Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 1, 41 – 57
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-1-3

Матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном

Ольга В. Нєсмєлова

(Представлена В. Я. Гутлянським)

Анотація. Крайові задачі для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном виникають при вивченні радіальних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними [1–3]. Особливістю різноманітних крайових задач для диференціальних, у тому числі різницевих рівнянь, з p-Лапласіаном є відсутність єдиності розв'язку. У запропонованій статті розглянута крайова задача для лінійної системи диференціальних рівнянь з матричним p-Лапласіаном, яку приведено до традиційної диференціально-алгебраїчної системи з невідомою у вигляді вектор-функції. Розглянуто два випадки отриманої диференціально-алгебраїчної системи, зокрема, випадки розв'язності та нерозв'язності диференціально-алгебраїчної системи відносно похідної. Для обох випадків отримана достатня умова розв'язності матричної крайової задачі для диференціального рівняння з p-Лапласіаном, причому її загальний розв'язок визначає загальний розв'язок для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном та оператор Гріна вихідної матричної крайової задачі. Актуальність вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном пов'язана з численними застосуваннями подібних задач у теорії еластичності, теорії плазми та астрофізиці [3]. Метою даної статті є узагальнення різноманітних крайових задач для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном, яке зберігає особливості розв'язання подібних задач, а саме – відсутність єдиності розв'язку, і, в даному випадку, залежність шуканого розв'язку від довільної функції. Запропонована в статті схема дослідження може бути перенесена на нелінійні матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном, на лінійні матричні крайові задачі для різницевих рівнянь, а також на матричні крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь в абстрактних просторах з p-Лапласіаном, зокрема на матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Запропонована в статті схема дослідження лінійної системи диференціальних рівнянь з матричним p-Лапласіаном детально проілюстрована на прикладах.

2010 MSC. 34B15.

Ключові слова та фрази. Матрична крайова задача для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном, узагальнений оператор Гріна.

1. Постановка задачі

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [4–8]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^2_{\alpha\times\beta}[a,b] := \mathbb{C}^2[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t) \tag{1.1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu} \tag{1.2}$$

з матричним p - Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))'.$$

Тут

$$R(t) \in \mathbb{C}^2_{\gamma\times\alpha}[a,b] := \mathbb{C}^2[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma\times\alpha},$$

$$S(t) \in \mathbb{C}^2_{\beta\times\delta}[a,b] := \mathbb{C}^2[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\beta\times\delta},$$

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma\times\delta},$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \ \mathbb{C}^2[a;b] \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

Взагалі кажучі, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \lambda \neq \mu$ – довільні натуральні числа. Позначимо

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ j = 1, 2, \ \dots, \ \alpha\cdot\beta$$

– природний базис [9] простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому задача про знаходження розв'язків рівняння (1.1) приводить до задачі про знаходження

Стаття надійшла в редакцію 02.01.2020

Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

ISSN 1810 – 3200.

вектора $z(t) \in \mathbb{C}^2_{\alpha\beta}[a;b]$, компоненти якого $z_j(t) \in \mathbb{C}^2[a;b]$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \, \dots \, , \, \alpha \cdot \beta$$

по векторах $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базису простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Визначимо оператор $\mathcal{M}[\mathcal{A}] : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{B} := \mathcal{M}[\mathcal{A}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор [10]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big] : \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Добуток $A(t)Z(t)$ представимо в вигляді

$$A(t)Z(t) := A(t)\sum_{k=1}^{\alpha\beta} \Xi^{(k)} z_k(t), \quad \mathcal{M}\Big[A(t)Z(t)\Big] = \breve{A}(t) \cdot z(t),$$

де

$$\breve{A}(t) := \Big[\breve{A}_k(t)\Big]_{k=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_{\gamma\delta\times\alpha\beta}[a,b], \quad \breve{A}_k(t) = \mathcal{M}\,\Big[A(t)\Xi^{(k)}\Big],$$
$$k = 1, 2, \, \dots \, , \, \alpha \cdot \beta.$$

Визначимо матриці

$$B(t), \ C(t), \ D(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\delta\times\alpha\beta}[a,b]$$

наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial z''}\mathcal{M}\mathcal{P}Z(t) := B(t)z(t), \quad \frac{\partial}{\partial z'}\mathcal{M}\mathcal{P}Z(t) := C(t)z(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}\mathcal{P}Z(t) := D(t)z(t).$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (1.1) приводить до задачі про знаходждення вектора $z(t) \in \mathbb{C}^2_{\alpha\beta}[a;b]$, що визначений системою

$$B(t)z'' + C(t)z' + D(t)z = \breve{A}(t)z + f(t), \quad f(t) := \mathcal{M}F(t),$$

яка, в свою чергу, за допомогою заміни змінних $y_1 := z$, $y_2 := y_1'$, приводить до задачі про знаходження вектора

$$y(t) \in \mathbb{C}^2_{2\alpha\beta}[a;b],$$

визначеного диференціально-алгебраїчною системою рівнянь [6–8]

$$U(t)y' = V(t)y + \check{f}(t); \tag{1.3}$$

тут

$$U(t) := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O_{\alpha\beta} \\ C(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad V(t) := \begin{pmatrix} O_{\alpha\beta} & I_{\alpha\beta} \\ \check{A}(t) - D(t) & O_{\gamma\delta\times\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

$$\check{f}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

2. Випадок розв'язності системи (1.3) відносно похідної

За умови [6–8]

$$P_{U^*(t)}V(t) = 0, \quad P_{U^*(t)}\check{f}(t) = 0, \tag{2.1}$$

у випадку

$$U^+(t)V(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad U^+(t)\check{f}(t) \in \mathbb{C}_{2\,\alpha\cdot\beta}[a;b],$$
$$P_{U_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2\,\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{2.2}$$

система (1.3) розв'язна відносно похідної [6–8]:

$$y' = W(t)y + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)). \tag{2.3}$$

Тут

$$W(t) := U^+(t)V(t), \quad \mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := U^+(t)\check{f}(t) + P_{U_\varrho}(t)\varphi(t),$$

$P_{U_\varrho}(t)$ – $(2\,\alpha\beta \times \varrho)$– матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(2\,\alpha\beta \times 2\,\alpha\beta)$– матриці-ортопроектора

$$P_U(t) : \mathbb{R}^{2\alpha\beta} \to \mathbb{N}(U(t)).$$

Позначимо $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{dX(t)}{dt} = U^+(t)V(t)X(t), \quad X(a) = I_{2\alpha\beta}$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (2.3). За умови (2.1), (2.2) система (2.3) має розв'язок вигляду

$$y(t,c) = X(t)c + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t),$$

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds, \quad c \in \mathbb{R}^{2\,\alpha\cdot\beta},$$

який визначає розв'язок матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном (1.1)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^{2\,\alpha\cdot\beta}, \tag{2.4}$$

де

$$W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{J}_{\alpha\beta}X(t)c\Big], \quad \mathcal{J}_{\alpha\beta} := [\ I_{\alpha\beta} \ \ O_{\alpha\beta}\ ] \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times 2\,\alpha\cdot\beta}$$

і

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}.$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності задачі Коші для матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном (1.1).

Лема 2.1. *За умов* (2.1), (2.2) *матрична задача Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1) *однозначно розв'язна для довільного початкового значення* $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. *За умов* (2.1), (2.2) *загальний розв'язок* (2.4) *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1) *визначає узагальнений оператор Гріна* $\mathcal{K}[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))](t)$ *задачі Коші* $Z(a) = 0$ *для матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1) *і загальний розв'язок* $W(t,c)$ *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1).

Підставляючи розв'язок матричного рівняння з p - Лапласіаном (1.1) в крайову умову (1.2), приходимо до задачі про знаходження розв'язків матричного рівняння [10]

$$\mathcal{L}W(\cdot,c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2.5}$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (2.1), (2.2) і

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{2.6}$$

розв'язок рівняння (2.5) визначає вектор [10]

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}-$ $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)$ матриця-ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*),$$

де

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{Q}_i\Big]_{i=1}^{2\,\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times 2\,\alpha\cdot\beta}, \quad \mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[X(\cdot)\Xi^{(i)}\Big]\Big\},$$
$$i = 1, 2, \ \dots\ , \ 2\,\alpha\cdot\beta;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(2\,\alpha\cdot 2\,\beta \times \alpha\cdot\beta)-$ матриці-ортопроектора

$$P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{2\,\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}).$$

Таким чином, у критичному випадку, за умов (2.1), (2.2) і (2.6) розв'язок матричної крайової задачі з p-Лапласіаном (1.1), (1.2) має вигляд

$$Z(t,c_r) = W(t,c_r) + G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t), \tag{2.7}$$

$$W(t,c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big],$$

де

$$G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,X(t)\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}$$

$$-\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t).$$

Отже, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної крайової задачі для диференціального рівняння з p-Лапласіаном (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *У критичному випадку* ($P_{Q^*} \neq 0$) *за умов* (2.1), (2.2) *і* (2.6) *розв'язок* (2.7) *матричної крайової задачі з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *визначає узагальнений оператор Гріна* $G[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}](t)$ *матричної крайової задачі з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *і загальний розв'язок* $W(t,c_r)$ *для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2).

Відзначимо, що другий доданок, який скаладає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричної крайової задачі з p - Лапласіаном (1.1) за умов (2.1), (2.2) і $\varrho \neq 0$ залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\varrho\times 1}[a;b]$. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умов (2.1), (2.2) і $\varrho \neq 0$ узагальнений оператор Гріна $G[\,\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\,\mathfrak{A}\,](t)$ матричної крайової задачі з p - Лапласіаном (1.1) за умов (2.1), (2.2) також залежить від функції $\varphi(t)$.

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$), за умов (2.1), (2.2) матрична крайова задача з p - Лапласіаном (1.1), (1.2) розв'язна для довільної функції $F(t)$ і неоднорідності в крайовій умові $\mathcal{A}$. Візначимо, що для квадратної матриці Q умова $P_{Q^*} = 0$ тягне за собою $P_Q = 0$ і рівносильна традиційній вимозі $\det Q \neq 0$. Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок 2.1. *У некритичному випадку* ($P_{Q^*} = 0$) *за умов* (2.1) *і* (2.2) *розв'язок* (2.7) *матричної крайової задачі з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *визначає узагальнений оператор Гріна* $G[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}](t)$ *матричної крайової задачі з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *і загальний розв'язок* $W(t,c_r)$ *для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2).

Приклад 2.1. Досліджуємо задачу про знаходження антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p - Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t), \quad \mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))', \quad t \in [0;e]. \tag{2.8}$$

Тут

$$R(t) := e^{-t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(t) := e^{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (2.8) приводить до задачі про знаходження вектора

$$y(t) \in \mathbb{C}^2_8[0;e],$$

який визначається диференціально-алгебраїчною системою рівнянь (1.3); тут

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

При цьому умови (2.1) і (2.2) виконані; тут

$$P_{U^*(t)} = P_{U(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток

$$U^+(t)V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю

$$X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

і загальний розв'язок

$$W(t,c)=\begin{pmatrix} c_1+c_5\,t & c_3+c_7-c_7\,e^{-t} \\ c_2+c_6\,t & c_4+c_4-c_4\,e^{-t} \end{pmatrix}, \quad c:=\begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_8 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^8$$

задачі Коші $Z(0)=0$ для однорідної частини рівняння (2.8). Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*}=0$, то в задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p - Лапласіаном (2.8) має місце некритичний випадок; тут

$$\mathcal{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{-e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{-e} \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{Q}_r}=\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{e} \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e^{e} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо загальний розв'язок однорідної частини антиперіодичної задачі для системи (2.8)

$$W(t,c_r)=\begin{pmatrix} c_{r_1}\,e & c_{r_3}-c_{r_3}\,e^{e} \\ c_{r_2}\,e & c_{r_4}-c_{r_4}\,e^{e} \end{pmatrix}, \quad c_r:=\begin{pmatrix} c_{r_1} \\ ... \\ c_{r_4} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.$$

Відзначимо, що $\varrho=2\neq 0$, при цьому оператор Гріна задачі Коші $Z(a)=0$ для матричного диференцільного рівняння з p - Лапласіаном (2.8) залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}_{2\times 1}[0;1]$; тут

$$P_{U_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\varphi(t) := 0$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном (2.8)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t + e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

дозволяє перевірити виконання умови (2.6) і визначає узагальнений оператор Гріна антиперіодичної задачі для системи (2.8)

$$G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\left(1-e-e^{-e}\right)}{4+\left(-1+e^{-e}\right)^2} \end{pmatrix}.$$

3. Випадок нерозв'язності системи (1.3) відносно похідної

Припустимо далі, що умову (2.1) не виконано [6–8], тобто або $P_{U^*(t)}V(t) \neq 0$, або $P_{U^*(t)}\check{f}(t) \neq 0$. Тоді задача про знаходження розв'язків рівняння (1.1) за допомогою заміни змінних

$$y_1 := z := \Omega x_1, \quad y_2 := y_1' := \Omega x_1' := \Omega x_2, \quad \Omega \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times\alpha\beta},$$

$$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

приводить до задачі про знаходження вектора $x(t) \in \mathbb{C}^2_{\alpha\beta}[a;b]$, визначеного диференціально-алгебраїчною системою рівнянь [6–8]

$$\check{U}(t)x' = \check{V}(t)x + \check{f}(t); \tag{3.1}$$

тут

$$\check{U}(t) := \begin{pmatrix} \Omega & O_{\alpha\beta} \\ C(t)\Omega & B(t)\Omega \end{pmatrix}, \check{V}(t) := \begin{pmatrix} O_{\alpha\beta} & \Omega \\ (\check{A}(t) - D(t))\Omega & O_{\gamma\delta\times\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

За умов [6–8]

$$P_{\check U^*(t)}\check V(t)=0,\quad P_{\check U^*(t)}\check f(t)=0, \tag{3.2}$$

у випадку

$$\check U^+(t)\check V(t)\in\mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b],\quad \check U^+(t)\check f(t)\in\mathbb{C}_{2\,\alpha\cdot\beta}[a;b],$$
$$P_{\check U_\varrho}(t)\varphi(t)\in\mathbb{C}_{2\,\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{3.3}$$

система (3.1) розв'язна відносно похідної [6–8]:

$$x'=\check W(t)x+\mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)); \tag{3.4}$$

тут

$$\check W(t):=\check U^+(t)\check V(t),\quad \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)):=\check U^+(t)\check f(t)+P_{\check U_\varrho}(t)\varphi(t),$$

$P_{\check U_\varrho}(t)$ – $(2\,\alpha\beta\times\varrho)$– матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(2\,\alpha\beta\times 2\,\alpha\beta)$– матриці-ортопроектора $P_{\check U}(t):\mathbb{R}^{2\alpha\beta}\to\mathbb{N}(\check U(t))$. Умова (3.2) представляє собою, взагалі кажучі, нелінійне рівняння відносно сталої матриці

$$\Omega:=\mathrm{diag}\,\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{\alpha\beta\times\alpha\beta}.$$

Істотна перевага заміни змінної $z:=\Omega x_1$ полягає в тому, що використана в статті [7] заміна

$$Z(t)=\mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r,\quad \mathcal{P}_\ell\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha},\quad \mathcal{P}_r\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

дає можливість знаходження $\alpha^2+\beta^2$ невідомих, що більше

$$\alpha^2+\beta^2>\alpha\beta$$

числа невідомих $\alpha\beta$, які визначаються заміною змінної $z:=\Omega x_1$. Позначимо $\check X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{d\check X(t)}{dt}=\check U^+(t)\check V(t)\check X(t),\quad \check X(a)=I_{2\alpha\beta}$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (3.4). За умови (3.2), (3.3) система (3.4) має розв'язок вигляду

$$x(t,c)=\check X(t)c+K\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](t),\quad c\in\mathbb{R}^{2\,\alpha\cdot\beta},$$

який визначає розв'язок матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном (1.1)

$$Z(t,c)=\check W(t,c)+\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](t),\quad c\in\mathbb{R}^{2\,\alpha\cdot\beta}, \tag{3.5}$$

де

$$\check{W}(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega\,\mathcal{J}_{\alpha\beta}\check{X}(t)c\Big],\ \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](t)$$
$$:= \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,K\Big[\Omega\,\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}.$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної задачі Коші для диференціального рівняння з p-Лапласіаном (1.1).

Наслідок 3.1. *За умов* (3.2), (3.3) *матрична задача Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном* (1.1) *однозначно розв'язна для довільного початкового значення* $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. *За умов* (3.2), (3.3) *загальний розв'язок* (3.5) *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном* (1.1) *визначає узагальнений оператор Гріна* $\mathcal{K}[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))](t)$ *задачі Коші* $Z(a) = 0$ *для матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном* (1.1) *і загальний розв'язок* $\check{W}(t,c)$ *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном* (1.1).

Підставляючи розв'язок матричного рівняння з p-Лапласіаном (1.1) в крайову умову (1.2), приходимо до задачі про знаходження розв'язків матричного рівняня [10]

$$\mathcal{L}\check{W}(\cdot,c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{3.6}$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умов (2.1), (2.2) і

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{3.7}$$

розв'язок рівняння (3.6) визначає вектор [10]

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, у критичному випадку, за умов (3.2), (3.3) і (3.7) розв'язок матричної крайової задачі з p-Лапласіаном (1.1), (1.2) має вигляд

$$Z(t,c_r) = \check{W}(t,c_r) + G\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t), \quad \check{W}(t,c_r) :=$$
$$:= \mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega\,\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,\check{X}(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big], \tag{3.8}$$

де

$$G\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{\Omega\,\mathcal{J}_{\alpha\beta}\,\check{X}(t)\mathcal{Q}^{+}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-$$

$$-\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\Big](t).$$

Отже, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної крайової задачі для диференціального рівняння з p - Лапласіаном (1.1), (1.2).

Наслідок 3.2. *У критичному випадку* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) *за умов* (3.2), (3.3) *і* (3.7) *розв'язок* (3.8) *матричної крайової задачі з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *визначає узагальнений оператор Гріна* $G[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s));\mathfrak{A}](t)$ *матричної крайової задачі с p - Лапласіаном* (1.1), (1.2) *і загальний розв'язок* $\check{W}(t,c_r)$ *для однорідної частини матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном* (1.1), (1.2).

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$), за умов (3.2), (3.3) матрична крайова задача з p - Лапласіаном (1.1), (1.2) розв'язна для довільної функції $F(t)$ і неоднорідності в крайовій умові $\mathcal{A}$.

Приклад 3.1. Досліджуємо задачу про знаходження антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p - Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t), \quad \mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))', \quad t \in [-1;0]. \tag{3.9}$$

Тут

$$R(t) := e^{-t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(t) := e^{t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язків рівняння (3.9) приводить до диференціально-алгебраїчної системи рівнянь (1.3); тут

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\check{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

При цьому умова (2.1) не виконана; тут

$$P_{U^*(t)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&-1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&1 \end{pmatrix}.$$

Умови (3.2) і (3.3) виконані, наприклад, для матриці

$$\Omega := \mathrm{diag}\,\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_4 \end{pmatrix} := \mathrm{diag}\,\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

при цьому

$$\check{W}(t) := \check{U}^+(t)\check{V}(t) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок

$$W(t,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_2 + c_6 - c_6\, e^{-t} & c_4 + c_8\, t \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$$

задачі Коші $Z(0)=0$ для однорідної частини рівняння (3.9) визначає матриця

$$X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що для обраної матриці Ω загальний розв'язок $W(t,c)$ реально залежить від чотирьох, а не восьми довільних констант. Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*}\neq 0$, то в задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p - Лапласіаном (3.9) має місце критичний випадок; тут

$$\mathcal{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1-e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{Q}^*}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок, що має вигляд однорідної частини задачі про побудову антиперіодичних розв'язків матричного рівняння з p - Лапласіаном (3.9), визначає матриця

$$W(t,c_r)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{r_1}\, e^{-t}\left(e^t-2+e^{1+t}\right) & c_{r_2}(1+2\,t) \end{pmatrix},$$

$$c_r:=\begin{pmatrix} c_{r_1} \\ c_{r_2} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

Відзначимо, що для обраної матриці Ω загальний розв'язок $W(t,c_r)$ однорідної частини антиперіодичної задачі для рівняння (3.9) також залежить від двох, а не шести довільних констант. Оскільки $\varrho=5\neq 0$, то оператор Гріна задачі Коші $Z(a)=0$ для матричного диференціального рівняння з p - Лапласіаном (2.8) залежить від довільної функції $\varphi(t)\in\mathbb{C}_{5\times 1}[-1;0]$; тут

$$P_{\check{U}_\varrho}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\varphi(t) := 0$. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для матричного диференціального рівняння з p-Лапласіаном (3.9)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s))\Big](t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-1-t} + t & 0 \end{pmatrix}$$

дозволяє перевірити виконання умови (3.7) і визначає узагальнений оператор Гріна антиперіодичної задачі для системи (3.9)

$$G\Big[\mathfrak{F}_1(s, \varphi(s)); \mathfrak{A}\Big](t) = \frac{1}{e\,(5 - 2e + e^2)}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 + e - 3\,e^{1-t} + e^{2-t} + 6\,e^{-t} + 5\,et - 2\,e^2 t + e^3 t & 0 \end{pmatrix}.$$

Запропонована в статті схема дослідження матричних крайових задач для диференціальных рівнянь з p-Лапласіаном (1.1), (1.2) аналогічно [11–17] може бути перенесена на матричні крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь в абстрактних просторах. Крім того, запропонована в статті схема дослідження матричних крайових задач для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном (1.1), (1.2) аналогічно [18, 19] може бути перенесена на нелінійні матричні крайові задачі для диференціальних рівнянь з p-Лапласіаном.

Література

[1] Agarwal, R.P., Perera, K., O'Regan, D. (2005). Multiple positive solutions of singular discrete p-Laplacian problems via variational methods. *Advances in Difference Equations, 2*, 93-99.

[2] Clapp, M., Tiwari, S. (2016). Multiple solutions to a pure supercritical problem for the p-Laplacian. *Calc. Var. Partial Differ. Equ., 55*(1).

[3] Li, C., Ge, W. (2003). Existence of positive solutions for p-Laplacian singular boundary value problems. *Indian J. pure and appl. Math., 34*(1), 187-203.

[4] Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program.

[5] Самойленко, А.М., Шкіль, М.І., Яковець, В.П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, К., Вища школа.

[6] Chuiko, S.M. (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210*(1), 9-21.

[7] Chuiko, S.M. (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Mathematical Journal, 56*(4), 752-760.

[8] Chuiko, S.M. (2017). On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences, 220*(5), 591-602.

[9] Воеводин, В.В., Кузнецов, Ю.А. (1984). *Матрицы и вычисления*, М., Наука.

[10] Chuiko, S.M. (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics, 60*(8), 64-73.

[11] Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, (2-th edition), Berlin–Boston, De Gruyter.

[12] Азбелев, Н.В., Максимов, Н.П., Рахматуллина, Л.Ф. (1991). *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, М., Наука.

[13] Boichuk, A.A., Panasenko, E.V. (2009). Boundary-value problems for differential equations in a Banach space. *Nonlinear Oscillations, 12*(1), 15-18.

[14] Панасенко, Е.В., Покутный, А.А. (2016). Краевые задачи для уравнения Ляпунова в банаховом пространстве. *Нелінійні коливання, 19*(2), 240-246.

[15] Чуйко, С.М. (2016). Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения. *Дифференц. уравнения, 52*(11), 1578-1579.

[16] Chuiko, S.M. (2017). On the solvability of a matrix boundary-value problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory", 132*, 139-143.

[17] Chuiko, S.M. (2018). Solvability of linear matrix boundary-value problem. Russian Mathematics, 62(4), 74-85.

[18] Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equations, 37*(4), 464-471.

[19] Чуйко, С.М., Несмелова, О.В. (2019). Метод Ньютона–Канторовича в теории автономных нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса. *Доповіді НАН України, 12*, 3-12.

Відомості про авторів

Ольга Володимирівна Нєсмєлова

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: `star-o@ukr.net`