Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 4, 503 – 513

О решении линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием методом наименьших квадратов

Сергей М. Чуйко

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. Найдены условия существования и конструкция наилучшего по методу наименьших квадратов псевдорешения линейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием.

2010 MSC. 34A09, 34B, 65B10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциально-алгебраические уравнения, нетеровы дифференциально-алгебраические краевые задачи, сосредоточенное запаздывание.

1. Постановка задачи

В монографиях [1, 2] разработаны конструктивные методы решения нетеровых краевых задач для систем дифференциальных, функционально-дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Предложенные методы решения нетеровых краевых задач опирались на эффективную схему исследования условий разрешимости, а также конструкцию общего решения линейных алгебраических уравнений, основанную на псевдообращении матриц по Муру–Пенроузу. Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [3–6]. В статьях [7, 8]

Статья поступила в редакцию 15.03.2019

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

ISSN 1810 – 3200.

предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. Целью данной статьи является нахождение условий существования, а также конструкции наилучшего по методу наименьших квадратов решения дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием.

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{j\Delta\}_I\Big\} \cap \mathbb{C}[0,T], \quad j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$$

линейной дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + C(t)z(t-\Delta) + f(t), \;\; t \in [\Delta, T], \;\; \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{1.1}$$

непрерывного в точках $t = j\Delta$, с начальной функцией [1,2]

$$z(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}^1[0, \Delta].$$

В точках $t = j\Delta,\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$ искомое решение задачи (1.1), возможно, претерпевает ограниченный разрыв производной. Здесь

$$A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[0,T], \quad f(t) \in \mathbb{C}[0,T], \quad T := (q+1)\,\Delta$$

— непрерывные матрицы. Матрицу $A(t)$ предполагаем прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной; $\ell z(\cdot)$ – линейный ограниченный функционал:

$$\mathbb{C}^1\Big\{[0,T] \setminus \{k\Delta\}_I\Big\} \cap \mathbb{C}[0,T] \to \mathbb{R}^k.$$

2. Условия существования наилучшего по методу наименьших квадратов решения дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием

В монографии [9] разработана классическая схема метода наименьших квадратов, перенесенная в статье [10] на нетеровы краевые задачи для систем дифференциально-алгебраических уравнений. Таким образом, целью данной статьи является нахождение условий существования, а также конструкции наилучшего по методу наименьших квадратов решения дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием. Пусть $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_\mu(t)$, ... – система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим $(n \times \mu_j)$– матрицы

$$\Psi_j(t), \quad \mu_j \le \mu, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q-1,$$

составленные из $\mu_j \in \mathbb{N}$ вектор-столбцов системы функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... ,$\psi_\mu(t)$. Приближение к решению дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), наилучшее по методу наименьших квадратов, ищем в виде

$$z_j(t) = \Psi_j(t)\gamma_j,\ t \in [(1+j)\Delta, (2+j)\Delta],\ \gamma_j \in \mathbb{R}^{\mu_j},\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ q-1.$$

Условие существования непрерывного в точке $t = \Delta$ решения дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1) с начальной функцией $\varphi(t)$ обеспечивает равенство $\Psi_0(\Delta)\gamma_0 = \varphi(\Delta)$. Аналогично, непрерывность в точках $t = j\Delta$ решения дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1) обеспечивают равенства

$$\Psi_{j-1}(j\Delta)\gamma_{j-1} = \Psi_{j-2}(j\Delta)\gamma_{j-2}, \quad j = 2,\ 3,\ \dots\ ,\ q. \tag{2.2}$$

Потребуем [9, 10]

$$F(\gamma) := \left|\left| A(t)z'(t) - B(t)z(t) - C(t)z(t-\Delta) - f(t) \right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[\Delta,T]}$$

$$+ \left|\left| \ell z(\cdot) - \alpha \right|\right|^2_{\mathbb{R}^k} \to \min, \quad \gamma := \mathrm{col}\ (\gamma_0, \gamma_1,\ \dots\ ,\ \gamma_{q-1}) \in \mathbb{R}^\kappa, \quad \kappa := \sum_{j=0}^{q-1} \mu_j,$$

при этом

$$F(\gamma) = \int_\Delta^{2\Delta} \Big\{ A(t)z_0'(t) - B(t)z_0(t) - C(t)\varphi(t-\Delta) - f(t) \Big\}^* \times$$

$$\times \Big\{ A(t)z_0'(t) - B(t)z_0(t) - C(t)\varphi(t-\Delta) - f(t) \Big\}\, dt$$

$$+ \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Big\{ A(t)z_1'(t) - B(t)z_1(t) - C(t)z_0(t-\Delta) - f(t) \Big\}^*$$

$$\times \Big\{ A(t)z_1'(t) - B(t)z_1(t) - C(t)z_0(t-\Delta) - f(t) \Big\}\, dt + \ \dots$$

$$+ \int_{q\Delta}^{T} \Big\{ A(t)z_{q-1}'(t) - B(t)z_{q-1}(t) - C(t)z_{q-2}(t-\Delta) - f(t) \Big\}^* \times$$

$$\times\Big\{A(t)z'_{q-1}(t)-B(t)z_{q-1}(t)-C(t)z_{q-2}(t-\Delta)-f(t)\Big\}\,dt+\ \dots$$

$$+\Big\{\ell z(\cdot)-\alpha\Big\}^*\cdot\Big\{\ell z(\cdot)-\alpha\Big\}\to\min.$$

Обозначим линейные ограниченные функционалы:

$$\ell z_0(\cdot):\mathbb{C}^1[\Delta,2\Delta]\to\mathbb{R}^k,$$

$$\ell z_1(\cdot):\mathbb{C}^1[2\Delta,3\Delta]\to\mathbb{R}^k,\ \dots,\ \ell z_{q-1}(\cdot):\mathbb{C}^1[q\Delta,T]\to\mathbb{R}^k$$

и матрицы:

$$\Phi_j(t):=A(t)\Psi'_j(t)-B(t)\Psi_j(t),\quad \Phi_{c_j}(t):=C(t)\Psi_j(t-\Delta),$$

$$\Omega_j:=\ell\Psi_j(\cdot),\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q-1.$$

Для фиксированных матриц $\Psi_i(t),\ i=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q-1$ минимум функции $F(\gamma)$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие $F'_\gamma(\gamma)=0$ минимизации функции $F(\gamma)$ приводит к системе уравнений

$$\int_\Delta^{2\Delta}\Phi_0^*(t)\Phi_0(t)\,dt\,\gamma_0+\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_{c_0}^*(t)\Phi_{c_0}(t)\,dt\,\gamma_0-$$

$$-\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_{c_0}^*(t)\Phi_1(t)\,dt\,\gamma_1+\Omega_0^*\,\Omega_0\,\gamma_0+\Omega_0^*\,\Omega_1\,\gamma_1+\ \dots\ +\Omega_0^*\,\Omega_{q-1}\,\gamma_{q-1}=\lambda_q,$$

$$-\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_1^*(t)\Phi_{c_0}(t)\,dt\,\gamma_0+\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_1^*(t)\Phi_1(t)\,dt\,\gamma_1+\int_{3\Delta}^{4\Delta}\Phi_{c_1}^*(t)\Phi_{c_1}(t)\,dt\,\gamma_1-$$

$$-\int_{3\Delta}^{4\Delta}\Phi_{c_1}^*(t)\Phi_2(t)\,dt\,\gamma_2+\Omega_1^*\,\Omega_0\,\gamma_0+\Omega_1^*\,\Omega_1\,\gamma_1+\ \dots\ +\Omega_1^*\,\Omega_{q-1}\,\gamma_{q-1}$$

$$=\lambda_{q+1},\ \dots\ ,\int_{q\Delta}^{T}\Phi_{q-1}^*(t)\Phi_{q-1}(t)\,dt\,\gamma_{q-1}-\int_{q\Delta}^{T}\Phi_{q-1}^*(t)\Phi_{c_{q-2}}(t)\,dt\,\gamma_{q-2}+$$

$$+\Omega_{q-1}^*\,\Omega_0\,\gamma_0+\Omega_{q-1}^*\,\Omega_1\,\gamma_1+\ \dots\ +\Omega_{q-1}^*\,\Omega_{q-1}\,\gamma_{q-1}=\lambda_{2q-1},$$

правые части которых:

$$\lambda_q:=\int_\Delta^{2\Delta}\Phi_0^*(t)(f(t)+C(t)\varphi(t-\Delta))dt-\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_{c_0}^*(t)f(t)dt+\Omega_0^*(\alpha-\ell\varphi(\cdot)),$$

$$\lambda_{q+1}:=\int_{2\Delta}^{3\Delta}\Phi_1^*(t)f(t)\,dt-\int_{3\Delta}^{4\Delta}\Phi_{c_1}^*(t)f(t)\,dt+\Omega_1^*\,(\alpha-\ell\varphi(\cdot)),\ \dots\ ,$$

$$\lambda_{2q-1}:=\int_{q\Delta}^{T}\Phi_{q-1}^*(t)f(t)\,dt+\Omega_{q-1}^*\,(\alpha-\ell\varphi(\cdot)).$$

Таким образом, непрерывность решения дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1) и необходимое условие минимизации функции $F(\gamma)$ обеспечивает уравнение

$$\Gamma\gamma = \lambda \tag{2.3}$$

с матрицей

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_{0,0} & \Gamma_{0,1} & ... & \Gamma_{0,q-1} \\ \Gamma_{1,0} & \Gamma_{1,1} & ... & \Gamma_{1,q-1} \\ ...... & ..... & ... & .... \\ \Gamma_{q-1,0} & \Gamma_{q-1,1} & ... & \Gamma_{q-1,q-1} \\ \Gamma_{q,0} & \Gamma_{q,1} & ... & \Gamma_{q,q-1} \\ \Gamma_{q+1,0} & \Gamma_{q+1,1} & ... & \Gamma_{q+1,q-1} \\ ...... & ..... & ... & .... \\ \Gamma_{2q-1,0} & \Gamma_{2q-1,1} & ... & \Gamma_{2q-1,q-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(qp+\mu)\times\mu},$$

где

$$\Gamma_{0,0} := \Psi_0(\Delta), \quad \Gamma_{0,1} := 0, \ ... \ , \ \Gamma_{0,q-1} := 0, \quad \Gamma_{1,0} := \Psi_0(2\Delta),$$

$$\Gamma_{1,1} := -\Psi_1(2\Delta), \quad \Gamma_{1,2} := 0, \ ... \ , \ \Gamma_{1,q-1} := 0, \ ... \ , \ \Gamma_{2,(q-1)} := 0,$$

$$\Gamma_{q-1,0} := 0, \ ... \ , \ \Gamma_{q-1,q-3} := 0,$$

$$\Gamma_{q-1,q-2} := \Psi_{q-2}(q\Delta), \quad \Gamma_{q-1,q-1,} := -\Psi_{q-1}(q\Delta),$$

$$\Gamma_{q,0} := \int_{\Delta}^{2\Delta} \Phi_0^*(t)\Phi_0(t)\,dt + \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_{c_0}^*(t)\Phi_{c_0}(t)\,dt + \Omega_0^*\,\Omega_0, \quad \Gamma_{q,2} := \Omega_0^*\,\Omega_2,$$

$$\Gamma_{q,1} := \Omega_0^*\,\Omega_1 - \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_{c_0}^*(t)\Phi_1(t)\,dt, \ ... \ , \ \Gamma_{q,(q-1)} := \Omega_0^*\,\Omega_{q-1},$$

$$\Gamma_{q+1,0} := \Omega_1^*\,\Omega_0 - \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\Phi_{c_0}(t)\,dt,$$

$$\Gamma_{q+1,1} := \Omega_1^*\,\Omega_1 + \int_{2\Delta}^{3\Delta} \Phi_1^*(t)\Phi_1(t)\,dt$$

$$+ \int_{3\Delta}^{4\Delta} \Phi_{c_1}^*(t)\Phi_{c_1}(t)\,dt, \ ... \ , \ \Gamma_{q+1,2} := \Omega_1^*\,\Omega_2 - \int_{3\Delta}^{4\Delta} \Phi_{c_1}^*(t)\Phi_2(t)\,dt,$$

$$\Gamma_{q+1,3} := \Omega_1^*\,\Omega_3, \ ... \ , \ \Gamma_{q+1,q-1} := \Omega_1^*\,\Omega_{q-1}, \ ... \ , \ \Gamma_{2q-1,0} := \Omega_{q-1}^*\,\Omega_0, \ ... \ ,$$

$$\Gamma_{2q-1,q-3} := \Omega_{q-1}^*\,\Omega_{q-3}, \ \Gamma_{2q-1,q-2} := \Omega_{q-1}^*\,\Omega_{q-2} - \int_{q\Delta}^{T} \Phi_{q-1}^*(t)\Phi_{c_{q-2}}(t)\,dt,$$

$$\Gamma_{2q-1,q-1} := \Omega_{q-1}^*\,\Omega_{q-1} + \int_{q\Delta}^{T} \Phi_{q-1}^*(t)\Phi_{q-1}(t)\,dt.$$

Уравнение (2.3) разрешимо тогда и только тогда, когда [2]

$$P_{\Gamma^*}\,\lambda = 0; \tag{2.4}$$

здесь

$$\lambda := \ \mathrm{col}\left(\ \lambda_0 \ \ \lambda_1 \ \ ... \ \ \lambda_{q-1} \ \ \lambda_q \ \ \lambda_{q+1} \ ... \ \lambda_{2q-1}\ \right),$$

$P_{\Gamma^*}: \ \mathbb{R}^{qn+\kappa} \to \mathbb{N}(\Gamma^*)$ — матрица-ортопроектор [2],

$$\lambda_0 := \varphi(\Delta), \quad \lambda_1 := 0, \ ... \ , \ \lambda_{q-1} := 0.$$

При условии (2.4) наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1) представимо в виде

$$z_j^{\dagger}(t) := \Psi_j(t)\gamma_j^{\dagger}, \ t \in [(1+j)\Delta, (2+j)\Delta], \ \gamma_j \in \mathbb{R}^{\mu_j}, \ j = 0, 1, 2, \ldots, \ q-1;$$

здесь $\gamma^{\dagger} = \Gamma^{+}\lambda$. При дополнительном условии $F(\gamma^{\dagger}) = 0$ наилучшее по методу наименьших квадратов приближение $z_1^{\dagger}(t)$ является решением дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1). Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Для фиксированных матриц $\Psi_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, при условии* (2.4) *наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1.1)

$$z^{\dagger}(t) \in \mathbb{C}[0, T] \cap \mathbb{C}^1\Big\{[0, T] \setminus \{j\Delta\}_I\Big\}, \quad j = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ q$$

представимо в виде

$$z^{\dagger}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0; \Delta], \\ z_0^{\dagger}(t), & t \in [\Delta; 2\Delta], \\ \ldots\ldots , & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ z_{q-1}^{\dagger}(t), & t \in [q\Delta; T]. \end{cases}$$

При дополнительном условии $F(\gamma^{\dagger}) = 0$ наилучшее по методу наименьших квадратов приближение $z^{\dagger}(t)$ является решением дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1) *с сосредоточенным запаздыванием.*

Доказанная теорема является обобщением соответствующих утверждений [9,10] на случай нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи с сосредоточенным запаздыванием. С другой стороны, последняя теорема является обобщением соответствующих утверждений [11, 12], полученных для периодических дифференциально-алгебраических краевых задач.

Пример. *Требованиям теоремы удовлетворяет краевая задача для дифференциально-алгебраической системы*

$$A(t)\,\frac{dz(t)}{dt} = B(t)z(t) + C(t)z(t-1) + f(t), \quad t \in [0,4], \quad \ell z(\cdot) = 0 \quad (2.5)$$

с начальной функцией $z(t) = \varphi(t),\ t \in [0,1]$, *где*

$$A(t) := C(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \end{pmatrix}^*, \quad \ell z(\cdot) := M(z(0) - z(4)).$$

Положим

$$\Psi_0(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом условие (2.4) выполнено. Матрицу $\Gamma \in \mathbb{R}^{27\times 18}$ составляют блоки

$$\Gamma_{4,1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 60 & 90 & 140 & 0 & 0 \\ 90 & 200 & 405 & 0 & -60 \\ 140 & 405 & 932 & 0 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & -180 & 0 & 60 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{4,2} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 0 & -60 & -300 & -1140 & 0 & 60 \\ 0 & -90 & -460 & -1785 & 0 & 90 \\ 0 & -140 & -730 & -2886 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{4,3} = 0,$$

$$\Gamma_{5,1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -60 & -90 & -140 & 0 & 0 \\ -300 & -460 & -730 & 0 & 0 \\ -1140 & -1785 & -2886 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 90 & 140 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{5,2} = \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 420 & 1050 & 2660 & 6825 & 0 & 0 \\ 1050 & 3080 & 8925 & 25704 & 0 & -420 \\ 2660 & 8925 & 28364 & 87500 & 0 & -2100 \\ 6825 & 25704 & 87500 & 283056 & 0 & -7980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -420 & -2100 & -7980 & 0 & 420 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{5,3} = \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 0 & -420 & -2940 & -15540 & -73500 & 0 & 420 \\ 0 & -1050 & -7420 & -39585 & -188916 & 0 & 1050 \\ 0 & -2660 & -18970 & -102102 & -491428 & 0 & 2660 \\ 0 & -6825 & -49098 & -266469 & -1292748 & 0 & 6825 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{6,1} = 0,$$

$$\Gamma_{6,2} = \frac{1}{420}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -420 & -1050 & -2660 & -6825 & 0 & 0 \\ -2940 & -7420 & -18970 & -49098 & 0 & 0 \\ -15540 & -39585 & -102102 & -266469 & 0 & 0 \\ -73500 & -188916 & -491428 & -1292748 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 420 & 1050 & 2660 & 6825 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{6,3} = \frac{1}{210}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 1470 & 7770 & 36750 & 0 & -210 \\ 0 & 1470 & 10360 & 55125 & 262416 & 0 & -1470 \\ 0 & 7770 & 55125 & 295218 & 1414140 & 0 & -7770 \\ 0 & 36750 & 262416 & 1414140 & 6814560 & 0 & -36750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & -210 & -1470 & -7770 & -36750 & 0 & 420 \end{pmatrix}.$$

Правую часть $\lambda \in \mathbb{R}^{27}$ уравнения (2.3) определяют векторы

$$\lambda_0 := \varphi(1), \quad \lambda_1 := 0, \quad \lambda_2 := 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -30 \\ -16 \\ 19 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -210 \\ -380 \\ -595 \\ -582 \\ 0 \\ -150 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 0 \\ 210 \\ 1480 \\ 7875 \\ 37488 \\ 0 \\ -150 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, наилучшее по методу наименьших квадратов приближение к решению дифференциально-алгебраической системы (2.5), представимо в виде

$$z_0^\dagger(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 + 4\,t + t^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [1, 2],$$

$$z_1^\dagger(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 19 - 12\,t + 6\,t^2 + t^3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in [2, 3],$$

$$z_2^\dagger(t) = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -167 + 168\,t - 30\,t^2 + 4\,t^3 + t^4 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad t \in [3, 4].$$

Поскольку выполнено условие $F(\gamma^\dagger) = 0$, то наилучшее по методу наименьших квадратов приближение $z^\dagger(t)$ является решением дифференциально-алгебраической краевой задачи (2.5).

Полученные в статье результаты могут быть перенесены на дифференциально-алгебраические краевые задачи с отклонением аргумента общего вида [1, 2, 13], в том числе в случае параметрического резонанса [14,15]. Предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических краевых задач аналогично [7, 16, 17] может быть перенесена также на матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических систем аналогично [18, 19] может быть перенесена на дифференциально-алгебраические краевые задачи в частных производных.

Литература

[1] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1991.

[2] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, (2-th edition), Berlin, Boston, De Gruyter, 2016.

[3] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

[4] Ю. Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Новосибирск, Наук, 1998.

[5] S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Canonical forms and solvable singular systems of diFFerential equations* // SIAM J. Alg. Descrete Methods, (1983), No. 4, 517–521.

[6] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, К., Вища школа, 2000.

[7] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem* // Siberian Mathematical Journal, **56** (2015), No. 4, 752–760.

[8] S. M. Chuiko, *On a reduction of the order in a differential-algebraic system* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **15** (2018), No. 1, 1–17 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **235** (2018), No. 1, 2–14.

[9] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука, 1965.

[10] S. M. Chuiko, *The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **15** (2018), No. 4, 475–489 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **242** (2019), No. 3, 381–392.

[11] Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, *Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием*, К., Изд-во Киев. ун-та, 1969.

[12] S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, *On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case* // Nonlinear Oscillations, **14** (2012), No. 3, 445–460.

[13] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, *Уравнения с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения, **18** (1982), No. 12, 2027–2050.

[14] S. M. Chuiko, D. V. Sysoev, *Periodic Matrix Boundary-Value Problems with Concentrated Delay* // Journal of Mathematical Sciences, **243** (2019), No. 2, 326–336.

[15] С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи с сосредоточенным запаздыванием в случае параметрического резонанса* // Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н. В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.), 287–294.

[16] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation* // Differential Equations, **37** (2001), No. 4, 464–471.

[17] S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **12** (2015), No. 1, 11–26 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **210** (2015), No. 1, 9–21.

[18] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, A. Yefimushkin, *On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **12** (2015), No. 3, 363–389; translation in J. Math. Sci. **214** (2015), No. 2, 200–219.

[19] I. I. Skrypnik, *Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption* // Israel Journal of Mathematics, **215** (2016), No. 1, 163–179.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`