Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 1, 3 – 29
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-1-1

Задача об экстремальном разбиении комплексной плоскости со свободными полюсами

Александр К. Бахтин, Людмила В. Выговская

(Представлена А. А. Довгошеем)

Аннотация. В данной работе изучается одна известная проблема геометрической теории функций комплексного переменного о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах. Основные результаты данной работы усиливают и обобщают ряд известных результатов, полученных ранее в этой задаче.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, экстремальные задачи о неналегающих областях, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, "управляющий", функционал, проблема В. Н. Дубинина.

Введение

Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1–31]. Многие такие задачи сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областях, удовлетворяющих определенным условиям. Отметим, что теория квадратичных дифференциалов играет существенную роль при решении экстремальных задач, а именно результаты, описывающие локальную и глобальную структуру траекторий квадратичных дифференциалов. Каждой экстремальной задаче в силу известного принципа О. Тейхмюллера соответствует некоторый квадратичный дифференциал (см. [14, с. 49]). До середины 70-х г.г., в большинстве случаев, изучались экстремальные задачи о неналегающих областях, которым

Статья поступила в редакцию 30.06.2019

соответствуют квадратичные дифференциалы с фиксированными полюсами.

После работы П.М. Тамразова [25] внимание многих специалистов геометрической теории функций комплексного переменного сконцентрировалось на исследовании экстремальных задач, которым соответствуют квадратичные дифференциалы, полюсы которых не фиксированы, а имеют определенную свободу. Как известно, экстремальным задачам о неналегающих областях соответствуют квадратичные дифференциалы с полюсами второго порядка.

По-видимому впервые Г.П. Бахтина в работах [7, 8] применила идею “свободных” полюсов экстремальных задач о неналегающих областях. В дальнейшем эти задачи получили название “задачи об экстремальном разбиении комплексной плоскости со свободными полюсами”.

В данной работе изучается одна известная задача об экстремальном разбиении комплексной плоскости. Чтобы ее сформулировать введем необходимые определения.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t+t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ – функция Жуковского. Пусть $r(B,a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1, 12, 13]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z,a)$ области B (см. [1]) соотношением

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Задача 1. (Дубинин В.Н. [12]) Показать, что максимум произведения

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$, – попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, и $0 < \gamma \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k и точек a_k, которые имеют n-кратную симметрию.

Эта проблема изучалась во многих работах (см., например, [1–19]). На данный момент по ней известны только частичные результаты, полностью она не решена.

В 1988 году в работе [11] сформулированная выше задача 1 была решена для значения параметра $\gamma = 1$ и всех значений натурального параметра $n \geqslant 2$. А именно, было показано, что при условиях задачи 1 справедливо неравенство

$$r(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где $d_k,\ D_k,\ k = \overline{0, n},$ – полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Нетрудно показать, что экстремальной конфигурации не существует при $\gamma > n$.

Л.В. Ковалев в 1996 году в работе [19] получил решение проблемы 1 при определенных достаточно жестких ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно, для таких систем точек для которых выполняются следующие неравенства

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ k = \overline{1, n},\ n \geqslant 5.$$

Следует отметить, что результат работы [19] интересен как сам по себе, так и методом исследования. Более того, из метода работы [19] следует, что результат теоремы 4 [11] об оценке функционала (1) имеет место при всех $\gamma \in (0, 1]$. В 2003 году в работе [23] получено решение проблемы 1 при $\gamma \in (0, 1]$ для односвязных областей другим методом.

В монографии [1] 2008 года было показано, что аналог результата В.Н. Дубинина [11, теорема 4] выполняется для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, но начиная с некоторого номера $n_0(\gamma)$.

Весьма интересный результат, полученный в 2013 году в работе [17], который показывает, что, для произвольного $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ существует такой номер $n_0(\alpha)$, что при всех $0 \leqslant \gamma \leqslant n^{\alpha}$ и $n \geqslant n_0(\alpha)$ справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где $d_k,\ D_k,\ k = \overline{0, n},$ — полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

В этой же работе было установлено, что в качестве $n_0(\alpha)$ можно взять величину $\left[e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}}\right]+1$. В работе [18] эта задача решена для $n \geqslant 541$ и $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$, а позднее удалось показать справедливость этого результата для $n \geqslant 126$ при $\gamma \in (0, \sqrt{n}]$ в работе [31]. В 2015 в работе [3] решение задачи 1 получено для $n \geqslant 8$ при $\gamma \in (0, n^{0{,}42}]$, а в работе [5] решение задачи 1 получено для $n \geqslant 12$ при $\gamma \in (0, n^{0{,}45}]$.

Таким образом, на основе усовершенствования метода исследования за 2007–2018 годы удалось получить продвижение в решении этой проблемы [2–5, 17, 18, 29–31].

Обобщенная задача В.Н. Дубинина.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ назовем ***n*-лучевой**, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $\Gamma_k = \Gamma_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в [12, 13]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение Γ_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введем “управляющий” функционал:

$$\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

$$\mathcal{M}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]\prod_{k=1}^{n}|a_k|.$$

В работе [1] был предложен метод “управляющих” функционалов, который позволяет ослабить требования на геометрию расположения систем точек. В связи с исследованиями работы [1] и введением общих n-лучевых систем точек можно рассмотреть обобщенную проблему В.Н. Дубинина. То есть вместо систем различных точек единичной окружности рассматривать n-лучевую систему точек, подчиненную некоторым условиям.

Задача 2. Показать, что максимум функционала (1), где $\gamma \in (0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — n-лучевая система точек такая, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — система непересекающихся областей (то есть $B_p \cap B_j = \varnothing$ при $p \neq j$, $p, j = \overline{0, n}$) таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k и точек a_k, которые имеют n-кратную симметрию.

В работе [4] решение задачи 2 получено для $n \geqslant 5$ при $\gamma \in (0, n^{0,38}]$.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для произвольного $\beta \in (0; \frac{1}{2}]$ существует $n_0(\beta)$ такое, что при всех $n \geqslant n_0(\beta)$ для каждого $\gamma \in (1, n^{\beta}]$, для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1, n})$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2)$$

Знак равенства в неравенстве (2) достигается, когда точки a_k и области B_k, $k = \overline{0, n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим последовательность чисел $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_8$. Пусть $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0,36$, $\beta_3 = 0,44$, $\beta_4 = 0,472$, $\beta_5 = 0,486$, $\beta_6 = 0,493$, $\beta_7 = 0,4982$, $\beta_8 = 0,5$. Введем в рассмотрение полуинтервалы $\triangle_k = (\beta_{k-1}, \beta_k]$, $k = \overline{2, 8}$. Тогда $(0, \frac{1}{2}] = \bigcup\limits_{k=2}^{8} \triangle_k$.

Номер $n_0(\beta)$, указанный в теореме 1, можно конкретизировать следующим образом.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 справедливы утверждения.*
Если $\beta \in \triangle_k$, то $n_0(\beta) = k$, $k = \overline{2, 8}$.

Объединяя результаты двух предыдущих теорем, в качестве следствия получим следующий результат.

Теорема 3. *Для произвольного $\beta \in \triangle_k$ и $n \geqslant k$, $k = \overline{2, 8}$ для каждого $\gamma \in (1, n^{\beta}]$, для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$*

такой, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,n})$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (4)$$

Знак равенства в неравенстве (4) *достигается, когда точки* a_k *и области* B_k, $k = \overline{0,n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \qquad (5)$$

Учитывая, что для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ единичной окружности выполняется условие $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ и $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) = 1$, тогда в качестве следствия теоремы 3 получаем следующий результат в задаче 1:

Теорема 4. *Для произвольного* $\beta \in \triangle_k$ *и* $n \geqslant k$, $k = \overline{2,8}$ *для каждого* $\gamma \in (1, n^{\beta}]$, *для любой* n*-лучевой системы точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,n})$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (6)$$

Знак равенства в неравенстве (6) *достигается, когда точки* a_k *и области* B_k, $k = \overline{0,n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \qquad (7)$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы состоит из рассмотрения двух возможных случаев, а именно: когда $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ и $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$.

Случай I.

Для того, чтобы провести дальнейшие рассуждения, нам нужно исследовать случай когда выполняется соотношение $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$.

При доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи работ [1, 6, 19] и свойства разделяющего преобразования (см., например, [12, 13]).

Аналогично [1], рассмотрим введенную ранее систему функций

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ есть допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k = \overline{0,n}$ относительно углов $\{\Gamma_k\}_{k=1}^n$.

Обозначим $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси.

Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, \quad k = \overline{1,n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{\Gamma_k}.$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [1, 12], получаем неравенства

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (8), (9) полностью исследованы в теореме 1.9 [12].

Аналогично рассуждениям приведенным в [1] при доказательстве теоремы 5.2.1. получаем следующее неравенство для функционала (1)

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Введем в рассмотрение функционал

$$I_3(\sigma)=r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,a_1)r(B_2,a_2),\quad \sigma\in\mathbb{R}^+, \tag{11}$$

где B_0, B_1, B_2 – взаимно непересекающиеся области, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,2}$, $a_0=0$. Учитывая (11), получаем

$$I_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n} I_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

В работе [11], по-видимому, впервые полностью исследована задача о максимуме функционала (11) на тройках произвольных попарно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2 расширенной комплексной плоскости таких, что $a_k\in B_k$, $k=\overline{0,2}$, $a_0=0$, $a_k=(-1)^k i$ и получено следующее неравенство

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)r(B_1,i)r(B_2,-i)$$

$$\leqslant S(\sigma):=2^{\sigma^2+6}\cdot\sigma^{\sigma^2}\cdot(2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2}\cdot(2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2},\quad \sigma\in[0,2]. \tag{13}$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда области B_0, B_1, B_2, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2.$$

Заметим, что функционал (11) при $\sigma > 2$ не ограничен.

Известно [20], что функционал

$$Y_3(t_1, t_2, t_3, D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3) \tag{14}$$

$$= \frac{r^{t_1}(D_1, d_1) \cdot r^{t_2}(D_2, d_2) \cdot r^{t_3}(D_3, d_3)}{|d_1 - d_2|^{t_1+t_2-t_3} \cdot |d_1 - d_3|^{t_1-t_2+t_3} \cdot |d_2 - d_3|^{-t_1+t_2+t_3}},$$

где $t_k \in \mathbb{R}^+$, $\{D_k\}_{k=1}^3$ – произвольная система взаимно неналегающих областей таких, что $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2, 3$, инвариантен относительно всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

При каждом $k = \overline{1, n}$ несложно указать конформный автоморфизм $\zeta = T_k(z)$ плоскости комплексных чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $T_k(0) = 0$, $T_k\left(\omega_k^{(s)}\right) = (-1)^s \cdot i$, $D_k^{(q)} := T_k\left(\Omega_k^{(q)}\right)$, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$, $q = 0, 1, 2$.

Из соотношений (10), (14), получаем

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^n |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad |\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$\tag{16}$$

$$|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Учитывая (14) и (15), имеем следующее соотношение

$$I_n(\gamma)$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k |a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot \left\{ \prod_{k=1}^n Y_3(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Правую часть неравенства (17) обозначим Δ. Тогда

$$\Delta=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{n}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}Y_3(\sqrt{\gamma}\alpha_k,1,1,\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)})\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из соотношений (16) непосредственно вытекает, что

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\cdot|a_k|$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|=2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|.$$

Аналогично предыдущему следует, что

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|}=\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right)^{-1}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\right)^{-1}|a_ka_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}+\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)^{-1}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)}$$

$$=2^{-n}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-1}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)},$$

где $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_0 := \alpha_n$. Далее, непосредственно получаем

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|}\right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}$$

$$= 2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Таким образом, подитоживая все выше сказанное, получим следующее равенство

$$\Delta = 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|$$

$$\times 2^{-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \tag{18}$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n} Y_3(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \cdot \left\{\prod_{k=1}^{n} Y_3(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)})\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда в силу выше указанной конформной инвариантности функционала (14), получаем следующее равенство

$$Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\right)$$

$$= Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right),$$

где $k = \overline{1, n}$ и

$$Y_3\left(\sqrt{\gamma}\alpha_k, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right)$$

$$= \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(D_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(D_k^{(2)}, i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}.$$

Отсюда
$$\Delta = 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot \mathcal{M}^{(\gamma)}\left(A_n\right)$$
$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(D_k^{(1)},-i\right)\cdot r\left(D_k^{(2)},i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$
Из последнего равенства и неравенств (15) и (18), окончательно получаем следующую оценку для функционала (1)
$$I_n(\gamma)\leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$$
$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},-i\right)r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},-i\right)r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$
С учетом условий теоремы 1, получим неравенство
$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},-i\right)r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

При $\gamma\in(0,1]$ из неравенства (19) с учетом (13) мы можем получить следующую оценку
$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}. \quad (20)$$
Для любого $\gamma>1$ неравенство (20), вообще говоря, не имеет места.

Для дальнейшего произведя простые преобразования, получим следующие равенства
$$I_n(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)=\left(r^2\left(B_0,0\right)r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right)\right)^{\frac{\gamma}{2n}}$$
$$\times\left(r^2\left(B_0,0\right)r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_3,a_3\right)\right)^{\frac{\gamma}{2n}}\ldots\left(r^2\left(B_0,0\right)r\left(B_n,a_n\right)r\left(B_1,a_1\right)\right)^{\frac{\gamma}{2n}}$$
$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

При каждом $k = \overline{1,n}$ существует конформный автоморфизм $\widetilde{w} = T(w)$ комплексной плоскости при котором точка $a_0 = 0$ перейдет в точку 0, a_k в i, a_{k+1} в $-i$; причем области $T(B_0) = \widetilde{B_0}$, $T(B_k) = \widetilde{B_k}$, $T(B_{k+1}) = \widetilde{B_{k+1}}$ попарно не пересекаются.

Используя инвариантность функционала (14) при значениях параметров $t_1 = 2$, $t_2 = t_3 = 1$, получаем соотношение

$$\frac{r^2(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1})}{|a_0 - a_k|^2 \cdot |a_0 - a_{k+1}|^2 \cdot |a_k - a_{k+1}|^0}$$
$$= \frac{r^2(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1})}{|a_k|^2 \cdot |a_{k+1}|^2}$$
$$= \frac{r^2(\widetilde{B_0}, 0) \cdot r(\widetilde{B_1}, i) \cdot r(\widetilde{B_2}, -i)}{|-i|^2 \cdot |i|^2}.$$

Используя неравенство (13) и результаты работ [1, 11], имеем неравенство

$$r^2(\widetilde{B_0}, 0) \cdot r(\widetilde{B_1}, i) \cdot r(\widetilde{B_2}, -i) \leqslant r^2(E_0, 0) \cdot r(E_1, i) \cdot r(E_2, -i) \approx 0,4374,$$

где E_0, E_1, E_2 – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4 - \sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2 + 1)^2}\, dw^2,$$

где $\sigma = \sqrt{2}$.

Таким образом, получим

$$r^2(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1}) \leqslant 0,4374 \cdot |a_k|^2 \cdot |a_{k+1}|^2, \quad k = \overline{1,n}.$$

Из условия $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ следует, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$.

Тогда выполняются неравенства

$$I_n(\gamma) \leqslant (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|^4\right)^{\frac{\gamma}{2n}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$
$$\leqslant (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Согласно теореме 5.1.1 [1] справедлива оценка

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathcal{M}^{(0)}(A_n).$$

Отсюда, получаем соотношение

$$I_n(\gamma) \leqslant (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{21}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, то используя неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим приходим к следующему заключению

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \prod_{k=1, k\neq k_0}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha_0 \left(\frac{\sum\limits_{k=1, k\neq k_0}^{n} \alpha_k}{n-1}\right)^{n-1} = \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1},$$

где $\alpha_0 := \alpha_{k_0} := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$. Таким образом, из соотношения (21) получим следующее неравенство для функционала (1)

$$I_n(\gamma) \leqslant (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \tag{22}$$

$$= (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Значение функционала $I_n(\gamma)$, принимаемое на конфигурации, определяемой квадратичным дифференциалом (3), играет фундаментальную роль в дальнейших вычислениях, поэтому проведем вычисление этой величины более подробно далее.

Для дальнейших рассуждений нам нужно вычислить значение величины $I_n^0(\gamma)$ на системе круговых областей квадратичного дифференциала (3) то есть вычислить величину

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где D_k, d_k – круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала (3). Из теории квадратичных дифференциалов [14] следует, что система круговых областей квадратичного дифференциала образует систему неналегающих односвязных областей, причем $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $d_0 = 0$.

Из результатов работ [1, 11, 12, 19] и свойств разделяющего преобразования, имеем

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right)$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Впервые значение для $I_n^0(\gamma)$ получено в работе [11] при $\gamma = 1$, для произвольного γ – в работе [19]. Форма выражения $I_n^0(\gamma)$, которая используется в данной работе, была предложенная в [1].

Пусть

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(D_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, d_k)}\,, \tag{23}$$

$$\tau_n(\gamma) = (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Докажем, что при условиях теоремы выполняется соотношение

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \tau_n(\gamma).$$

С учетом соотношений (22),(23), имеем оценку

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}},$$

где $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}} > \frac{2}{n}$.

Рассмотрим полином

$$P_n(x) = x(2-x)^{n-1}, \quad x \in (0, 2].$$

Полином $P_n(x)$ монотонно возрастает на промежутке $\left(0, \frac{2}{n}\right)$ от значения $P_n(0) = 0$ до $P_n\left(\frac{2}{n}\right)$ и монотонно убывает на отрезке $\left(\frac{2}{n}, 2\right)$ от значения $P_n\left(\frac{2}{n}\right)$ до $P_n(2) = 0$. Таким образом, $P_n(x)$ имеет единственный максимум в точке $x = \frac{2}{n}$ на промежутке $(0, 2)$. Тогда совершенно ясно, что на отрезке $\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \leqslant x \leqslant 2$ $(\gamma \in (1, n))$ справедливо неравенство

$$x(2-x)^{n-1} \leqslant 2^{n-1}\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \tag{24}$$

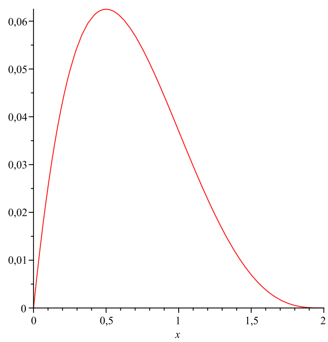

Рис. 1: График функции $y = x(2-x)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}$, $n = 4$

С учетом соотношений (22)–(24), получаем

$$\Lambda_n(\gamma)$$

$$\leqslant \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{25}$$

Далее имеем

$$\Lambda_n(\gamma)$$

$$\leqslant \frac{(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot 4^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)}\cdot n^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}$$

$$= (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot 4^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times 4^{1-n+\gamma-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Итак,

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \tau_n(\gamma).$$

Покажем, что $\tau_n(\gamma)$ монотонна по γ, то есть

$$\tau_n(\gamma_1) < \tau_n(\gamma_2).$$

Обозначим числитель правой части неравенства (25) через $m_n(\gamma)$.

$$m_n(\gamma) = (0,4374)^{\frac{\gamma}{2}} \left[2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\ln(m_n(\gamma)) = \frac{\gamma}{2} \ln 0,4374$$

$$+(1 - \frac{\gamma}{n}) \left[n \ln 4 - \frac{1}{2} \ln \gamma + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) - (n-1) \ln(n-1)\right],$$

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma = \frac{\ln 0,4374}{2} - \ln 4 + \frac{1}{2n} \ln \gamma - \frac{n-1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$$

$$+\frac{n-1}{n} \ln(n-1) + (1 - \frac{\gamma}{n}) \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right).$$

Пусть $n = 2$. Тогда $\beta \in (0; 0,36]$. Справедливо соотношение

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma$$

$$\geqslant \frac{\ln 0,4374}{2} - \ln 4 - \frac{n-1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + (1 - \frac{\gamma}{n}) \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1} - 1\right)$$

$$\geqslant \frac{\ln 0,4374}{2} - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{0,36}}}\right)$$

$$+(1 - \frac{2^{0,36}}{2}) \frac{1}{2 \cdot 2^{0,36}} \left(\frac{1}{\sqrt{2^{0,36}}-1} - 1\right) \geqslant 0,1826 > 0.$$

Таким образом, функция $m_n(\gamma)$ является монотонно возрастающей на всем промежутке $\gamma \in (1, n^\beta]$ для $n = 2$.

Аналогично, при $n = 3$ имеем

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma \geqslant \frac{\ln 0,4374}{2} - \ln 4 - \frac{2}{3} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^{0,44}}}\right)$$

$$+(1-\frac{3^{0,44}}{3})\frac{1}{2\cdot 3^{0,44}}\left(\frac{2}{\sqrt{3^{0,44}}-1}-1\right)-\frac{2}{3}\ln 2\geqslant 0,5827>0.$$

Далее, введем величину $\varkappa_n(\gamma)$.

$$\varkappa_n(\gamma)=\frac{(n-1)}{n}\ln(n-1)-\frac{n-1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)+\left(1-\frac{\gamma}{n}\right)\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}-1}-1\right),$$

$$\varkappa_n^0=\min_{\gamma\in(1,n^{\beta_n}]}\varkappa_n(\gamma).$$

Проводя непосредственные вычисления, составим следующую таблицу

n	4	5	6	7	8	9
$\varkappa_n^0$	2,691989	2,958389	3,186907	3,374850	3,551707	3,952120

Из анализа таблицы получаем, что

$$[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma\geqslant\frac{\ln 0,4374}{2}-\ln 4+\varkappa_n^0>0$$

при всех $n=\overline{4,9}$.

При $n\geqslant 10$ утверждение, что $[\ln(m_n(\gamma))]'_\gamma>0$ становится очевидным, поскольку

$$\frac{(n-1)}{n}\ln(n-1)+\frac{\ln 0,4374}{2}-\ln 4>0.$$

Таким образом, при всех $n\geqslant 2$ и $\gamma\in(1,n^\beta]$ функция $m_n(\gamma)$ монотонно возрастает.

Монотонное убывание величины $I_n^0(\gamma)$ при каждом фиксированном $1\leq\gamma\leq n$ и $n\geqslant 2$ показано в работе [27].

Учитывая, что функция

$$(0,4374)^{\frac{\gamma}{2}}\left[2^n\cdot\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2-\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фиксированном n монотонно возрастает по γ на промежутке $(1;n^\beta]$, а функция $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ на том же промежутке, тогда получаем, что

$$\tau_n(\gamma_1)<\tau_n(\gamma_2).$$

Остается убедиться, что величина

$$\tau_n(\gamma)<1,$$

для всех $\gamma \in (1, n^{\beta}]$.

Рассмотрим величину $\tau_n(n^{\beta})$.

$$\tau_n(n^{\beta}) \leqslant \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

где

$$y_1(n) = (0,4374)^{\frac{n^{\beta}}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{\beta}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}\right]^{n-1-n^{\beta}\frac{n-1}{n}}, \ y_2(n) = \left(n^{1-\beta}\right)^{n^{\beta-1}},$$

$$y_3(n) = \left(1 - n^{\beta-2}\right)^{n+n^{\beta-1}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{\frac{\beta}{2}-1}}{1-n^{\frac{\beta}{2}-1}}\right)^{2n^{\frac{\beta}{2}}},$$

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{\frac{\beta}{2}}}\right)^{1-n^{\beta-1}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{\beta}\frac{n-1}{n}}.$$

Рассмотрим оценку каждого из множителей $y_k(n)$, $k = \overline{1,6}$.

Рассмотрим промежуток $\varkappa_2$. Исследуем поведение функций $y_k(n)$, $k = \overline{1,6}$.

$$y_1(n) = (n)^{-\frac{n^{0,36}}{2}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,36}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{0,18}}\right]^{n-1-n^{0,36}\frac{n-1}{n}},$$

$$y_2(n) = \left(n^{0,64}\right)^{n^{-0,64}},$$

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,64}\right)^{n+n^{-0,64}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,82}}{1-n^{-0,82}}\right)^{2n^{0,18}},$$

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,18}}\right)^{1-n^{-0,64}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,36}\frac{n-1}{n}}.$$

Пусть $n \in [10, \infty)$.

Анализ показывает, что функция $y_1(n)$ монотонно убывает на данном промежутке, поэтому справедливо неравенство

$$y_1(n) < y_1(10) \leqslant 0,004379, \quad n \in [10, \infty).$$

Далее, аналогично рассматриваем функцию $y_2(n)$. Она убывает на промежутке $n \in (5, \infty)$. Отсюда, приходим к выводу, что

$$y_2(n) < y_2(10) \leqslant 1,401573, \quad n \in [10, \infty).$$

Очевидно, что

$$y_3(n) < 1, \quad n \in [10, \infty).$$

Далее, рассмотрим функцию $y_4(n)$. Представим ее следующим образом

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,82}\right)^{n^{0,82} n^{-0,82} 2n^{0,18}} \left(1 - n^{-0,82}\right)^{(-n^{0,82})(n^{-0,82}) 2n^{0,18}}.$$

Поскольку $\left(1 + n^{-0,82}\right)^{n^{0,82}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,82}\right)^{-n^{0,82}} < 3$ при $n \geqslant 10$, тогда

$$y_4(n) \leqslant \tilde{y_4}(n) = (3e)^{2n^{-0,64}}.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и

$$y_4(n) < \tilde{y_4}(10) \leqslant 2,615215, \quad n \in [10, \infty).$$

Исследуя функцию $y_5(x)$ по стандартной схеме получаем, что она убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$. Таким образом,

$$y_5(n) < y_5(10) \leqslant 2,115298, \quad n \in [10, \infty).$$

Для функции $y_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$y_6(n) < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \approx 2,72, \quad n \in [10, \infty).$$

Тогда суммируя все выше сказанное, получаем

$$\tau_n(n^{0,36}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n)$$

$$\leqslant 0,004379 \cdot 1,401573 \cdot 1 \cdot 2,615215 \cdot 2,115298 \cdot 2,72$$

$$\approx 0,092351 < 1,$$

то есть

$$\tau_n(n^{0,36}) < 1 \quad \text{для } n \in [10, \infty).$$

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что $\tau_n\left(n^{0,36}\right) < 1$ для $n \in [2, 9]$.

n	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y_3(n)$	$y_4(n)$	$y_5(n)$	$y_6(n)$	$\Lambda_n\left(n^{0,36}\right)$
2	0,056067	1,329328	0,359825	18,365264	1,571435	1,281903	0,992156
3	0,046702	1,416332	0,532434	8,177054	1,822419	1,506043	0,790404
4	0,035219	1,441028	0,619212	5,515035	1,951598	1,661379	0,561949
5	0,025563	1,444433	0,672454	4,321013	2,024088	1,775234	0,385516
6	0,018211	1,439487	0,709160	3,646863	2,066471	1,862674	0,260959
7	0,012842	1,431123	0,736386	3,213963	2,091391	1,932256	0,175775
8	0,009001	1,421456	0,757605	2,912154	2,105538	1,989167	0,118227
9	0,006285	1,411453	0,774738	2,689388	2,112735	2,036732	0,079536

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных $\beta \in (0,36; 0,5]$.

Рассмотрим последний случай, когда $\beta = 0,5$.

Рассмотрим величину $\tau_n(\gamma)$.

$$\tau_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

где

$$y_1(n) = (0,4374)^{n^{0.5}} \left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1} \left[1 - \frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}},$$

$$y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n-0,5},$$

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}}.$$

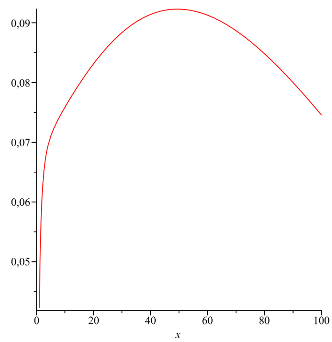

Рис. 2: График функции y_1.

Рассмотрим промежуток $n \in [31, 49]$. Анализ показывает, что функция $y_1(n)$ монотонно возрастает (см. рис. 2) на промежутке $n \in [31, 49]$, а на промежутке $n \in [50, \infty)$ монотонно убывает и достигает максимум $y_1(49) \approx 0,0922852$, поэтому справедливо неравенство

$$y_1(n) < y_1(49) \leqslant 0,0923, \quad n \in [31, 49].$$

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$y_1(n)$	0,0888	0,0892	0,0896	0,0899	0,0902	0,0905	0,0908	0,0910	0,0912
n	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$y_1(n)$	0,0914	0,0916	0,0918	0,0919	0,0920	0,0921	0,0922	0,0922	0,0922

Далее, аналогично рассматриваем функцию $y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}}$. Она убывает на промежутке $n \in (6, \infty)$. Таким образом, $y_2(n) < 1,444611$, $n > 6$. Отсюда, приходим к выводу, что

$$y_2(n) < y_2(31) \leqslant 1,3613, \quad n \in [31, 49].$$

Проводя аналогичные вычисления, имеем

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$y_3(n)$	0,8343	0,8368	0,8391	0,8414	0,8435	0,8456	0,8475	0,8494	0,8512
n	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$y_3(n)$	0,8530	0,8547	0,8563	0,8579	0,8594	0,8609	0,8623	0,8637	0,8651

Очевидно, что

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n + n^{-0,5}} < y_3(49) \leqslant 0,8664, \quad n \in [31, 49].$$

Далее, рассмотрим функцию $y_4(n)$. Представим ее следующим образом

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75} n^{-0,75} 2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75}) 2n^{0,25}}.$$

Поскольку $\left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, то

$$y_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и

$$y_4(n) < y_4(31) \leqslant 2,1249, \quad n \in [31, 49].$$

Исследуя функцию $y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1 - n^{-0,5}}$ по стандартной схеме получаем, что она убывает на промежутке $n \in (8, \infty)$. Таким образом,

$$y_5(n) < y_5(31) \leqslant 1,5419, \quad n \in [31, 49].$$

Для функции $y_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n - 1 - n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 2,6905, \ n \in [31, 49].$$

Тогда суммируя все выше сказанное, получаем

$$\tau_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} y_k(n)$$

$$\leqslant 0,0923 \cdot 1,3613 \cdot 0,8664 \cdot 2,1249 \cdot 1,5419 \cdot 2,6905 \approx 0,959625 < 1,$$

то есть
$$\tau_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{для } n \in [31, 49].$$

Теперь рассмотрим промежуток $n \in [50, \infty)$. Аналогичным образом получаем, что

$$y_1(n) < y_1(50) \leqslant 0,0923, \quad n \in [50, \infty).$$

Далее, аналогично рассматриваем функцию $y_2(n) = \left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}}$. Она убывает на промежутке $n \in (6, \infty)$. Таким образом, $y_2(n) < 1,444611$, $x > 6$. Отсюда, приходим к выводу, что

$$y_2(n) < y_2(50) \leqslant 1,3187, \quad n \in [50, \infty).$$

Очевидно, что

$$y_3(n) = \left(1 - n^{-1,5}\right)^{n + n^{-0,5}} \leqslant 1, \quad n \in [50, \infty).$$

Далее, рассмотрим функцию $y_4(n)$. Представим ее следующим образом

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75} n^{-0,75} 2n^{0,25}} \left(1 - n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75}) 2n^{0,25}}.$$

Поскольку $\left(1 + n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}} < 3$ при $n \geqslant 10$, то
$$y_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и

$$y_4(n) < y_4(50) \leqslant 1,8103, \quad n \in [50, \infty).$$

Исследуя функцию $y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1 - n^{-0,5}}$ по стандартной схеме получаем, что она убывает на промежутке $n \in (8, \infty)$. Таким образом,

$$y_5(n) < y_5(50) \leqslant 1,4199, \quad n \in [50, \infty).$$

Для функции $y_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n - 1 - n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 2,72, \ n \in [50, \infty).$$

Тогда суммируя все выше сказанное, получаем

$$\begin{aligned}\tau_n(n^{0,5}) &= \prod_{k=1}^{6} y_k(n) \\ &\leqslant 0,0923 \cdot 1,3187 \cdot 1 \cdot 1,8103 \cdot 1,4199 \cdot 2,72 \approx 0,850991 < 1,\end{aligned}$$

то есть

$$\tau_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{для } n \in [50, \infty).$$

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что $\tau_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [8, 30]$.

n	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y_3(n)$	$y_4(n)$	$y_5(n)$	$y_6(n)$	$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$
8	0,074165	1,444259	0,685515	4,202238	1,750853	1,829872	0,988581
9	0,075037	1,442249	0,703109	3,858081	1,747160	1,874189	0,961293
10	0,075872	1,439175	0,717848	3,591260	1,740719	1,912446	0,937114
11	0,076680	1,435475	0,730445	3,377884	1,732534	1,945912	0,910335
12	0,077468	1,4314177	0,7413863	3,2030253	1,7232493	1,9755106	0,8964409
13	0,0782372	1,4271714	0,7510127	3,0568729	1,7132898	2,0019350	0,8792146
14	0,0789887	1,4228456	0,7595747	2,9327093	1,7029409	2,0257159	0,8636551
15	0,0797230	1,4185110	0,7672595	2,8257772	1,6923972	2,0472672	0,8495195
16	0,0804396	1,4142135	0,7742110	2,7326114	1,6817928	2,0669174	0,8365996
17	0,0811382	1,4099829	0,7805414	2,6506264	1,6712202	2,0849312	0,8247248
18	0,0818182	1,4058380	0,7863401	2,5778530	1,6607436	2,1015239	0,8137494
19	0,0824791	1,4017904	0,7916792	2,5127640	1,6504071	2,1168736	0,8035511
20	0,0831203	1,3978467	0,7966177	2,4541563	1,6402406	2,1311282	0,7940282
21	0,0837413	1,3940102	0,8012045	2,4010688	1,6302637	2,1444123	0,7850906
22	0,0843418	1,3902814	0,8054801	2,3527240	1,6204889	2,1568314	0,7766648
23	0,0849212	1,4271714	0,8094790	2,3084860	1,6109231	2,1684756	0,7911419
24	0,0854793	1,3831434	0,8132305	2,2678296	1,6015695	2,1794224	0,7610960
25	0,0860158	1,3797296	0,8167593	2,2303167	1,5924286	2,1897388	0,7538503
26	0,0865303	1,3764154	0,8200873	2,1955792	1,5834988	2,1994832	0,7469053
27	0,0870228	1,3731976	0,8232330	2,1633051	1,5747770	2,2087067	0,7402249
28	0,0874931	1,3700725	0,8262129	2,1332284	1,5662591	2,2174541	0,7337784
29	0,0879410	1,3670369	0,8290413	2,1051208	1,5579405	2,2257650	0,7275368
30	0,0883666	1,3640871	0,8317307	2,0787851	1,5498159	2,2336747	0,7214772

Отсюда мы получаем, что $\tau_n(\gamma) < 1$ для всех $n \geqslant 8$ и $\gamma \in (1, n^{0,5}]$.

Таким образом, $\tau_n(\gamma) < 1$ для всех $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (1, n^{\beta}]$.

Случай II.

С учетом всех предыдущих выкладок мы получили, что в случае $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ и $\gamma \in (1, n^{\beta}]$ экстремальные конфигурации отсутствуют при всех $n \geqslant 2$. Остается исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ и $\gamma \in (1, n^{\beta}]$, $n \geqslant 2$. При $n = 2$ и $n = 3$ утверждение теоремы легко получить из результата работы [2]. Поскольку справедливы неравенства $2^{0,36} \leqslant 1,6$ и $3^{0,44} \leqslant 2$, то из работы [2] следует неравенство

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{26}$$

При $n \geqslant 4$ из результата работы [28] следует, что остается только проверить, что условия, наложенные на параметр γ, удовлетворяют условиям теоремы. Так как неравенство $n^{\beta} \leqslant 0,1215n^2$ выполняется при $n \geqslant 4$, то из работы [28] следует неравенство (26).

Таким образом, теорема 1 и теорема 2 доказаны одновременно. Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 1 непосредственно.

Из теоремы 3 следует утверждение.

Следствие 1. [4] *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $\gamma \in (1, n^{0{,}38}]$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mathcal{M}^{(0)}(A_n) \leqslant 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство (4). Знак равенства в неравенстве* (4) *достигается при тех же условиях, что и в теореме 3.*

Из теоремы 4 вытекают следующие следствия.

Следствие 2. [3] *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, $\gamma \in (1, n^{0{,}42}]$. Тогда для любых различных точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство (6). Знак равенства в неравенстве* (6) *достигается при тех же условиях, что и в теореме 4.*

Следствие 3. [5] *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$, $\gamma \in (1, n^{0{,}45}]$. Тогда для любых различных точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство (6). Знак равенства в неравенстве* (6) *достигается при тех же условиях, что и в теореме 4.*

Следствие 4. [31] *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 126$, $\gamma \in (1, \sqrt{n}]$. Тогда для любых различных точек единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство (6). Знак равенства в неравенстве* (6) *достигается при тех же условиях, что и в теореме 4.*

Литература

[1] Бахтин, А.К., Бахтина, Г.П., Зелинский, Ю.Б. (2008). Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України.*

[2] Бахтин, А.К. (2017). Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 14*(1), 25-33.

[3] Бахтин, А.К., Вьюн, В.Е., Таргонский, А.Л. (2015). Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 12*(3), 38-46.

[4] Бахтин, А.К., Денега, И.В. (2013). Об одной проблемме В.Н. Дубинина. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 10*(4-5), 396-406.

[5] Бахтин, А.К., Дворак, И.Я., Денега, И.В. (2015). Разделяющее преобразование в задачах об жекстремальном разбиении комплексной плоскости. *Доповіді НАН України, 12*, 7-12.

[6] Бахтина, Г.П., Бахтин, А.К. (2006). Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях. Комплексний аналіз і течії з вільними границями. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 3*(4), 273-281.

[7] Бахтина, Г.П. (1975). *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях*: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 "Теория функций и функциональный анализ".

[8] Бахтина, Г.П. (1975). Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях. *Укр. мат. журн., 27*(2), 202-204.

[9] Голузин, Г.М. (1966). *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука.

[10] Дубинин, В.Н. (1978). *О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей.* Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев: Наук. думка, 24-31.

[11] Дубинин, В.Н. (1988). Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении. *Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 168*, 48-66.

[12] Дубинин, В.Н. (1994). Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного. *Успехи мат. наук, 49(295)*(1), 3-76.

[13] Дубинин В.Н. (2009). *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток: "Дальнаука" ДВО РАН.

[14] Дженкинс, Дж.А. (1962). *Однолистные функции и конформные отображения.* М.: Изд-во иностр. лит.

[15] Емельянов, Е.Г. (2002). К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей. *Зап. науч. семин. ПОМИ, 286*, 103-114.

[16] Заболотний, Я.В. (2009). Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області. *Доповіді НАН України, 9*, 11-14.

[17] Заболотний, Я.В. (2013). Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині. Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування. *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 10*(4-5),557-564.

[18] Заболотний, Я.В. (2016). Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей. *Доповіді НАН України, 3*, 7-13.

[19] Ковалев, Л.В. (1996). К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. *Дальневосточный матем. сборник, 2*, 96-98.

[20] Колбина, Л.И. (1955). Конформное отображение единичного круга на неналегающие области. *Вестник Ленингр. ун-та, 5*, 37-43.

[21] Кузьмина, Г.В. (1997). Методы геометрической теории функций. I, II. *Алгебра и анализ, 9*(3), 41-103; (5), 1-50.

[22] Кузьмина, Г.В. (2001). Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. *Зап. научн. семин. ПОМИ, 276*, 253-275.

[23] Кузьмина, Г.В. (2003). Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров. *Зап. научн. семин. ПОМИ, 302*, 52-67.

[24] Лаврентьев, М.А. (1934). К теории конформных отображений. *Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, 5*, 159-245.

[25] Тамразов, П.М. (1968). Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. *Известия АН СССР. Серия Мат., 32*(5), 1033-1043.

[26] Bakhtin, A. (2017). Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles. *Ukr. Mat. Bull., 14*(3), 309-329; transl. in (2018). *Journal of Mathematical Sciences, 231*(1), 1-15.

[27] Bakhtin, A. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *Ukr. Mat. Bull., 14*(4), 456-471; transl. in (2018). *Journal of Mathematical Sciences, 234*(1), 1-13.

[28] Bakhtin, A., Vyhivska, L., Denega, I. (2017). N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains. *Lobachevskii Journal of mathematics, 38*(2), 229-235.

[29] Bakthin A., Vyhivska L., Denega I. (2016). Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. *Ukr. Mat. Bull., 13*(1), 68-75; transl. in (2018). *Journal of Mathematical Sciences, 220*(5), 584-590.

[30] Vyhivska, L. (2017). Some inequalities for inner radii of partially overlapping domains. *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 14*(1), 82-89.

[31] Zabolotnii, Ya., Dvorak, I. (2017). Some evaluation of maximum of the product of conformal radii for pairwise non-overlapping domains. *Journal of Mathematical Sciences, 38*(3), 554-559.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `abahtin@imath.kiev.ua`

Людмила Вячеславовна Выговская
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `liudmylavygivska@ukr.net`