Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 4, 557 – 566

О равностепенной непрерывности семейств обратных отображений римановых многообразий

Денис П. Ильютко, Евгений А. Севостьянов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Изучаются гомеоморфизмы римановых многообразий с неограниченной характеристикой, обратные к которым удовлетворяют неравенству типа Полецкого. Установлено, что их семейства равностепенно непрерывны, если функция Q, относящаяся к неравенству Полецкого и отвечающая за искажение модуля, интегрируема в заданной области, исходное многообразие является связным, а области определения и значения отображений имеют компактные замыкания.

Ключевые слова и фразы. Отображения с ограниченным и конечным искажением, модули семейств кривых, локальное и граничное поведение отображений.

1. Введение

Относительно недавно в работах второго автора получены результаты о локальном поведении отображений евклидового и метрических пространств, обратные к которым искажают модуль семейств кривых некоторым специальным образом (см., напр., [1,2] и [3]). Отметим, что в указанных работах не в полной мере учтена ситуация римановых многообразий, стоящих “между” евклидовым и метрическим случаем. В частности, результаты, относящиеся к метрическим пространствам, связаны с выполнением большого количества условий, выполнение многих из которых для многообразий не требуется. В настоящей работе мы обозначим эти условия, ограничиваясь локальным поведением отображений во внутренних точках заданной

Статья поступила в редакцию 24.02.2019

Исследование первого автора выполнено в рамках гранта НШ-6399.2018.1, соглашение 075-02-2018-867, и гранта РФФИ No 19-01-00775

области. Отметим, что поведение отображений на римановых многообразиях требует применения несколько иных, более тонких подходов, по сравнению как с евклидовым случаем, так и случаем абстрактных метрических пространств.

Всюду далее мы считаем известными основные понятия, касающиеся римановых многообразий (см., напр., [4]). Мы также считаем известными определение модуля $M(\Gamma)$ семейств кривых Γ, включая понятие допустимых функций $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, см. там же. Пусть $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия размерности n с геодезическими расстояниями d и d_*, соответственно,

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{M}^n \,|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\} \ , S(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{M}^n \,|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\} \ ,$$

$dv(\mathbf{x})$ и $dv_*(\mathbf{x})$ — элементы объёма на $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$. Хорошо известно, что любая точка $\mathbf{p}$ риманова многообразия $\mathbb{M}^n$ имеет окрестность $U \ni \mathbf{p}$ (называемую далее *нормальной окрестностью точки* $\mathbf{p}$) и соответствующее координатное отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, так, что геодезические сферы с центром в точке $\mathbf{p}$ радиусом r, лежащие в окрестности U, переходят при отображении φ в евклидовы сферы с тем же радиусом (см. [11, лемма 5.10 и предложение 6.11], см. также комментарии на стр. 77 здесь же). Локальные координаты $\varphi(\mathbf{p}) = (x^1, \ldots, x^n)$ в этом случае называются *нормальными координатами* точки $\mathbf{p}$. Заметим, что в нормальных координатах всегда тензорная матрица $g_{ij}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{p}$ — единичная (а в силу непрерывности g в точках, близких к $\mathbf{p}$, эта матрица сколь угодно близка к единичной; см. [11, пункт (c) предложения 5.11]).

Пусть D — область риманового многообразия $\mathbb{M}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$, $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая относительно меры v функция, и число $r_0 > 0$, таково, что шар $B(\mathbf{x}_0, r_0)$ лежит вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки $\mathbf{x}_0$. Пусть также $0 < r_1 < r_2 < r_0$, $A = A(\mathbf{x}_0, r_1, r_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{M}^n \,|\, r_1 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r_2\}$, $S_i = S(\mathbf{x}_0, r_i)$, $i = 1, 2$, — геодезические сферы с центром в точке $\mathbf{x}_0$ и радиусов r_1 и r_2 соответственно. Если E, $F \subset \mathbb{M}^n$ — произвольные множества и D — множество в $\mathbb{M}^n$, то в дальнейшем через $\Gamma(E, F, D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих множества E и F в D, другими словами, $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in [a,\, b]$.

Определим изучаемый класс отображений следующим образом. Отображение $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ условимся называть *кольцевым Q-отобра-*

жением в точке $\mathbf{x}_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, D\right)\right)\right) \;\leqslant \int\limits_{A\bigcap D} Q(\mathbf{x})\cdot\eta^n(d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0))\;dv(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2)\rightarrow [0,\infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,. \tag{1.2}$$

Отметим, что оценки вида (1.1) являются важнейшим инструментом изучения отображений, в частности, квазиконформных отображений и отображений с конечным искажением (см., напр., [5–10]). Дальнейшее изложение относится к отображениям, обратные к которым удовлетворяют условию (1.1).

Пусть $(X,\,d)$ и (X',d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X\rightarrow X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $\mathbf{x}_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что $d'\left(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)\right)<\varepsilon$ для всех таких $\mathbf{x}\in X$, что $d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<\delta$, и для всех $f\in\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке множества X. Здесь и далее равностепенная непрерывность для семейства отображений $\mathfrak{F}=\{f\colon D_*\rightarrow\mathbb{M}^n\}$ понимается в смысле геодезических расстояний d_* и d на $\mathbb{M}^n_*$ и $\mathbb{M}^n$ соответственно.

Для областей $D\subset\mathbb{M}^n$, $D_*\subset\mathbb{M}^n_*$, $n\geqslant 2$, и произвольной измеримой относительно меры объёма v функции $Q\colon\mathbb{M}^n\rightarrow[0,\infty]$, $Q(x)=0$ при $x\notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D,D_*)$ семейство всех гомеоморфизмов g области D_* на область D, для которых $f=g^{-1}$ является отображением, удовлетворяющим условию (1.1) в каждой точке $\mathbf{x}_0\in D$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, $\overline{D},\overline{D_*}$ — компакты в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ соответственно, при этом, $\overline{D}\neq\mathbb{M}^n$ и многообразие $\mathbb{M}^n$ является связным. Если $Q\in L^1(D)$, т.е. модуль функции Q интегрируем на D, то семейство $\mathfrak{R}_Q(D,D_*)$ равностепенно непрерывно в D_*.*

2. Доказательство теоремы 1.1

Всюду далее мы сохраняем обозначения для сфер $S(\mathbf{x}_0,r)$ и шаров $B(\mathbf{x}_0,r)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, принятых выше для римановых многообразий. Если невозможно недоразумение, то мы также обозначаем модуль семейств кривых в $\mathbb{R}^n$ символом $M(\Gamma)$. Для множеств A и $B\subset \mathbb{M}^n$ полагаем: $d(A,B):=\inf\limits_{\mathbf{x}\in A,\,\mathbf{y}\in B} d(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Пусть I — открытый, замкнутый или полуоткрытый интервал в $\mathbb{R}$. Как обычно, для кривой $\gamma\colon I\rightarrow \mathbb{M}^n$ полагаем: $|\gamma|=\{\mathbf{x}\in \mathbb{M}^n\,|\,\exists\, t\in [a,b]\,:\,\gamma(t)=\mathbf{x}\}$, при этом, $|\gamma|$ называется *носителем* (*образом*) кривой γ. Будем говорить, что кривая γ лежит в области D, если $|\gamma|\subset D$, кроме того, будем говорить, что кривые γ_1 и γ_2 не пересекаются, если не пересекаются их носители. Кривая $\gamma\colon I\rightarrow \mathbb{M}^n$ называется *жордановой дугой* или просто *дугой*, если γ — гомеоморфизм на I. Установим, прежде всего, справедливость следующего результата.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{d}$ *— четыре различные точки области* D *риманового многообразия* $\mathbb{M}^n$, $n\geqslant 2$. *Тогда найдутся непересекающиеся между собой жордановы дуги* $\gamma_1\colon[0,1]\rightarrow D$ *и* $\gamma_2\colon[0,1]\rightarrow D$, *такие, что* $\gamma_1(0)=\mathbf{a}$, $\gamma_1(1)=\mathbf{b}$, $\gamma_2(0)=\mathbf{c}$ *и* $\gamma_2(1)=\mathbf{d}$.

Доказательство. Если $n\geqslant 3$, соединим точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ произвольной жордановой дугой γ_1 в области D, не проходящей через точки $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Тогда γ_1 не разбивает область D как множество топологической размерности 1 (см. [12, следствие 1.5.IV]), что и обеспечивает существование искомой кривой γ_2. Таким образом, в случае $n\geqslant 3$ утверждение леммы 2.1 установлено.

Пусть теперь $n=2$. Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{x}_0\in D$ и некоторую нормальную окрестность U_0 точки $\mathbf{x}_0$, такую что $\partial U_0\ne\varnothing$. Пусть (φ_2, U_0) — нормальные координаты точки $\mathbf{x}_0$, и пусть $0<r_0<d(\mathbf{x}_0,\partial U_0)$. По определению нормальной окрестности, геодезический круг $B(\mathbf{x}_0, r_0)$ отображается при отображении φ_2 на евклидов круг $B(0,r_0):=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\,|\,|\mathbf{x}|<r_0\}$. Положим $F:=\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$. Ввиду [13, лемма 2.6, гл. 5] найдётся гомеоморфизм φ_1 области D на себя, такой, что $\varphi_1(F)\subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$. Пусть также $\varphi_3\colon B(0,r_0)\rightarrow\mathbb{R}^2$ — некоторый гомеоморфизм круга $B(0,r_0)\subset\mathbb{R}^2$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Обозначим $h:=\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1$. Точки $\widetilde{\mathbf{a}}=h(\mathbf{a})$, $\widetilde{\mathbf{b}}=h(\mathbf{b})$, $\widetilde{\mathbf{c}}=h(\mathbf{c})$ и $\widetilde{\mathbf{d}}=h(\mathbf{d})$ лежат в плоскости $\mathbb{R}^2$. Очевидно, существует жорданова кривая $\widetilde{\gamma_1}$, соединяющая точки $\widetilde{\mathbf{a}}$ и $\widetilde{\mathbf{b}}$ в $\mathbb{R}^2$, не проходящая через точки $\widetilde{\mathbf{c}}$ и $\widetilde{\mathbf{d}}$. Ввиду [14, теорема 5.2, гл. II] найдётся кривая $\widetilde{\gamma_2}$, соединяющая точки $\widetilde{\mathbf{c}}$ и $\widetilde{\mathbf{d}}$ в $\mathbb{R}^2$, не пересекающая $\widetilde{\gamma_1}$. В таком случае, положим $\gamma_1:=h^{-1}(\widetilde{\gamma_1})$ и $\gamma_2:=h^{-1}(\widetilde{\gamma_2})$. Заметим, что кривые γ_1 и γ_2 не пересекаются, соединяют точки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ соответственно, и лежат в области D. Лемма доказана. □

Следующая лемма содержит в себе утверждение о том, что во внутренних точках произвольной области D свойство “слабой плоскости” всегда имеет место (см. также [15, теорема 10.12]).

Лемма 2.2. *Пусть D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$, и $\mathbf{x}_0 \in D$. Тогда существует окрестность $U_0 \subset D$ точки $\mathbf{x}_0$, относительно которой выполнено следующее условие: для каждого $P > 0$ и для любой окрестности $U \subset U_0$ точки $\mathbf{x}_0$ найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки, такая, что $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для произвольных континуумов E, $F \subset D$, пересекающих ∂U и ∂V.*

Доказательство. Пусть U_0 — нормальная окрестность точки $\mathbf{x}_0$, а (U_0, φ) — соответствующие нормальные координаты. Пусть $U \subset U_0$ — произвольная окрестность точки $\mathbf{x}_0$, лежащая в U_0, и $\varepsilon_0 > 0$, таково, что $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) \subset U$. По определению, $\varphi\colon B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм шара $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_0) \subset D$ на шар $B(0, \varepsilon_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| < \varepsilon_0\}$.

Зафиксируем $P > 0$. Пусть c_n — положительная постоянная, определённая в соотношении (10.11) в [15], а число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ настолько мало, что $c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. Положим $\widetilde{U} = \varphi(U)$ и $\widetilde{V} := B(0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| < \varepsilon\}$. Пусть, кроме того, $V := \varphi^{-1}(\widetilde{V})$.

Пусть E, F — произвольные континуумы, пересекающие ∂U и ∂V, тогда также $\varphi(E)$ и $\varphi(F)$ пересекают $S(0, \varepsilon_0)$ и $S(0, \varepsilon)$ (см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). На основании [15, разд. 10.12], получаем:

$$M(\Gamma(\varphi(E), \varphi(F), A)) \geqslant c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P\,,$$

где $A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \varepsilon < |\mathbf{y}| < \varepsilon_0\}$. Так как в нормальных координатах (φ, U) тензорная матрица $g_{ij}(\mathbf{x})$ близка к единичной, отсюда следует, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geqslant M(\Gamma(E, F, \widetilde{A})) \geqslant \widetilde{c}_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > \frac{\widetilde{c}_n}{c_n} \cdot P\,,$$

где $\widetilde{c}_n > 0$ — некоторая положительная постоянная и $\widetilde{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{M}^n \,|\, \varepsilon < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon_0\}$. Доказательство завершено, учитывая, что $P > 0$ — произвольно. □

Доказательство теоремы 1.1. Проведём доказательство от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D_*)$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $\mathbf{y}_0 \in D_*$. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого выполнено следующее условие: для любого $m \in \mathbb{N}$ существует элемент $\mathbf{y}_m \in D_*$, $d_*(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_0) < 1/m$, и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D_*)$, такие, что

$$d(g_m(\mathbf{y}_m), g_m(\mathbf{y}_0)) \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{2.1}$$

Поскольку по условию $\overline{D}$ является компактом, мы можем считать, что последовательности $g_m(\mathbf{y}_m)$ и $g_m(\mathbf{y}_0)$ сходятся при $m \to \infty$ к точкам $\overline{\mathbf{x}_1}$ и $\overline{\mathbf{x}_2} \in \overline{D}$. В силу неравенства (2.1), по непрерывности метрики, $d(\overline{\mathbf{x}_1}, \overline{\mathbf{x}_2}) \geqslant \varepsilon_0$.

Из условия теоремы вытекает, что область D содержит не менее двух точек границы. В самом деле, по условию $\overline{D} \neq \mathbb{M}^n$, поэтому найдётся точка $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{M}^n \setminus \overline{D}$. По условию многообразие $\mathbb{M}^n$ является связным, поэтому точки $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{x}_0$ могут быть соединены кривой в $\mathbb{M}^n$. Каждая такая кривая пересекает ∂D ввиду [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46], поэтому $\partial D \neq \varnothing$. Заметим, что граница области D является множеством, содержащим бесконечное множество точек, так как конечное (или даже счётное) множество не разбивает $\mathbb{M}^n$, см. [12, следствие 1.5.IV]. Пусть $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \partial D$ — две различные точки, не совпадающие ни с $\overline{\mathbf{x}_1}$, ни с $\overline{\mathbf{x}_2}$.

По лемме 2.1 мы можем соединить точки $\mathbf{x}_1$ и $\overline{\mathbf{x}_1}$, а также точки $\mathbf{x}_2$ и $\overline{\mathbf{x}_2}$ непересекающимися кривыми $\gamma_1\colon [1/2, 1] \to \mathbb{M}^n$ и $\gamma_2\colon [1/2, 1] \to \mathbb{M}^n$ соответственно. Пусть $R_1 > 0$, такое, что $\overline{B(\overline{\mathbf{x}_1}, R_1)} \cap |\gamma_2| = \varnothing$, и пусть $R_2 > 0$, таково, что

$$(\overline{B(\overline{\mathbf{x}_1}, R_1)} \cup |\gamma_1|) \cap \overline{B(\overline{\mathbf{x}_2}, R_2)} = \varnothing\,.$$

Поскольку инфинитезимальные шары на многообразии связны, мы можем считать, что $B(\overline{\mathbf{x}_1}, r)$ и $B(\overline{\mathbf{x}_2}, r)$ — линейно связные множества при всяком $r \in [0, \max\{R_1, R_2\}]$. Мы также можем считать, что $g_m(\mathbf{y}_m) \in B(\overline{\mathbf{x}_1}, R_1)$ и $g_m(\mathbf{y}_0) \in B(\overline{\mathbf{x}_2}, R_2)$ при всех $m \geqslant 1$. Соединим точки $g_m(\mathbf{y}_m)$ и $\overline{\mathbf{x}_1}$ кривой $\alpha_m^*\colon [0, 1/2] \to B(\overline{\mathbf{x}_1}, R_1)$, а точку $g_m(\mathbf{y}_0)$ соединим с точкой $\overline{\mathbf{x}_2}$ кривой $\beta_m^*\colon [0, 1/2] \to B(\overline{\mathbf{x}_2}, R_2)$, см. рисунок 1 для иллюстрации.

Положим теперь

$$\alpha_m(t) = \begin{cases} \alpha_m^*(t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_1(t), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad \beta_m(t) = \begin{cases} \beta_m^*(t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(t), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

По построению множества

$$A_1 := |\gamma_1| \cup \overline{B(\overline{\mathbf{x}_1}, R_1)}\,, \quad A_2 := |\gamma_2| \cup \overline{B(\overline{\mathbf{x}_2}, R_2)}$$

не пересекаются, в частности, найдётся $\varepsilon_1 > 0$, такое, что

$$d(A_1, A_2) \geqslant \varepsilon_1 > 0, \text{ где } d(A_1, A_2) = \inf_{x \in A_1, y \in A_2} d(x, y). \tag{2.2}$$

Покроем множество A_1 шарами $B(\mathbf{x}, \varepsilon_1/4)$, $\mathbf{x} \in |\gamma_1|$, где ε_1 — число из соотношения (2.2). Заметим, что $|\gamma_1|$ является компактом в $\mathbb{M}^n$ как непрерывный образ компактного множества $[1/2, 1]$ при отображении γ_1. Тогда по лемме Гейне–Бореля–Лебега найдётся конечное

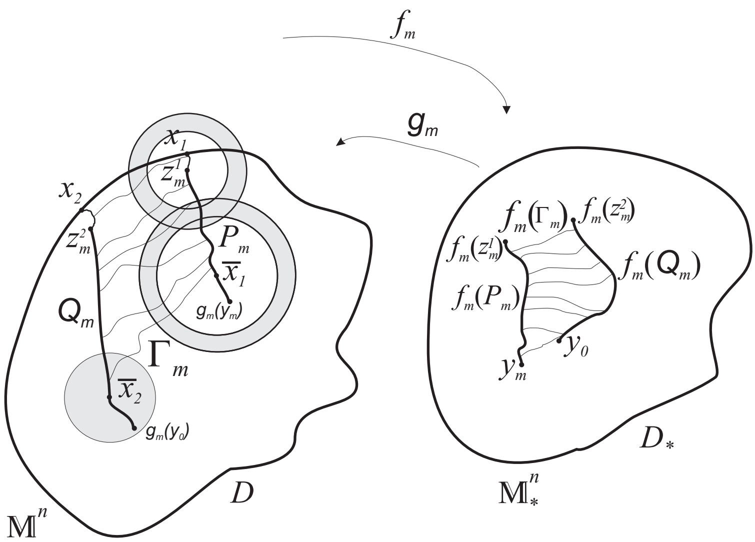

Рис. 1: К доказательству теоремы 1.1

подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{p} B(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4)$ множества A_1, т.е.

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4)\,, \qquad 1 \leqslant p < \infty\,. \tag{2.3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что в (2.3) все элементы $\mathbf{x}_i$ принадлежат области D. В самом деле, если для некоторого $i \in \mathbb{N}$ это не так, то по неравенству треугольника мы можем подобрать $\mathbf{x}_i^* \in D$ и $\varepsilon_1/4 < \varepsilon_* < \varepsilon_1/2$ таким образом, что $B(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4) \subset B(\mathbf{x}_i^*, \varepsilon_*)$. В таком случае, шар $B(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4)$ в (2.3) можно заменить шаром $B(\mathbf{x}_i^*, \varepsilon_*)$.

Пусть

$$t_m = \sup_{t\in[0,1]} \{t : \alpha_m(t) \in D\}\,, \quad p_m = \sup_{t\in[0,1]} \{t : \beta_m(t) \in D\}\,.$$

По построению $\alpha_m(t_m) \in \partial D$ и $\beta_m(p_m) \in \partial D$. Положим

$$\theta_m = \alpha_m|_{[0,t_m)}\,, \qquad \Delta_m = \beta_m|_{[0,p_m)}\,.$$

Положим $f_m := g_m^{-1}$. Поскольку $C(f, \partial D) \subset \partial D_*$, для произвольного гомеоморфизма f области D на D_* (см. [17, предложение 13.5]), где

$$\begin{aligned} &C(f,\partial D) : \\ &\quad = \{\mathbf{y} \in \mathbb{M}_*^n \,|\, \exists\, \mathbf{x}_0 \in \partial D,\, \mathbf{x}_k \in D : \mathbf{x}_k \xrightarrow{d} \mathbf{x}_0,\, f(\mathbf{x}_k) \xrightarrow{d_*} \mathbf{y},\, k \to \infty\}\,, \end{aligned}$$

то найдутся последовательности точек $\mathbf{z}_m^1 \in |\theta_m|$ и $\mathbf{z}_m^2 \in |\Delta_m|$, таких, что $d_*(f_m(\mathbf{z}_m^1), \partial D_*) < 1/m$ и $d_*(f_m(\mathbf{z}_m^2), \partial D_*) < 1/m$. Так как $\overline{D_*}$ — компакт, то можно считать, что $f_m(\mathbf{z}_m^1) \to \mathbf{p}_1 \in \partial D_*$ и $f_m(\mathbf{z}_m^2) \to \mathbf{p}_2 \in \partial D_*$ при $m \to \infty$.

Пусть P_m — часть носителя кривой θ_m в $\mathbb{M}^n$, расположенная между точками $g_m(\mathbf{y}_m)$ и $\mathbf{z}_m^1$, а Q_m — часть носителя кривой Δ_m в $\mathbb{M}^n$, расположенная между точками $g_m(\mathbf{y}_0)$ и $\mathbf{z}_m^2$. По построению $P_m \subset A_1$ и $Q_m \subset A_2$. Положим $\Gamma_m := \Gamma(P_m, Q_m, D)$. Тогда на основании (2.2) и (2.3), а также учитывая [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46], имеем:

$$\Gamma_m > \bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_{im}\,, \tag{2.4}$$

где Γ_{im} определено как семейство тех и только тех кривых $\gamma\colon [0,1] \to D$, таких, что $\gamma(0) \in S(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4)$, $\gamma(1) \in S(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/2)$ и, кроме того, $\gamma(t) \in A(\mathbf{x}_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)$ при $0 < t < 1$. Напомним, что $\Gamma_1 > \Gamma_2$ тогда и только тогда, когда каждая кривая $\gamma_1 \in \Gamma_1$ имеет подкривую $\gamma_2 \in \Gamma_2$, т.е. если $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{M}^n$, то $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{M}^n$, где $[c,d] \subset [a,b]$ и $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ при $t \in [c,d]$. Отметим, что отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ могут быть открытыми (полуоткрытыми) интервалами в данном определении, что зависит от того, какие именно кривые содержатся в семействах Γ_1 и Γ_2.

В соответствии с определением кольцевого Q-отображения в точке $\mathbf{x}_i$, рассмотрим «допустимую» функцию η для семейства Γ_{im}, определённую равенством

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{4}{\varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)\,, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)\,. \end{cases}$$

Отметим, что в силу соотношения (2.4), а также в силу того, что η удовлетворяет соотношению (1.2) при $r_1 = \varepsilon_1/4$ и $r_2 = \varepsilon_1/2$, мы получим, что

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{p4^n}{\varepsilon_1^n} \cdot \|Q\|_1 < \infty\,, \tag{2.5}$$

поскольку $Q \in L^1(D)$, где $\|Q\|_1$ — норма функции Q в $L^1(D)$.

Дальнейшие рассуждения связаны со «слабой плоскостью» внутренних точек области D_*, см. лемму 2.2. Заметим, что $d_*(f_m(P_m)) \geqslant d_*(\mathbf{y}_m, f_m(\mathbf{z}_m^1)) \geqslant (1/2) \cdot d_*(\mathbf{y}_0, \mathbf{p}_1) > 0$ и $d_*(f_m(Q_m)) \geqslant d_*(\mathbf{y}_0, f_m(\mathbf{z}_m^2)) \geqslant (1/2) \cdot d_*(\mathbf{y}_0, \mathbf{p}_2) > 0$, кроме того,

$$d_*(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant d_*(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_0) \to 0, \quad m \to \infty\,.$$

Тогда ввиду леммы 2.2

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(P_m), f_m(Q_m), D_*)) \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

что противоречит соотношению (2.5). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (2.1), что и завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями* // Укр. мат. журнал, **70** (2018), No. 7, 952–967; transl. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions* // Ukr. Math. J., **70** (2018), No. 7, 1097–1114.

[2] E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality* // Ann. Acad. Scie. Fenn. Math. (accepted for print).

[3] E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, N. S. Ilkevych, *On boundary behavior of mappings with two normalized conditions* // Mat. Studii, **49** (2018), No. 2, 150–157.

[4] Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов, *О локальных свойствах одного класса отображений на римановых многообразиях* // Укр. матем. вісник, **12** (2015), No. 2, 210–221; transl. D. P. Il'yutko, E. A. Sevost'yanov, *On local properties of one class of mappings on Riemannian manifolds* // Journal of Mathematical Sciences, **211** (2015), No. 5, 660–667.

[5] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On convergence theorems for space qusiregular mappings* // Forum Math., **10** (1998), 353–375.

[6] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings* // Studia Math., **128** (1998), No. 3, 243–271.

[7] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Укр. мат. вісник, **12** (2015), No. 1, 27–66; transl. in Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 22–51.

[8] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), No. 1, 49–69.

[9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[10] Е. С. Афанасьева, *Обобщенные квазиизометрии на гладких римановых многообразиях* // Матем. заметки, **102** (2017), No. 1, 17–27.

[11] J. M. Lee , *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York, Springer, 1997.

[12] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1948.

[13] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Москва, Мир, 1979.

[14] В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, Москва, МЦНМО, 2004.

[15] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

[16] К. Куратовский, *Топология,* т. 2, М., Мир, 1969.

[17] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York, Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

Сведения об авторах

Денис Петрович Ильютко

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, мехмат факультет,
МГУ имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия
E-Mail: ilyutko@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов

Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com