтерполяційним ланцюговим дробом [5–8].

У роботі [9] формулу залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле [10] було узагальнено на ланцюгові дроби, елементи яких є многочлени. У статті [11] отримано оцінку залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле, коли функція $f \in \mathrm{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$.

У даній роботі при дослідженні задачі інтерполяції функцій дійсної змінної інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле використано континуанту. Доведено властивості континуанти. Отримано вигляд залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле та обґрунтовано його оцінку. На числових прикладах проілюстровано переваги нової оцінки залишкового члена над оцінкою, яку отримано у роботі [11].

Стаття надійшла в редакцію 25.07.2019

2. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами

Нехай $b_0, a_k \neq 0, b_k, k \in \mathbb{N}$, є дійсні числа, або функції змінної x. Нескінченний ланцюговий дріб вигляду

$$D = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_k}{b_k + \ddots}}}$$

будемо коротко записують наступним чином

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \cdots + \frac{a_k}{b_k+} \cdots. \tag{2.1}$$

Аналогічно, n–й підхідний дріб, n–е наближення ланцюгового дробу (2.1) коротко записують так

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \cdots + \frac{a_n}{b_n}. \tag{2.2}$$

Значення канонічних чисельника P_n і знаменника Q_n ланцюгового дробу (2.2) визначають через елементи ланцюгового дробу b_0, a_k, $b_k, k \in \mathbb{N}$, за допомогою формул Валліса [12].

Нехай на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ вибрана множина вузлів

$$X = \{x_i : x_i \in \mathcal{R}, x_i \neq x_j, i \neq j, i, j = \overline{0, n}\}. \tag{2.3}$$

Функція f інтерполюється за значеннями у вузлах X ланцюговим дробом Тіле (Т–ІЛД) [5, 13] вигляду

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{x - x_{i-1}}{b_i}, \qquad b_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, n}. \tag{2.4}$$

Т–ІЛД має задовольняти інтерполяційні умови

$$D_n(x_i) = y_i,\ x_i \in X,\ y_i = f(x_i),\ i = \overline{0, n}. \tag{2.5}$$

Коефіцієнти Т–ІЛД (2.4) $b_i, i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, визначаються із інтерполяційної умови (2.5) або через обернені поділені різниці, або через обернені різниці [5, 10, 13], або за рекурентним співвідношенням у вигляді ланцюгового дробу [8]

$$b_0 = y_0, \quad b_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - b_0}, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} + \frac{x_k - x_{k-2}}{-b_{k-2}} + \\ + \cdots + \frac{x_k - x_1}{-b_1} + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}, \qquad k \in \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Відомо [10], що якщо функція $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, то залишковий член Т–ІЛД $R_n(x) = f(x) - D_n(x)$ задається формулою

$$R_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!\,Q_n(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(f(x) \cdot Q_n(x)\Big)\Big|_{x=\xi}, \quad \xi \in \mathcal{R}. \qquad (2.6)$$

Теорема 2.1 ([8, 11])**.** *Нехай* $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$*. За значеннями функції у точках множини* (2.3) *побудований Т–ІЛД* (2.4)*. Тоді*

$$\big|R_n(x)\big| \le E_1 = \frac{f_{max}(b_{max})^n \prod_{k=0}^{n}|x - x_k|}{(n+1)!|Q_n(x)|}\Big(\kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{m=1}^{r}\tbinom{n+1}{m}\frac{m!}{b_{min}^{2m}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{r-m}\tbinom{n+k}{m}\tbinom{n-m-k}{m+k}\rho^k\Big),$$

де $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, $\alpha = \mathbf{diam}\,\mathcal{R}$, $b_{min} = \min_{1\le i\le n}|b_i|$, $b_{max} = \max_{1\le i\le n}|b_i|$, $\rho = \dfrac{\alpha}{b_{min}^2}$,

$$f_{max} = \max_{0\le m\le r}\max_{x\in\mathcal{R}}|f^{(n+1-m)}(x)|, \kappa_n(\rho) = \frac{(1+\sqrt{1+4\rho})^n - (1-\sqrt{1+4\rho})^n}{2^n\sqrt{1+4\rho}}.$$

Основний результат даної роботи складає теорема.

Теорема 2.2. *Нехай* $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$*. За значеннями функції* f *у точках множини* (2.3) *побудований Т–ІЛД* (2.4)*. Тоді*

$$\big|R_n(x)\big| \le E_2 = \frac{f_{max}\prod_{k=0}^{n}|x - x_k|}{(n+1)!\,|\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)|}\Bigg(b_{max}^n\,\kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{k=1}^{r}\tbinom{n+1}{k}b_{max}^{n-2k} \times \\ \times \sum_{i_1=1}^{n+1-2k}\kappa_{i_1}(\rho)\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k}\kappa_{i_2-i_1-1}(\rho)\cdots\sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+2}^{n-3}\kappa_{i_{k-1}-i_{k-2}-1}(\rho) \times \\ \times \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1}\kappa_{i_k-i_{k-1}-1}(\rho)\kappa_{n-i_k}(\rho)\Bigg), \qquad (2.7)$$

де $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ *– континуанта, яка визначається у* (4.2)*.*

3. Континуанта та її властивості

Нехай $b_0, a_i, b_i, i \in \mathbb{N}$, дійсні числа або функції. Розглянемо визначник вигляду

$$\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & a_{i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{i+2} & a_{i+3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{i+3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}, \ i = \overline{0, n}, \ n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

який називається континуантою [14] і скорочено записується так

$$\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} = \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-1}, a_n \\ b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_{n-1}, b_n \end{pmatrix}.$$

Континуанта (3.1), як частинний випадок визначника Гессенберґа, задовольняє тричленне рекурентне співвідношення [15]

$$\mathcal{H}_m^{\langle i\rangle} = b_m \mathcal{H}_{m-1}^{\langle i\rangle} + a_m \mathcal{H}_{m-2}^{\langle i\rangle}, \ m = \overline{i+1, n}, \ H_i^{\langle i\rangle} = b_i, \ H_{i-1}^{\langle i\rangle} = 1. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Якщо елемент $a_k, i < k \le n$, континуанти $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle}$ рівний нулю, а всі решта елементів відмінні від нуля, то*

$$\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} = \mathcal{H}_n^{\langle k\rangle} \cdot \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle}. \quad (3.3)$$

Доведення. Оскільки $a_k = 0$, то з рекурентного співвідношення (3.2) маємо, що

$$\mathcal{H}_k^{\langle i\rangle} = b_k \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle} = \mathcal{H}_k^{\langle k\rangle} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle},$$

$$\mathcal{H}_{k+1}^{\langle i\rangle} = b_{k+1} \mathcal{H}_k^{\langle i\rangle} + a_{k+1} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle} = (b_k b_{k+1} + a_{k+1}) \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle} = \mathcal{H}_{k+1}^{\langle k\rangle} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle}.$$

Отже, для $n = k$ та $n = k+1$ формула (3.3) має місце. Зробимо припущення, що (3.3) виконуються для $n = m$. Тоді з (3.2) отримуємо:

$$\mathcal{H}_{m+1}^{\langle i\rangle} = b_{m+1} \mathcal{H}_m^{\langle i\rangle} + a_{m+1} \mathcal{H}_{m-1}^{\langle i\rangle} =$$

$$= b_{m+1} \mathcal{H}_m^{\langle k\rangle} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle} + a_{m+1} \mathcal{H}_{m-1}^{\langle k\rangle} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle} = \mathcal{H}_{m+1}^{\langle k\rangle} \mathcal{H}_{k-1}^{\langle i\rangle}.$$

Отже, формула (3.3) виконується для довільного n. □

Доведемо наступне співвідношення для континуанти.

Теорема 3.2. *Якщо елементи континуанти* $a_s \neq 0, s = \overline{i, n}$, $b_s \neq 0$, $s = \overline{i, k+i-2}$, $b_t \neq 0, t = \overline{k+i, n}$, *і* $b_{k+i-1} = 0, i \leq n, k = \overline{1, n-i}$, *то континуанта*

$$\mathcal{A}_n^{\langle i,k \rangle} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k+i-2} & a_{k+i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+i} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_{k+i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+i}\mathcal{H}_{k+i-2}^{\langle i \rangle}\mathcal{H}_n^{\langle k+i+1 \rangle}, \quad \text{де } \mathcal{H}_n^{\langle n+1 \rangle} = \mathcal{H}_0^{\langle i \rangle} = 1,\ k = \overline{1, n-i}. \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай $k = 1$, тоді

$$\mathcal{A}_n^{\langle i,1 \rangle} = \begin{vmatrix} 0 & a_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & a_{i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_{i+2} & a_{i+3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{i+3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник розвинути послідовно за 1–м рядком та 1–м стовпцем, то отримаємо $\mathcal{A}_n^{\langle i,1 \rangle} = a_{i+1}\mathcal{H}_{i-1}^{\langle i \rangle}\mathcal{H}_n^{\langle i+2 \rangle}$. Для $k = 2$ розвинемо визначник послідовно за 2–м рядом та 2–м стовпцем. Будемо мати $\mathcal{A}_n^{(i,2)} = a_{i+2}\mathcal{H}_i^{\langle i \rangle}\mathcal{H}_n^{\langle i+3 \rangle}$. У загальному випадку для $k = m$ розвинемо визначник послідовно за m–м рядком і m–м стовпцем, маємо

$$\mathcal{A}_n^{\langle i,m \rangle} = \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{m+i-2} & a_{m+i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m+i} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & b_{m+i} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{m+i} \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{m+i-2} & a_{m+i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{m+i+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{m+i+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{m+i}a_{m+i-1} \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & b_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{m+i-3} & a_{m+i-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m+i+1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{m+i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{m+i} \begin{vmatrix} b_i & a_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & b_{i+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{m+i-3} & a_{m+i-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{m+i-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{m+i+1} & a_{m+i+2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & b_{m+i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Вибравши перші $(m-2)$ стовпці у визначниках та скориставшись теоремою Лапласа [16], отримаємо $\mathcal{A}_n^{\langle i,m\rangle} = a_{m+i}\mathcal{H}_{m+i-2}^{\langle i\rangle}\mathcal{H}_n^{\langle m+i+1\rangle}$. Формула (3.4) доведена. $\square$

Континуанта володіє властивістю інваріантності відносно оберненого порядку елементів [14], тобто

$$\mathcal{K}\left(\begin{matrix} & a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n-1}, a_n \\ b_i, & b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_{n-1}, b_n \end{matrix}\right) = \mathcal{K}\left(\begin{matrix} & a_n, \ a_{n-1}, \dots, \ a_{i+2}, a_{i+1} \\ b_n, & b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, \ b_{i+1}, \ b_i \end{matrix}\right).$$

Теорема 3.3. *Якщо* $\mathcal{H}_n^{\langle i\rangle} \neq 0$, *де* $i = 0, 1$, *крім того* $w = \mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}/\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}$, *то*

$$b_n = \frac{a_n \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-2}, & a_{n-3}, & \ldots, & a_3, & a_2, & a_1 \\ -b_{n-2}, -b_{n-3}, & -b_{n-4}, \ldots, & -b_2, & -b_1, & w - b_0 \end{pmatrix}}{\mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-1}, & a_{n-2}, & \ldots, & a_3, & a_2, & a_1 \\ -b_{n-1}, -b_{n-2}, & -b_{n-3}, \ldots, & -b_2, & -b_1, & w - b_0 \end{pmatrix}}. \tag{3.5}$$

Доведення. Оскільки за припущенням теореми $w = \mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}/\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}$, то

$$w\,\mathcal{K}\begin{pmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_3, a_2 \\ b_n, b_{n-1}, & b_{n-2}, & \ldots, & b_2, b_1 \end{pmatrix} = \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_2, a_1 \\ b_n, b_{n-1}, & b_{n-2}, & \ldots, & b_1, b_0 \end{pmatrix}.$$

Розвинемо визначники за 1–м стовпцем. Маємо

$$w\, b_n\, \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-1}, & \ldots, & a_3, a_2 \\ b_{n-1}, b_{n-2}, & \ldots, & b_2, b_1 \end{pmatrix} + w\, a_n\, \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-2}, & \ldots, & a_3, a_2 \\ b_{n-2}, b_{n-3}, & \ldots, & b_2, b_1 \end{pmatrix} =$$

$$= b_n\, \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-1}, & \ldots, & a_2, a_1 \\ b_{n-1}, b_{n-2}, & \ldots, & b_1, b_0 \end{pmatrix} + a_n\, \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-2}, & \ldots, & a_2, a_1 \\ b_{n-2}, b_{n-3}, & \ldots, & b_1, b_0 \end{pmatrix}.$$

Звідки отримуємо

$$b_n = \frac{-\,a_n\, \mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-2}, & \ldots, & a_2, & a_1 \\ b_{n-2}, b_{n-3}, & \ldots, & b_1, & b_0 - w \end{pmatrix}}{\mathcal{K}\begin{pmatrix} a_{n-1}, & \ldots, & a_2, & a_1 \\ b_{n-1}, b_{n-2}, & \ldots, & b_1, & b_0 - w \end{pmatrix}}.$$

Якщо у визначниках чисельника та знаменника винести множник (-1) з непарних рядків та парних стовпчиків, то отримаємо (3.5) $\square$

4. Взаємозв'язок континуанти та інтерполяційного ланцюгового дробу

Відомо [15], що n–й підхідний дріб D_n ланцюгового дробу (2.1) можна подати у вигляді відношення континуант, тобто

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\mathcal{H}_n^{\langle 0\rangle}}{\mathcal{H}_n^{\langle 1\rangle}}. \tag{4.1}$$

Введемо до розгляду континуанти вигляду

$$\mathbf{T}_m^{\langle i\rangle}(x) = \mathcal{K}\begin{pmatrix} x - x_i, & x - x_{i+1}, & \ldots, & x - x_{m-1} \\ b_i, \quad b_{i+1}, & b_{i+2}, & \ldots, & b_m \end{pmatrix}, \quad i < m. \tag{4.2}$$

Із (4.1) маємо, що Т–ІЛД (2.4) можна записати як відношення континуант вигляду (4.2) наступним чином $D_n(x) = \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x)/\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$. Крім того, для довільного значення $k = \overline{1, n}$ виконується співвідношення

$$D_n(x_k) = \frac{\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(x_k)}{\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(x_k)}. \tag{4.3}$$

Співвідношення (4.3) безпосередньо випливає із теореми 3.1. Оскільки елемент a_{k+i} континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle i\rangle}(x_k), i = 0, 1$, рівний нулю, то з (3.3) маємо, що

$$D_n(x_k) = \frac{\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(x_k)\,\mathbf{T}_n^{\langle k+1\rangle}(x_k)}{\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(x_k)\,\mathbf{T}_n^{\langle k+1\rangle}(x_k)} = \frac{\mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(x_k)}{\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(x_k)}.$$

Теорема 4.1. *Коефіцієнти Т–ІЛД* (2.4) *визначаються за формулами*

$$b_0 = y_0, \quad b_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - b_0}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ -1 & y_2 - b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -b_1 & x_2 - x_0 \\ -1 & y_2 - b_0 \end{vmatrix}}, \tag{4.4}$$

$$b_k = \frac{(x_k - x_{k-1})\,\mathcal{K}\begin{pmatrix} & x_k - x_{k-3}, \ldots, x_k - x_1, x_k - x_0 \\ -b_{k-2}, & -b_{k-3}, \quad \ldots, \quad -b_1, \quad y_k - b_0 \end{pmatrix}}{\mathcal{K}\begin{pmatrix} & x_k - x_{k-2}, \ldots, x_k - x_1, x_k - x_0 \\ -b_{k-1}, & -b_{k-2}, \quad \ldots, \quad -b_1, \quad y_k - b_0 \end{pmatrix}}, \tag{4.5}$$

коли $k = \overline{3, n}$.

Доведення. З інтерполяційної умови маємо, що $y_k = D_n(x_k)$, $k = \overline{0, n}$. Із (4.3) випливає, що $y_k = \mathbf{T}_k^{\langle 0\rangle}(x_k)/\mathbf{T}_k^{\langle 1\rangle}(x_k), k = \overline{0, n}$. Згідно із теоремою 3.3 коефіцієнт b_k визначається за формулою (3.5), де $a_i = x_k - x_{i-1}, i = \overline{1, k}$. Звідки отримуємо (4.4)–(4.5). □

5. Формула залишкового члена Т–ІЛД

Визначимо залишковий член Т–ІЛД через континуанти. Розглянемо визначники $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_i$, де $i = \overline{1, n}$, які утворені із континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ заміною елементів i–го рядка їх похідними. Очевидно, що i–й рядок $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_i$ містить єдиний ненульовий елемент рівний 1 на перетині з $(i+1)$–м стовпцем, $i = \overline{0, n-1}$. Очевидно, що $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_n \equiv 0$, оскільки останній рядок визначника містять лише нулі. Нехай $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, визначники, які утворені з континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ заміною елементів i–го та j–го рядків їх похідними. Мають місце тотожності

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{ii} \equiv \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i,n} \equiv 0, \quad & i = \overline{1, n-2}, \\ \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i,i+1} \equiv 0, \qquad & i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Перша тотожність (5.1) очевидна, оскільки визначники містять по одному рядку з нульовими елементами. Другу тотожність отримуємо, якщо розвинемо визначники за правилом Лапласа у суму добутків мінорів 2–го порядку, що містяться у i–му та $(i+1)$–му рядках на їх алгебричні доповнення.

Нехай $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — визначник, який утворений із континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ заміною елементів рядків $i_1, i_2, \ldots, i_k$ їх похідними.

Теорема 5.1. (A) *Похідна k–го порядку, $k = \overline{1,[n/2]}$, континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ рівна:*

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(k)} = k! \sum_{i_1=1}^{n+1-2k} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \qquad (5.2)$$

(B) *Якщо $k > [n/2]$, то $\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(k)} \equiv 0$.*

Доведення. **(A)** Формулу (5.2) доведемо за індукцією. Оскільки має місце тотожність $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_n \equiv 0$, то згідно із правилом диференціювання визначників для $k=1$ маємо:

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_i, \quad \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_n \equiv 0.$$

Друга похідна континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ буде рівна

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(2)} = \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2}.$$

Враховуючи симетричність визначників $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{ij} = \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{ji}$ та спираючись на (5.1), маємо

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(2)} = 2 \cdot \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2}.$$

Припустимо, що (5.2) виконується для $k = m-1$, де $m-1 < [n/2]$.

Знаходимо похідну m–го порядку континуанти $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$. Маємо:

$$\left(\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(m-1)}\right)' = (m-1)! \sum_{i_m=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n+3-2m} \cdots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 \ldots i_m}.$$

Враховуючи (5.1) та співвідношення

$$\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} = \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_2 i_1 \ldots i_{m-1} i_m} = \ldots = \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_m i_{m-1} \ldots i_2 i_1}$$

отримуємо

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(m)} = m! \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Отже, формула (5.2) виконується для довільного $1 \leq m \leq [n/2]$.

(B) Згідно із пунктом **(A)** похідна порядку $l = [n/2]$ континуанта $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ визначається за формулою (5.2).

Знайдемо похідну $(l+1)$–го порядку:

$$\left(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right)^{(l+1)} = l! \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n+1-2l} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l} \cdots \sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_m k}.$$

Згідно із (5.1) всі визначники у правій частині будуть рівні нулю. $\square$

Теорема 5.2. *Нехай функція $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$ і інтерполюється за значеннями у точках множини* (2.3) *Т–ІЛД* (2.4)*. Тоді знайдеться таке $\xi \in \mathbf{Int}\,\mathcal{R}$, що залишковий член $R_n(x) = f(x) - D_n(x)$ буде визначатися за формулою*

$$R_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!\,\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)} \Bigg(f^{(n+1)}(x)\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x) + \sum_{k=1}^{r} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{n+1-2k} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} \left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2 \ldots i_k} \Bigg)\Bigg|_{x=\xi}, \qquad r = [n/2]. \quad (5.3)$$

Доведення. Маємо, що $R_n(x) = f(x) - \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x)/\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x)\,\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x) - \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x) - \lambda(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \quad (5.4)$$

Згідно із інтерполяційними умовами (2.5) функція F рівна нулю у $(n+1)$–й точці $x_i \in \mathcal{R}$, $i = \overline{0,n}$. Якщо параметр λ вибрано наступним чином

$$\lambda = \frac{f(x_*)\,\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x_*) - \mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x_*)}{(x_*-x_0)(x_*-x_1)\ldots(x_*-x_n)}, \qquad \text{де} \quad x_* \in \mathcal{R}\backslash X,$$

то функція F буде рівна нулю у $(n+2)$–х точках розширеної множини $\tilde{X} = X \cup \{x_*\} \subset \mathcal{R}$. Згідно із узагальненою теоремою Ролля [1] знайдеться така точка $\xi \in \mathbf{Int}\,\mathcal{R}$, що $F^{(n+1)}(\xi) = 0$, або

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(f(x)\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\Big)\Big|_{x=\xi} - \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(\mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x)\Big)\Big|_{x=\xi} - (n+1)!\lambda = 0.$$

Із теореми 5.1 випливає, що $\left(\mathbf{T}_n^{\langle 0\rangle}(x)\right)^{(n+1)} \equiv 0$. Скориставшись формулою похідної $(n+1)$–го порядку добутку двох функцій отримуємо, що

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(f(x)\cdot\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\Big) = \sum_{k=0}^{r}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)\big(\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\big)^{(k)}.$$

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{r}\Big(\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)\times$$

$$\times\sum_{i_1=1}^{n+1-2k}\;\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k}\cdots\sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1}\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2\dots i_k}\Big)\Big|_{x=\xi}.$$

Оскільки x_* є довільна точка з $\mathcal{R}$, то поділивши (5.4) на $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ маємо (5.3). □

Зауваження 5.1. Формула залишкового члену (5.3) визначається через континуанту $\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)$ та її похідні і відрізняється від формули залишкового члену (2.6). Це надає можливості обґрунтувати більш точні оцінки залишкового члену Т–ІЛД.

6. Доведення теореми 2.2

У цьому розділі доведено основний результат роботи теорему 2.2.

Доведення. Формулу (5.3) із теореми 5.2 подамо у іншому вигляді. Для цього визначники $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2\dots i_k}$ запишемо через континуанти $\mathbf{T}_s^{\langle l\rangle}(x)$ для деяких значень l та s. Так як i–й рядок визначника $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_i$, для $i=\overline{1,n-1}$, містить всі нулі крім елемента, який розташований на перетині з $(i+1)$–м стовпцем і рівний 1, то згідно із теоремою 3.2 $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_i = \mathbf{T}_{i-1}^{\langle 1\rangle}(x)\mathbf{T}_n^{\langle i+2\rangle}(x)$. У визначнику $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2}$ єдиний відмінний від нуля елемент i_1–го рядка рівний 1 розташований у (i_1+1)–й позиції. Тому, згідно із тією ж теоремою $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2} = {}$ $= \mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(x)\,\mathbf{A}_n^{\langle i_1+2,i_2\rangle}(x)$, де $\mathbf{A}_n^{\langle i_1+2,i_2\rangle}(x)$ отримується із $\mathcal{A}_n^{\langle i_1+2,i_2\rangle}(x)$ заміною a_{i+1} на $x-x_i$. Єдиний ненульовий елемент (i_2-i_1-1)–го рядка визначника $\mathbf{A}_n^{\langle i_1+2,i_2\rangle}(x)$ рівний 1 займає (i_2-i_1)–ту позицію, а тоді $\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2} = \mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(x)\mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(x)\mathbf{T}_n^{\langle i_2+2\rangle}(x)$. Аналогічним чином можна показати, що

$$\left[\mathbf{t}_n^{\langle 1\rangle}(x)\right]_{i_1 i_2\dots i_s} = \mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(x)\mathbf{T}_{i_2-1}^{(i_1+2)}(x)\cdots\mathbf{T}_{i_s-1}^{(i_{s-1}+2)}(x)\mathbf{T}_n^{(i_s+2)}(x), \quad (6.1)$$

де $s=\overline{1,r}, \mathbf{T}_{s-1}^{(s)}(x)=1$.

З урахуванням (6.1) формула (5.3) перепишеться наступним чином

$$R_n(x)=\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k)}{(n+1)!\,\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)}\Bigg(f^{(n+1)}(\xi)\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(\xi)+f^{(n)}(\xi)\binom{n+1}{1}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{T}_{i-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\mathbf{T}_n^{\langle i+2\rangle}(\xi)+\binom{n+1}{2}f^{(n-1)}(\xi)\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}\mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(\xi)\times$$

$$\times\mathbf{T}_n^{\langle i_2+2\rangle}(\xi)+\cdots+\binom{n+1}{r}f^{(n+1-r)}(\xi)\sum_{i_1=1}^{n+1-2r}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2r}\cdots\sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{n-1}\mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\times$$

$$\times\mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(\xi)\cdots\mathbf{T}_{i_r-1}^{\langle i_{r-1}+2\rangle}(\xi)\mathbf{T}_n^{\langle i_r+2\rangle}(\xi)\Bigg). \tag{6.2}$$

Обґрунтуємо оцінку (2.7). Оцінимо (6.2) за модулем. Маємо

$$\big|R_n(x)\big|\le\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}|x-x_k|}{(n+1)!\,\big|\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\big|}\Big(|f^{(n+1)}(\xi)|\big|\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(\xi)\big|+\binom{n+1}{1}|f^{(n)}(\xi)|\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n-1}\big|\mathbf{T}_{i-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\big|\big|\mathbf{T}_n^{\langle i+2\rangle}(\xi)\big|+\binom{n+1}{2}|f^{(n-1)}(\xi)|\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}\big|\mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\big|\times$$

$$\times\big|\mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(\xi)\big|\big|\mathbf{T}_n^{\langle i_2+2\rangle}(\xi)\big|+\cdots+\binom{n+1}{r}|f^{(n+1-r)}(\xi)|\sum_{i_1=1}^{n+1-2r}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2r}\cdots$$

$$\cdots\sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{n-1}\big|\mathbf{T}_{i_1-1}^{\langle 1\rangle}(\xi)\big|\big|\mathbf{T}_{i_2-1}^{\langle i_1+2\rangle}(\xi)\big|\cdots\big|\mathbf{T}_{i_r-1}^{\langle i_{r-1}+2\rangle}(\xi)\big|\big|\mathbf{T}_n^{\langle i_r+2\rangle}(\xi)\big|\Big).$$

У [8] доведено, що $\big|\mathbf{T}_t^{\langle s\rangle}(x)\big|<(b_{max})^{t-s+1}\kappa_{t-s+2}(\rho)$, $s\le t$. Тоді

$$\big|R_n(x)\big|\le\frac{f_{max}\prod\limits_{k=0}^{n}|x-x_k|}{(n+1)!\,\big|\mathbf{T}_n^{\langle 1\rangle}(x)\big|}\Big((b_{max})^n\kappa_{n+1}(\rho)+\binom{n+1}{1}(b_{max})^{n-2}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_i(\rho)\kappa_{n-i}(\rho)+\binom{n+1}{2}(b_{max})^{n-4}\sum_{i_1=1}^{n-3}\kappa_{i_1}(\rho)\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}\kappa_{i_2-i_1-1}(\rho)\times$$

$$\times \kappa_{n-i_2}(\rho) + \binom{n+1}{3} (b_{max})^{n-6} \sum_{i_1=1}^{n-5} \kappa_{i_1}(\rho) \sum_{i_2=i_1+2}^{n-3} \kappa_{i_2-i_1-1}(\rho) \times$$

$$\times \sum_{i_3=i_2+2}^{n-1} \kappa_{i_3-i_2-1}(\rho) \kappa_{n-i_3}(\rho) + \cdots + \binom{n+1}{r} (b_{max})^{n-2r} \sum_{i_1=1}^{n+1-2r} \kappa_{i_1}(\rho) \times$$

$$\times \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2r} \kappa_{i_2-i_1-1}(\rho) \cdots \sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{n-1} \kappa_{i_r-i_{r-1}-1}(\rho) \kappa_{n-i_r}(\rho) \Big).$$

Оцінка (2.7) доведена. □

7. Чисельні приклади

Для ілюстрації ефективності отриманої оцінки E_2 залишкового члена Т–ІЛД у вигляді (5.3) та порівняння з оцінкою E_1 з теореми 2.1 залишкового члена Т–ІЛД у вигляді (2.6), розглянемо чисельні приклади.

Нехай у якості інтерполяційних вузлів вибрано корені многочлена Чебишова 1–го роду, які знаходяться в $\mathcal{R}$. Добре відомо [1], що для такого вибору вузлів $\prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{2^{2n+1}}$, $\alpha = \mathbf{diam}\,\mathcal{R}$. Крім того припустимо, що коефіцієнти $b_i, i = \overline{1,n}$, Т–ІЛД (2.4) задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма, тобто $|b_i| \geq \alpha + 1, i = \overline{1,n}$.

У [8] обґрунтовано, що якщо елементи $a_i(x), b_i(x), i = \overline{1,n}$ ланцюгового дробу $\mathbf{K}_{i=1}^{n}(a_i(x)/b_i(x))$ задовольняють умови $|a_i(x)| \leq \alpha$, $|b_i(x)| \geq \alpha + 1, i = \overline{1,n}, x \in \mathcal{R}$, то $Q_n(x)$ і $\mathbf{T}_n^{\langle 1 \rangle}(x)$ задовольняють нерівності

$$|Q_n(x)| \geq \Lambda_n, \ |\mathbf{T}_n^{\langle 1 \rangle}(x)| \geq \Lambda_n, \ \text{де } \Lambda_n = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}, & \alpha \neq 1, \\ n+1, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Якщо за вузли вибрано корені многочлена Чебишова 1–го роду, коефіцієнти Т–ІЛД задовольняють умову $|b_i| \geq \alpha + 1, i = \overline{1,n}$, то оцінка E_1 перепишеться у вигляді:

$$E_1 = \frac{f_{max} b_{max}^n \alpha^{n+1}}{2^{2n+1} \Lambda_n (n+1)!} \Big(\kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{m=1}^{r} \binom{n+1}{m} \frac{m!}{b_{min}^{2m}} \sum_{k=0}^{r-m} \binom{n+k}{m} \binom{n-m-k}{m+k} \rho^k \Big),$$

де $\kappa_n(\rho), f_{max}, b_{min}, b_{max}, \rho, r, \alpha$ визначені в умові теореми 2.1.

Аналогічно оцінка E_2 набуває вигляду

$$E_2 = \frac{f_{max} \cdot \alpha^{n+1}}{2^{2n+1} \Lambda_n (n+1)!} \Big(b_{max}^n \kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{k=1}^{r} \binom{n+1}{k} b_{max}^{n-2k} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{n+1-2k} \kappa_{i_1}(\rho) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} \kappa_{i_2-i_1-1}(\rho) \cdots \sum_{i_{k-1}=i_{k-2}+2}^{n-3} \kappa_{i_{k-1}-i_{k-2}-1}(\rho) \times$$

$$\times \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} \kappa_{i_k-i_{k-1}-1}(\rho)\kappa_{n-i_k}(\rho) \Bigg).$$

Результати отриманих значень обчислювальних експериментів вміщено у таблицях. У першому стовпчику таблиці вказано кількість інтерполяційних вузлів n, у другому та третьому стовпчиках, відповідно, значення b_{min} та b_{max}, у четвертому стовпчику – оцінка E_1 і у останньому – оцінка E_2.

Табл. 9.1: Функція 2^x, проміжок $\mathcal{R} = [-0{,}45; 0{,}0]$

n	b_{min}	b_{max}	E_1	E_2
4	1,495319	4,744028	$0{,}37622386 \cdot 10^{-03}$	$0{,}68695834 \cdot 10^{-04}$
5	1,479851	8,216546	$0{,}94634967 \cdot 10^{-03}$	$0{,}65432811 \cdot 10^{-04}$
6	1,470265	8,027247	$0{,}33122929 \cdot 10^{-03}$	$0{,}97885121 \cdot 10^{-05}$
7	1,463939	11,569403	$0{,}10333131 \cdot 10^{-02}$	$0{,}10578746 \cdot 10^{-04}$
8	1,459553	11,356674	$0{,}43434560 \cdot 10^{-03}$	$0{,}16740396 \cdot 10^{-05}$
9	1,456393	14,932188	$0{,}15610864 \cdot 10^{-02}$	$0{,}19200421 \cdot 10^{-05}$
10	1,454042	14,705507	$0{,}75069601 \cdot 10^{-03}$	$0{,}31442508 \cdot 10^{-06}$
11	1,452246	18,299149	$0{,}29980084 \cdot 10^{-02}$	$0{,}37312679 \cdot 10^{-06}$
12	1,450844	18,063648	$0{,}16040150 \cdot 10^{-02}$	$0{,}62559307 \cdot 10^{-07}$

Приклад 1. Функція $y = 2^x$ інтерполюється на $\mathcal{R} = [-0{,}45; 0{,}0]$. Похідна n–го порядку функції рівна $y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$. Легко бачити, що серед похідних порядку $k, k = \overline{n+1-r, n+1}$, найбільше значення на відрізку $\mathcal{R}$ набуває похідна $(n+1-r)$–го порядку на правому краю відрізка, тобто $f_{max} = (\ln 2)^{n+1-r}$. Із результатів вміщених у таблиці 9.1 випливає, що оцінка E_1 значно поступається оцінці E_2. Крім того значення E_2 спадають із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів.

Приклад 2. Розглянемо задачу інтерполяції функції $y = \sqrt{x}$ на $\mathcal{R} = [1{,}1; 1{,}7]$ Т–ІЛД (2.4). Оскільки n–а похідна функції визначається згідно із формулою

$$\left(\sqrt{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n \cdot \sqrt{x^{2n-1}}},$$

то найбільше за модулем значення серед похідних порядку k, коли $k = \overline{n+1-r, n+1}$, на проміжку $\mathcal{R}$ набуває похідна $(n+1)$–го порядку на його лівому краї, тобто

$$f_{max} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\left(\sqrt{1{,}1}\right)^{2n+1}},$$

Результати, які наведені у таблиці 9.2, ілюструють перевагу оцінки E_2 над оцінкою E_1. Як і у попередньому прикладі значення оцінки E_2 спадає із збільшенням кількості інтерполяційних вузлів.

Табл. 9.2: Функція $\sqrt{x}$, проміжок $\mathcal{R} = [1{,}1; 1{,}7]$

n	b_{min}	b_{max}	E_1	E_2
7	2,124195	2,585934	$0{,}66350373 \cdot 10^{-04}$	$0{,}21285556 \cdot 10^{-04}$
8	2,118777	2,590427	$0{,}48854910 \cdot 10^{-04}$	$0{,}11004596 \cdot 10^{-04}$
9	2,114851	2,593664	$0{,}38284594 \cdot 10^{-04}$	$0{,}58537385 \cdot 10^{-05}$
10	2,111918	2,596071	$0{,}31796009 \cdot 10^{-04}$	$0{,}31841731 \cdot 10^{-05}$
11	2,109671	2,597909	$0{,}27728209 \cdot 10^{-04}$	$0{,}17634902 \cdot 10^{-05}$
12	2,107913	2,599344	$0{,}25302938 \cdot 10^{-04}$	$0{,}99125665 \cdot 10^{-06}$
13	2,106512	2,600485	$0{,}24036410 \cdot 10^{-04}$	$0{,}56415945 \cdot 10^{-06}$
14	2,105378	2,601408	$0{,}23704991 \cdot 10^{-04}$	$0{,}32450711 \cdot 10^{-06}$
15	2,104447	2,602164	$0{,}24191062 \cdot 10^{-04}$	$0{,}18837630 \cdot 10^{-06}$
16	2,103673	2,602791	$0{,}25491251 \cdot 10^{-04}$	$0{,}11023125 \cdot 10^{-06}$
17	2,103024	2,603317	$0{,}27672961 \cdot 10^{-04}$	$0{,}64960423 \cdot 10^{-07}$
18	2,102474	2,603763	$0{,}30896745 \cdot 10^{-04}$	$0{,}38522821 \cdot 10^{-07}$
19	2,102011	2,604144	$0{,}35416462 \cdot 10^{-04}$	$0{,}22973370 \cdot 10^{-07}$
20	2,101615	2,604472	$0{,}41625056 \cdot 10^{-04}$	$0{,}13769827 \cdot 10^{-07}$
21	2,066126	2,604756	$0{,}65042318 \cdot 10^{-04}$	$0{,}85612464 \cdot 10^{-08}$

8. Висновки

У статті встановлені нові властивості континуанти, які використовуються при дослідженні задачі інтерполяції функцій однієї дійсної змінної на компакті інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле. Встановлено новий вигляд формули залишкового члена Т–ІЛД та отримана оцінка залишкового члена Т–ІЛД. Отриманий вигляд залишкового члена через континуанти дозволяє отримати і інші оцінки залишкового члена Т–ІЛД.

Автор вважає своїм обов'язком висловити щиру подяку академіку НАН України Володимиру Леонідовичу Макарову за цінні поради,

користі зауваження та проявлену увагу до даного дослідження.

Література

[1] І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Методи обчислень*, У 2 ч., К., Вища школа, 1995. Ч. 1, 367 с.

[2] А. А. Привалов, *Теория интерполирования функций*, В 2 кн., Саратов, Из-во Сарат. ун-та, 1990. Кн. 1, 230 с.

[3] В. Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, *Сплайн–аппроксимация функций*, М., Высшая школа, 1983.

[4] Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис, *Аппроксимации Паде*, М., Мир, 1986.

[5] T. N. Thiele, *Interpolationsprechnung*, Leipzig, Commisission von B.G. Teubner, 1909.

[6] М. М. Пагіря, *Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів* // Комп'ют. матем. Оптим. обчислень, Збірник наук. праць Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, **1** (2001), 328–333.

[7] M. M. Pahirya, *Interpolation function of non–Thiele continued fractions* // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, **X** (2002), 59–62.

[8] М. М. Пагіря, *Наближення функцій ланцюговими дробами*, Ужгород, Ґражда, 2016.

[9] М. М. Пагіря, *Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів* // Математичні методи та фізико–механічні поля, **46** (2003), No. 4, 57–64.

[10] L. M. Milne–Thomson, *The calculus of finite differences*, Providence, Rhode Island, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 2000.

[11] M. M. Pahirya, *Evaluation of the remainder term for the Thiele interpolation continued fraction* // Ukrainian Mathematical Journal, **60** (2008), Is. 11, 1813–1822.

[12] У. Джоунс, В. Трон, *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*, М., Мир, 1985.

[13] В. Я. Скоробогатько, *Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике*, М., Наука, 1983.

[14] G. Chrystal, *Algebra: An elementary text–book for the higher classes of secondary school and for colleges*, London, A & C. Black, 1889.

[15] R. Vein, P. Dale, *Determinants and Their Application in Mathematical Physics*, Berlin, Springer, 2006.

[16] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры,* М., Наука, 1975.

Відомості про авторів

Михайло Михайлович Пагіря

Ужгородський національний університет
Мукачівський державний університет,
м. Мукачево, Україна
E-Mail: pahirya@gmail.com