Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 4, 477 – 495

УМВ

Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами II

Александр К. Бахтин, Ирина В. Денега

(Представлена А. А. Довгошеем)

Посвящается 100-летию со дня рождения Г. Д. Суворова

Аннотация. В данной работе изучаются задачи об экстремальном разбиении комплексной плоскости со свободными полюсами расположенными на (n, m)-лучевой системе точек. В статье предложен метод, который позволил получить новые оценки сверху для максмума произведений внутренних радиусов непересекающихся областей.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, взаимно непересекающиеся области, функция Грина, квадратичный дифференциал, трансфинитный диаметр, теорема о минимизации площади, неравенство Коши.

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [1–3].

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек

$$A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} : \; k = \overline{1, n}, \; p = \overline{1, m}\right\}$$

назовем (n, m)-лучевой, если при всех $k = \overline{1, n}$ и $p = \overline{1, m}$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} &0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty; \\ &\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m}); \\ &0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi. \end{aligned}$$

Статья поступила в редакцию 14.06.2019

В случае $m = 1$ $(n, 1)$-лучевую систему точек будем называть n-лучевой и использовать более простые обозначения:

$$a_{k,1} =: a_k,\ k = \overline{1, n}, \quad A_{n,1} =: A_n.$$

На множестве (n, m)-лучевых систем рассмотрим следующие величины:

$$\begin{array}{l} \alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1}(A_{n,m}) - \theta_k(A_{n,m})\right], \\ k = \overline{1, n}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_n. \end{array}$$

Величины $\alpha_k(A_{n,m})$, $k = \overline{1, n}$, будем называть угловыми параметрами системы $A_{n,m}$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Целью данной работы является получение оценок сверху для функционалов следующего вида при всех значениях параметра $\gamma \in (0, nm]$

$$I_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

$$J_{n,m}(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_{\infty}, \infty\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

$$Y_{n,m}(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, – произвольная (n, m)-лучевая система точек, $B_{k,p}$ – произвольная система взаимно непересекающихся областей таких, что $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, и $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$.

2. (n, m)-лучевые системы точек

Используя рассуждения леммы 1 [4], мы получили следующие результаты, касающиеся оценок произведений внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей, расположенных на произвольной (n, m)-лучевой системе точек.

Теорема 1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тогда для любой фиксированной* (n,m)*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leqslant (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Доказательство. Пусть $d(E)$ – трансфинитный диаметр компактного множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливо соотношение

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+})} \leqslant \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{p=1}^{m} \overline{B}_{k,p}^{+})}, \tag{2.1}$$

где $B^{+} = \{z; \frac{1}{z} \in B\}$. В силу известной теоремы Пойа [5, с. 28], справедливо неравенство

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

где μE обозначает лебегову меру компактного множества E. Тогда из (2.1), получаем

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \mu \overline{B}_{k,p}^{+} \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Из теоремы о минимизации площади [6, с. 34] следует, что

$$\iint\limits_{B} |\varphi'(z)|^2 dxdy \geqslant \pi r^2\left(B, a\right). \tag{2.3}$$

Пусть $\varphi_1(z) = (z - a)$, тогда из (2.3), имеем

$$S(B) = \mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B, a\right).$$

Из неравенства (2.2) следует, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}^{+}, a_{k,p}^{+}\right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Используя конформную инвариантность функции Грина, имеем

$$g_{B_{k,p}}(z,a_{k,p})=g_{B^+_{k,p}}(w^+,a^+_{k,p}),\quad w^+=\frac{1}{z}.$$

Используя соотношение

$$g_{B^+_{k,p}}(w^+,a^+_{k,p})=g_{B^+_{k,p}}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_{k,p}}\right)=\ln\frac{1}{|\frac{1}{z}-a^+_{k,p}|}+\ln r(B^+_{k,p},a^+_{k,p})+o(1),$$

получаем,

$$r\left(B^+_{k,p},a^+_{k,p}\right)=\frac{r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^2}$$

и приходим к следующему неравенству

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем следующую оценку для функционала $I_{n,m}(\gamma)$

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Из неравенства Коши имеем утверждение

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\geqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geqslant\left[nm\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$=(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Итак,

$$I_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}}$$

$$= (nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Таким образом, получена оценка сверху для функционала $I_{n,m}(\gamma)$. □

Замечание 1. Если $\gamma = nm$ и $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \leqslant R$ тогда при условиях Теоремы 1 имеем соотношение

$$r^{nm}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (nm)^{-\frac{nm}{2}} \cdot R^2.$$

Замечание 2. В теореме 1 при $\gamma = nm$ (n,m)-лучевая структура точек не требуется.

В работе [1, с. 95] для фиксированного $R \in \mathbb{R}^+$, произвольной (n,m)-лучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и системы взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, доказано неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{n,m}),$$

где $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}^+$ при заданном R – коэффициенты смещения системы $A_{n,m}$ и $\mu_k(R) \leqslant m^{-2m}$,

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(|\frac{a_{k,p}}{R}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) \cdot \chi\left(|\frac{a_{k,p}}{R}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|.$$

Таким образом, из теоремы 1, получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тогда для любой фиксированной* (n,m)*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей*

B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leqslant \frac{4^{nm-\gamma} \cdot \left(M_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тогда для любой фиксированной* (n,m)*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m}) = 1$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Аналогичным образом можно получить оценку для максимума функционала $J_{n,m}(\gamma)$.

Теорема 2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, \infty]$. *Тогда для любой фиксированной* (n,m)*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}\gamma} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Доказательство. Используя соотношения (2.1), (2.2) и (2.3) доказательства теоремы 1, получаем неравенства

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[r^2\left(B_\infty, \infty\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \frac{r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_\infty, \infty\right) \leqslant \left[r^2\left(B_0, 0\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} r^2\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Из неравенства Коши аналогично доказательству предыдущей теоремы, имеем

$$\left(r^2\left(B_\infty,\infty\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant (nm+1)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_\infty,\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^2}\right]^{\frac{1}{nm+1}}.$$

Таким образом, с учетом выше приведенных соотношений

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant (nm+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[r\left(B_\infty,\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{nm+1}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+1}}.$$

Аналогично,

$$r\left(B_\infty,\infty\right)\leqslant (nm+1)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{1}{nm+1}}.$$

Далее, используя несложные преобразования, имеем

$$r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)$$

$$\leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{2}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+2}}.$$

И, окончательно, получаем основное неравенство теоремы 2

$$\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant (nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Таким образом, мы получили оценку сверху для функционала $J_{n,m}(\gamma)$.

$\square$

Замечание 3. Если $\gamma = \frac{1}{2}(nm+2)$ и $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leqslant R$, тогда при условиях теоремы 2 имеем соотношение

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^{\frac{1}{2}(nm+2)}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}\cdot R.$$

Замечание 4. В теореме 2 при $\gamma = \frac{1}{2}(nm+2)$ (n,m)-лучевая структура точек не требуется.

Используя результат работы [1, с. 95], из теоремы 2 получаем следующие утверждения.

Следствие 3. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\infty]$. Тогда для любой фиксированной (n,m)-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$J_{n,m}(\gamma)\leqslant(nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}\gamma}$$

$$\times\left(\left(\frac{4}{nm}\right)^{nm}\cdot M_R(A_{n,m})\right)^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Следствие 4. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\infty]$. Тогда для любой фиксированной (n,m)-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такой, что $M_R(A_{n,m})=1$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$J_{n,m}(\gamma)\leqslant(nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}\gamma}\cdot\left(\frac{4}{nm}\right)^{nm\left(1-\frac{2\gamma}{nm+2}\right)}.$$

Имеет место следующее утверждение для функционала $Y_{n,m}(\gamma)$.

Теорема 3. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тогда для любой фиксированной (n,m)-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\infty\in B_\infty\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$Y_{n,m}(\gamma)\leqslant(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

Доказательство. Используя неравенства (2.1), (2.2) и теорему о минимизации площади [6, с. 34], получаем соотношение

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{m}r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Из неравенства Коши, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r^{2}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant(nm)^{\frac{1}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{\frac{1}{(nm)}},$$

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{-\frac{\gamma}{(nm)}}.$$

И, таким образом,

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{nm}}.$$

□

Замечание 5. Если $\gamma=nm$, тогда при условиях теоремы 3 имеем соотношение

$$r^{nm}\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant(nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

Замечание 6. В теореме 3 при $\gamma=nm$ (n,m)-лучевая структура точек не требуется.

Используя результат работы [1, с. 95], из теоремы 3 получаем следующие утверждения.

Следствие 5. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $\gamma\in(0,\,nm]$. Тогда для любой фиксированной (n,m)-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_{∞}, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\infty\in B_{\infty}\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$Y_{n,m}(\gamma)\leqslant\frac{4^{nm-\gamma}\cdot\left(M_{R}(A_{n,m})\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Следствие 6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, nm]$. *Тогда для любой фиксированной* (n, m)*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m}) = 1$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$Y_{n,m}(\gamma) \leqslant \frac{4^{nm-\gamma}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}.$$

3. n-лучевые системы точек

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введем “управляющий” функционал

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

В монографии [1] был предложен метод “управляющих” функционалов, который позволил обобщить некоторые результаты об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

Проблема. При всех значениях параметра $\gamma \in (0, n]$ найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-лучевая система точек, такая, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}\left(A_n\right) \leqslant 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система взаимно непересекающихся областей таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0,n}$, и описать все экстремали.

Частные случаи этой проблемы изучались во многих работах (см., например, [4–17]).

Величина

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2, \tag{3.4}$$

как показано в работах [1–3, 7], имеет вид

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{4}{n}\right)^n\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{3.5}$$

Имеет место следующая оценка сверху максимума функционала $I_n(\gamma)$.

Теорема 4. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\gamma\in(0,n]$. Тогда для произвольной фиксированной n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n\in\mathbb{C}/\{0\}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0=0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^n|a_ka_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^n\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Доказательство. Имеет место соотношение

$$\left(r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)\right)^n\prod_{k=1}^n r^2\left(B_k,a_k\right)=\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)\right]$$

$$\times\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_3,a_3\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_n,a_n\right)r\left(B_1,a_1\right)\right].$$

Известно [8], что существует единственный конформный автоморфизм комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$

$$\widetilde{w}=T_k(w),$$

который переводит три заданные точки a_0, a_k, a_{k+1} в точки $T(a_0)=0$, $T(a_k)=1$, $T(a_{k+1})=-1$. Тогда для каждого сомножителя $r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)r\left(B_{k+1},a_{k+1}\right)$, $k=\overline{1,n}$, $a_{n+1}:=a_1$, имеет место равенство

$$\frac{r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})}{|a_k|^{\frac{2\gamma}{n}}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{2\gamma}{n}}\cdot|a_k-a_{k+1}|^{2-\frac{2\gamma}{n}}}=\frac{r^{\frac{2\gamma}{n}}(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_k},1)r(\widetilde{B_{k+1}},-1)}{2^{2-\frac{2\gamma}{n}}},$$

где $\widetilde{I_2^{(k)}}(\frac{2\gamma}{n})=r^{\frac{2\gamma}{n}}(\widetilde{B_0},0)r(\widetilde{B_k},1)r(\widetilde{B_{k+1}},-1)$, $\widetilde{B_0}=T_k(B_0)$, $\widetilde{B_k}=T_k(B_k)$, $\widetilde{B_{k+1}}=T_k(B_{k+1})$, из которого следует, что

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0,0)r(B_k,a_k)r(B_{k+1},a_{k+1})$$

$$=\widetilde{I_2^{(k)}}\left(\frac{2\gamma}{n}\right)|a_ka_{k+1}|^{\frac{2\gamma}{n}}\left(\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{2-\frac{2\gamma}{n}}.$$

Далее, учитывая результат работы [2] для трех произвольных попарно непересекающихся областей, окончательно получаем соотношение

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k a_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}|a_k - a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

$\square$

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (0, n]$. Тогда для произвольной фиксированной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}/\{0\}$ такой, что*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} |a_k a_{k+1}|\right)^{\frac{\gamma}{n}} \leqslant 1, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}|a_k - a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant 1,$$

и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Следующие теоремы изучают дополнительные ограничения при которых можно получить полное решение выше приведенной проблемы о максимуме функционала $I_n(\gamma)$.

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (1, n]$ и*

$$K(n, \gamma) = \left[I_n^0(\gamma) \cdot \mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

где $I_n^0(\gamma)$ определяется соотношением (3.5), а

$$\mu_n(\gamma) = \left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, что

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n, \gamma),$$

справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (3.6)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k *и* B_k, $k = \overline{0,n}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (3.4).

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right)},$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (3.4). Из условий теоремы 5 следует, что

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Согласно методу работы [1, с. 255], имеем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mathcal{L}^{(0)}(A_n)$$

$$\leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)},$$

где $\alpha_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тогда выполняется соотношение

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma} \cdot \frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{I_n^0(\gamma)}.$$

Отсюда учитывая условия теоремы 5, получаем

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant 1.$$

Таким образом, при условии $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ справедливо неравенство

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma)$$

и в этом случае теорема доказана. Для случая $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ результат теоремы 5 следует из утверждения работы [9]. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. $\square$

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3.4).

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа. При условии $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$, результат теоремы 6 следует из работы [9]. В случае $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ аналогично доказательству теоремы 5 рассмотрим величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(D_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, d_k)},$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (3.4). Как показано в работе [13] (см. также теорему 1 если $m = 1$) при условиях теоремы 6 выполняется неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \tag{3.7}$$

Из условия $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ следует, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$. Тогда, имеем следующее соотношение

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким образом, аналогично работам [1, 4, 10], получаем

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

где

$$f_1(n) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}, \quad f_2(n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(n) = \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma_n = n^{0,5}$, тогда

$$\Lambda_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

где

$$f_1(n) = (n)^{-\frac{n^{0.5}}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}, f_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$f_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$f_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}.$$

Далее, по стандартной схеме исследуем каждую функцию $f_k(n)$, $k = \overline{1,6}$. Анализ показывает, что функция $f_1(n)$ монотонно убывает на промежутке $n \geqslant 7$, поэтому справедливо неравенство

$$f_1(n) < f_1(7) \leqslant 0,016666, \quad n \geqslant 7.$$

Функция $f_2(n)$ также монотонно убывает на промежутке $n \geqslant 7$. Таким образом,

$$f_2(n) < f_2(7) \leqslant 1,444469, \quad n \geqslant 7.$$

Очевидно, что

$$f_3(n) < f_3(7) \leqslant 1, \quad n \geqslant 7.$$

Функцию $f_4(n)$ представим следующим образом

$$f_4(n) = \left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}n^{-0,75}2n^{0,25}} \left(1-n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75})2n^{0,25}}.$$

Поскольку $\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1-n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, то

$$f_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и

$$f_4(n) < f_4(10) \leqslant 4,886133, \quad n \geqslant 10.$$

Функция $f_5(n)$ убывает на промежутке $n \geqslant 8$, отсюда

$$f_5(n) < f_5(8) \leqslant 1,750853, \quad n \geqslant 8.$$

Для функции $f_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 7.$$

Тогда суммируя все выше сказанное, получаем

$$\Lambda_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n) \leqslant$$

$$\leqslant 0,016666 \cdot 1,444469 \cdot 1 \cdot 4,886133 \cdot 1,750853 \cdot 3 \approx 0,617839 < 1,$$

то есть

$$\Lambda_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 10.$$

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [3,9]$.

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$	$f_6(n)$	$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$
3	0,052699	1,373197	0,465492	11,910563	1,599730	1,408801	0,904224
4	0,039628	1,414213	0,548322	8,086547	1,681792	1,539600	0,643422
5	0,029590	1,433159	0,600258	6,329659	1,722722	1,637880	0,454626
6	0,022149	1,441582	0,636628	5,320779	1,742416	1,715055	0,323209
7	0,016666	1,444469	0,663961	4,664524	1,750178	1,777704	0,231974
8	0,012616	1,444259	0,685515	4,202238	1,750853	1,829872	0,168163
9	0,009607	1,442249	0,703109	3,858081	1,747161	1,874189	0,123077

Таким образом,

$$\Lambda_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 3.$$

Пусть $\gamma \in (1, \gamma_n\,]$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(\gamma) = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при каждом фиксированном n. Запишем функцию $\varphi_n(\gamma)$ следующим образом

$$\ln \varphi_n(\gamma) = -\frac{\gamma}{2} \ln n$$

$$+ \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) \left[n \ln 4 - (n-1)\ln(n-1) - \frac{1}{2}\ln\gamma + (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \right].$$

Производная функции $\varphi_n(\gamma)$ по γ

$$[\ln \varphi_n(\gamma)]'_\gamma$$

$$-\frac{\ln n}{2} - \ln 4 + \frac{(n-1)}{n}\ln(n-1) + \frac{1}{2n}\ln\gamma - \frac{(n-1)}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\left[\frac{(n-1)}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right] \geqslant 0,$$

поскольку справедливы следующие неравенства

$$\eta_n(\gamma) = -\frac{\ln n}{2} + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{(n-1)}{n}\ln(n-1) < 0, \quad n = \overline{3, 22},$$

$$\text{и} \quad \eta_n(\gamma) > 0, \quad \text{если} \quad n \geqslant 23, \quad \frac{1}{2n}\ln\gamma > 0,$$

$$-\frac{n-1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) > 0, \quad \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right) > 0.$$

Таким образом, функция $\varphi_n(\gamma)$ при каждом фиксированном n монотонно возрастает по γ на интервале $(1, \gamma_n\,]$, а функция $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ на этом же интервале, поскольку

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right) \right) < 0$$

при каждом фиксированном n. Таким образом,

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = \Lambda_n(\gamma_n) < 1.$$

То есть, $I_n(\gamma_n) < I_n^0(\gamma_n)$ при всех значениях γ_n, указанных в теореме 6. А это означает, что в случае $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ при данных значениях параметров нет экстремальных конфигураций. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. □

Литература

[1] A. K. Bakhtin, G. P. Bakhtina, Yu. B. Zelinskii, *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis* // Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 2008 (in Russian).

[2] V. N. Dubinin, *Symmetrization method in geometric function theory of complex variables* // Successes Mat. Science, **49** (1994), No. 1 (295), 3–76 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, **1** (1994), 1–79.

[3] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[4] A. K. Bakhtin, *Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **14** (2017), No. 4, 456–471 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **234** (2018), No. 1, 1–13.

[5] G. Polya, G. Szego, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, M, Fizmatgiz, 1962 (in Russian).

[6] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable* // Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.

[7] L. V. Kovalev, *On the problem of extremal decomposition with free poles on a circle* // Dal'nevostochnyi Mat. Sb., (1996), No. 2, 96–98 (in Russian).

[8] Л. И. Колбина, *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области* // Вестник Ленингр. ун-та, **5** (1955), 37–43.

[9] А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей* // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **9** (2012), No. 2, 32–44.

[10] A. K. Bakhtin, *Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **14** (2017), No. 3, 309–329 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **231** (2018), No. 1, 1–15.

[11] G. V.Kuz'mina, *The Method of Extremal Metric in Extremal Decomposition Problems with Free Parameters* // J. Math. Science, **129** (2005), No. 3, 3843–3851.

[12] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2012), No. 2, 83–92.

[13] А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей* // Укр. мат. журн., **71** (2019), No.7, 979–985.

[14] I. Denega, *Estimates of the inner radii of non-overlapping domains* // Ukr. Math. Bulletin, **16** (2019), No. 1, 77–87 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **242** (2019), No. 6, 787–795.

[15] P. M. Tamrazov, *Extremal conformal mappings and poles of quadratic differentials* // Mathematics of the USSR-Izvestiya, **2** (1968), No. 5, 987–996.

[16] I. V. Denega, *Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles* // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin–Polonia, **67** 2013, No. 1, 11–22.

[17] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane* // Complex Variables and Elliptic Equations, **62** (2018), No. 11, 1611–1618.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `abahtin@imath.kiev.ua`

Ирина Викторовна Денега — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `iradenega@gmail.com`