Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 1, 77 – 94
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-1-6

Про локальні властивості розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі

Руслан Р. Салімов, Марія В. Стефанчук

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Анотація. У роботі досліджується асимптотична поведінка в точці регулярних гомеоморфізмів, які володіють N-властивістю Лузіна. Авторами статті за допомогою ізопериметричної нерівності отримано степеневу оцінку площі образу круга у термінах p-кутової дилатації при $p > 2$. Як наслідок, отримано аналог відомої леми Ікоми-Шварца. Результат узагальнює відому оцінку М.А. Лаврентьєва для площі образу круга при квазіконформних відображеннях.

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ майже скрізь в G. Нагадаємо, що *рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду: $f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z$, де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y, відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом.* Відображення $f : G \to \mathbb{C}$ володіє N-властивістю Лузіна, якщо з умови $|E| = 0$ випливає, що $|f(E)| = 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається регулярним, якщо якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 > 0$ майже скрізь.

Результати застосовуються до регулярних розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі в полярній системі координат (r, θ) наступного вигляду: $f_r = \sigma(re^{i\theta})|f_\theta|^m f_\theta$, яке можна переписати у комплексній формі: $f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + 1} f_z$, де $\sigma\colon D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція, $m \geqslant 0$, а $f_{\overline{z}}$, f_z — частинні похідні відображення f по $\overline{z}$ і z, відповідно. При $m > 0$ дане рівняння є частковим випадком загальної нелінійної комплексної системи рівнянь у частинних похідних. Зауважимо, що при $m = 0$ рівняння зводиться до звичайного лінійного рівняння Бельтрамі $f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z$. Якщо покласти $m = 0$ і $\sigma = -i/|z|$, то ми приходимо до відомої системи Коші-Рімана. У роботі досліджується випадок, коли $m > 0$.

Таким чином, для регулярних гомеоморфних розв'язків класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ вищевказаного рівняння встановлені асимптотичні оцінки степеневого характеру в термінах нижньої границі. Також у роботі отримані точні оцінки площі образу круга та, як наслідок, доведено екстремальний аналог відомої леми Ікоми-Шварца. Побудовані розв'язки, на яких досягаються отримані оцінки.

Стаття надійшла в редакцію 08.02.2020

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключові слова та фрази. Рівняння Бельтрамі, регулярний гомеоморфізм, N-властивість, p-кутова дилатація відображення, регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння.

1. Вступ

Нехай G – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. Нагадаємо, що *рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1.1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y, відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним відношенням рівняння (1.1). Рівняння Бельтрамі (1.1) називається *виродженим*, якщо K_μ є суттєво необмеженою, тобто $K_\mu \notin L^\infty(G)$. Теореми існування гомеоморфних розв'язків класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ були недавно доведені методом модулів для багатьох вироджених рівнянь Бельтрамі, див., наприклад, монографії [1, 3], а також огляди [4, 5].

Нехай $\sigma\colon D \to \mathbb{C}$ – вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{1.2}$$

де f_r і f_θ – частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Враховуючи формули

$$rf_r = zf_z + \overline{z} f_{\overline{z}}\,, \quad f_\theta = i(zf_z - \overline{z} f_{\overline{z}})\,,$$

рівняння (1.2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{1.3}$$

Відмітимо, що подібні нелінійні рівняння зустрічаються у роботі [6], див. теорему 5.7.

ISSN 1810 – 3200. © Інститут прикладної математики і механіки НАН України

При $m = 0$ рівняння (1.3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1.1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i + 1}.$$

Якщо у (1.3) покласти $m = 0$ і $\sigma = -i/|z|$, то ми приходимо до відомої системи Коші–Рімана.

При $m > 0$ рівняння (1.3) є частковим випадком загальної нелінійної комплексної системи рівнянь (7.33), п. 7.7 в [7]. Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Твердження 1.1. *Рівняння* (1.2) *можна записати у вигляді системи з дійсними рівняннями*

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + \mathfrak{R}^m(u,v)\,(\widetilde{\sigma}_1(yu_x - xu_y) - \widetilde{\sigma}_2(yv_x - xv_y)) = 0\,, \\ xv_x + yv_y + \mathfrak{R}^m(u,v)\,(\widetilde{\sigma}_1(yv_x - xv_y) + \widetilde{\sigma}_2(yu_x - xu_y)) = 0\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Тут $\widetilde{\sigma}_1 = r\,\mathrm{Re}\,\sigma$, $\widetilde{\sigma}_2 = r\,\mathrm{Im}\,\sigma$ *і*

$$\mathfrak{R}(u,v) = \left((yu_x - xu_y)^2 + (yv_x - xv_y)^2\right)^{1/2}\,.$$

Доведення. Дійсно, оскільки

$$rf_r = x\,f_x + y\,f_y$$

і

$$f_\theta = -yf_x + xf_y\,,$$

то рівняння (1.2) можна записати у вигляді

$$(x + \widetilde{\sigma}y\,|yf_x - xf_y|^m)\,f_x + (y - \widetilde{\sigma}x\,|yf_x - xf_y|^m)\,f_y = 0\,,$$

де $\widetilde{\sigma} = r\,\sigma$.

Враховуючи рівності $f = u + iv$ і $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_1 + \widetilde{\sigma}_2 i$, останнє рівняння можна записати так:

$$(x + (\widetilde{\sigma}_1 + i\widetilde{\sigma}_2)y\,|yf_x - xf_y|^m)\,(u_x + iv_x)$$
$$+\,(y - (\widetilde{\sigma}_1 + i\widetilde{\sigma}_2)x\,|yf_x - xf_y|^m)\,(u_y + iv_y) = 0\,.$$

Тут $\widetilde{\sigma}_1 = r\,\mathrm{Re}\,\sigma$, $\widetilde{\sigma}_2 = r\,\mathrm{Im}\,\sigma$.

Таким чином, маємо

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + |yf_x - xf_y|^m\,(\widetilde{\sigma}_1 yu_x - \widetilde{\sigma}_2 yv_x - \widetilde{\sigma}_1 xu_y + \widetilde{\sigma}_2 xv_y) = 0\,, \\ xv_x + yv_y + |yf_x - xf_y|^m\,(\widetilde{\sigma}_2 yu_x + \widetilde{\sigma}_1 yv_x - \widetilde{\sigma}_2 xu_y - \widetilde{\sigma}_1 xv_y) = 0\,. \end{cases}$$

Враховуючи рівність

$$|yf_x - xf_y| = |y(u_x + iv_x) - x(u_y + iv_y)| = \sqrt{(yu_x - xu_y)^2 + (yv_x - xv_y)^2}\,,$$

отримаємо систему рівнянь (1.4). □

Нелінійне рівняння (1.3) є частковим випадком нелінійної системи двох дійсних рівнянь у частинних похідних див. (1) у [8, 9], див. також [10]. Відмітимо, що нелінійні системи рівнянь у частинних похідних зараз, як і раніше, вивчаються у різноманітних аспектах, див., наприклад, [6–21].

2. Допоміжні леми

Нагадаємо деякі означення. Відображення $f\colon G\to\mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0\in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2\neq 0$ (див., наприклад, I. 1.6 в [22]). Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f>0$ м.с.

Відмітимо, що регулярні гомеоморфізми є підкласом відображень зі скінченним спотворенням, які вивчалися багатьма авторами, див., наприклад, роботи [23–37]. Відображення $f\ :\ G\ \to\ \mathbb{C}$ володіє N*-властивістю* (Лузіна), якщо з умови $|E|=0$ випливає, що $|f(E)|=0$.

Всюди далі будемо вважати, що

$$B_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r\}\,,\quad \gamma_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}\,,\mathbb{B}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$, $p>1$. Будемо називати *p-кутовою дилатацією* відображення f відносно точки $z_0=0$ величину:

$$D_p(z)=D_p(re^{i\theta})=\frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^pJ_f(re^{i\theta})}.$$

Тут $z=re^{i\theta}$, J_f – якобіан відображення f. Для $z=0$ і $r\in(0,1)$ позначимо

$$d_p(r)=\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\gamma_r}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,ds\right)^{p-1}.$$

При $p=2$ кутова дилатація використовувалася при дослідженні локальних властивостей квазіконформних відображень, див. [38–43]. Відомо, що кутова дилатація у точках регулярності співпадає з дотичною дилатацією, див. п. 6.1 і лему 6.1 в [1], яка надалі використовувалася при дослідженні локальної та межової поведінки гомеоморфних розв'язків з узагальненими похідними та у задачі Діріхле для рівнянь Бельтрамі з виродженням, див. [46, 47].

Позначимо через $L(r)$ довжину кривої $f(re^{i\theta})$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, а через $S(r)=|f(B_r)|$ – площу множини $f(B_r)$. У наступному твердженні наведено диференціальну нерівність для функції $S(r)$, див. лему 1 у [48], див. лемму 2.1 у [21].

Твердження 2.1. *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, який володіє N-властивістю, та $p>1$. Тоді*

$$S'(r)\geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\, r^{1-p}\, d_p^{-1}(r)\, S^{\frac{p}{2}}(r) \tag{2.1}$$

для м.в. (майже всіх) $r\in[0,1)$.

У наступній лемі дається степенева оцінка зверху площі образу круга для регулярних гомеоморфізмів, які володіють N-властивістю.

Лема 2.1. *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, який володіє N-властивістю, $p>2$. Якщо для деяких чисел $\lambda>1$, $\tau>0$ і $C_0>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\tau}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}\,d_p(r)}\geqslant C_0 \tag{2.2}$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$S(\varepsilon)\leqslant \pi\,(p-2)^{-\frac{2}{p-2}}C_0^{-\frac{2}{p-2}}\,\varepsilon^{\frac{2\tau}{p-2}} \tag{2.3}$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Відмітимо, що вперше верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях зустрічається у монографії М. А. Лаврентьєва, див. лему 1, с. 80 в [10]. У монографії [38], див. твердження 3.7, отримано уточнення нерівності Лаврентьєва у термінах кутової дилатації. Також раніше у роботах [49,50] були отримані верхні оцінки спотворення площі круга для кільцевих та нижніх Q-гомеоморфізмів.

Доведення. Використовуючи твердження 2.1 маємо

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{p}{2}}(r)}\,dr\geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\,\frac{dr}{r^{p-1}\,d_p(r)} \tag{2.4}$$

для м.в. $r\in[0,1)$. Далі, інтегруючи обидві частини останньої нерівності по $r\in(\varepsilon,\lambda\varepsilon)$, отримуємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}\right)'dr\geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}\,d_p(r)}\,. \tag{2.5}$$

Відмітимо, що функція $g_p(r)=\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}$ є неспадною, тоді

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}\right)'dr=\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}g'_p(r)\leqslant g_p(\lambda\varepsilon)-g_p(\varepsilon)=$$

$$=\frac{2}{p-2}\left(S^{\frac{2-p}{2}}(\varepsilon)-S^{\frac{2-p}{2}}(\lambda\varepsilon)\right)\tag{2.6}$$

(див. теорему IV. 7.4 в [51]). Комбінуючи нерівності (2.5) і (2.6), маємо

$$S^{\frac{2-p}{2}}(\varepsilon)\geqslant S^{\frac{2-p}{2}}(\varepsilon)-S^{\frac{2-p}{2}}(\lambda\varepsilon)\geqslant\pi^{\frac{2-p}{2}}(p-2)\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}\,d_p(r)}\,.$$

Звідси, враховуючи умову (2.2), отримуємо оцінку (2.3). □

Наступний результат є аналогом відомої леми Ікоми–Шварца про оцінку нижньої границі, див. теорему 2 в [52].

Лема 2.2. *Нехай $p>2$ і $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, який володіє N-властивістю і $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $\lambda>1$, $\tau>0$ і $C_0>0$ виконується умова*

$$\varepsilon^{\tau}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}\,d_p(r)}\geqslant C_0\tag{2.7}$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, то

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{p-2}}}\leqslant C_0^{-\frac{1}{p-2}}(p-2)^{-\frac{1}{p-2}}<\infty\,.$$

Доведення. Покладемо $l_f(\varepsilon)=\min\limits_{|z|=\varepsilon}|f(z)|$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тоді, враховуючи, що $f(0)=0$, отримуємо $\pi l_f^2(\varepsilon)\leqslant S(\varepsilon)$, і, відповідно, $l_f(\varepsilon)\leqslant\sqrt{\frac{S(\varepsilon)}{\pi}}$. Таким чином, враховуючи лему 1, маємо

$$\liminf_{z\to0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{p-2}}}=\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{l_f(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{\tau}{p-2}}}\leqslant\liminf_{\varepsilon\to0}\sqrt{\frac{S(\varepsilon)}{\pi\varepsilon^{\frac{2\tau}{p-2}}}}\leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-\frac{1}{p-2}}(p-2)^{-\frac{1}{p-2}}<\infty\,.$$

□

Наслідок 2.1. *Нехай $p > 2$ і $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, який володіє N-властивістю, і $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $d_0 > 0$ і $\beta \in [0, p-2)$ виконується умова*

$$d_p(r) \leqslant d_0 r^{-\beta} \tag{2.8}$$

для м.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{p-\beta-2}{p-2}}} \leqslant \nu_0\, d_0^{\frac{1}{p-2}}\,, \tag{2.9}$$

де ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від β і p.

Доведення. Нехай $\lambda = 2$ і $\tau = p-\beta-2$. З умови (2.8) випливає оцінка:

$$\varepsilon^{p-\beta-2}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)} \geqslant \varepsilon^{p-\beta-2}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dr}{d_0\, r^{p-\beta-1}} = \frac{2^{2+\beta-p}-1}{d_0(2+\beta-p)}\,.$$

Застосовуючи лему 2.2 з параметрами $\lambda = 2$, $\tau = p-\beta-2$ і $C_0 = \frac{2^{2+\beta-p}-1}{d_0(2+\beta-p)}$, отримуємо оцінку (2.9). $\square$

При $\beta = 0$ із наслідку 2.1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Наслідок 2.2. *Якщо для деякого числа $d_0 > 0$ виконується умова $d_p(r) \leqslant d_0$ для м.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \nu_0\, d_0^{\frac{1}{p-2}}\,,$$

де ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від параметра p.

Лема 2.3. *Нехай $p > 2, \alpha > \frac{2}{p-2}$ і $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфізм класу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, який володіє N-властивістю, і $f(0) = 0$. Якщо $D_p(z) \in L^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_{r_0}), r_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\kappa}} \leqslant \nu_0\, \|D_p\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-2}}\,, \tag{2.10}$$

де $\kappa = 1 - \frac{2}{\alpha(p-2)}$, $\|D_p\|_\alpha = \left(\int\limits_{B_{r_0}} D_p^{\alpha}(z)\, dxdy\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ і ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від p і α.

Доведення. Нехай $0<\varepsilon<r_0<\frac{1}{2}$. Відмітимо, що

$$\varepsilon=\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\left(r^{p-1}d_p(r)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{dr}{\left(r^{p-1}d_p(r)\right)^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\varepsilon=\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\left(r^{p-1}d_p(r)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{dr}{\left(r^{p-1}d_p(r)\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}r\,d_p^{\frac{1}{p-1}}(r)\,dr\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}d_p(r)}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.11}$$

За теоремою Фубіні маємо рівність

$$\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}r\,d_p^{\frac{1}{p-1}}(r)\,dr=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\int\limits_{\gamma_r}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,ds\,dr=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{A}}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\,.$$

Тут і всюди далі $\mathbb{A}=\{z\in\mathbb{C}:\ \varepsilon\leqslant|z|\leqslant 2\varepsilon\}$.

Застосовуючи ще раз нерівність Гельдера з показниками $q=\alpha(p-1)>1$ і $q'=\frac{\alpha(p-1)}{\alpha(p-1)-1}$, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{A}}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\mathbb{A}}D_p^{\alpha}(z)\,dxdy\right)^{\frac{1}{\alpha(p-1)}}\left(4\pi\varepsilon^2\right)^{\frac{\alpha(p-1)-1}{\alpha(p-1)}}.$$

Отже, маємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}r\,d_p^{\frac{1}{p-1}}(r)\,dr=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{A}}D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,dxdy\leqslant c_1\,\|D_p\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-1}}\,\varepsilon^{\frac{2(\alpha(p-1)-1)}{\alpha(p-1)}}, \tag{2.12}$$

де c_1 – додатна стала, яка залежить тільки від p і α.

Комбінуючи (2.11) і (2.12), отримуємо

$$\varepsilon^{\frac{\alpha(p-2)-2}{\alpha}}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dr}{r^{p-1}d_p(r)}\geqslant\frac{c_2}{\|D_p\|_{\alpha}}\,,$$

де c_2 – додатна стала, яка залежить тільки від p і α.

Застосовуючи лему 2.2 з параметрами $\tau=\frac{\alpha(p-2)-2}{\alpha}$ і $C_0=\frac{c_2}{\|D_p\|_{\alpha}}$, отримуємо оцінку (2.10). □

3. Застосування до нелінійних рівнянь Бельтрамі

У даному розділі наведено ряд теорем про асимптотичну поведінку регулярних гомеоморфних розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі вигляду (1.3).

Означення 3.1. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (1.3) *будемо називати регулярний гомеоморфізм* $f\colon G \to \mathbb{C}$, *який м.с. у* G *задовольняє рівняння* (1.3).

Теорема 3.1. *Нехай* $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *– регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболєва* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$. *Якщо для деяких чисел* $\lambda > 1$, $\tau > 0$ *і* $C_0 > 0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^{\tau} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r} (\mathrm{Im}\,\overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}}\, ds\right)^{m+1}} \geqslant C_0 \tag{3.1}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{m}}} \leqslant C_0^{-\frac{1}{m}}\, m^{-\frac{1}{m}}\,. \tag{3.2}$$

Доведення. Нехай $p = m + 2$. Зауважимо, що згідно наслідку B із роботи [2] гомеоморфізм $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ володіє N-властивістю. Далі, враховуючи те, що f – регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.2), знаходимо

$$J_f(z) = J_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r}\,\mathrm{Im}(\overline{f}_r\, f_\theta) = \frac{1}{r}\,|f_\theta|^{m+2}\,\mathrm{Im}\,\overline{\sigma} > 0 \quad \text{м.с.}$$

і

$$D_p(z) = D_p(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^{m+2}}{r^{m+2}\, J_f(re^{i\theta})} = \frac{1}{r^{m+1}\mathrm{Im}\,\overline{\sigma}}.$$

Тоді умову (2.7) леми 2.2 можна записати у вигляді (3.1). Таким чином, з леми 2.2 отримуємо оцінку (3.2). □

Приклад 1. Припустимо, що $m > 0$ і $\tau > 0$. Розглянемо рівняння

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\tau\,|z|^{-\tau}\,|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - m}{\tau\,|z|^{-\tau}\,|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + m}\, f_z \tag{3.3}$$

в одиничному крузі $\mathbb{B}$. Перепишемо це рівняння у полярній системі координат

$$f_r = -\frac{\tau}{m}\, i\, r^{-\tau-1}\,|f_\theta|^m\, f_\theta. \tag{3.4}$$

Легко перевірити, що $f = r^{\frac{\tau}{m}} e^{i\theta}$ є розв'язком рівняння (3.4).

Відмітимо, що коефіцієнт $\sigma = -\frac{\tau}{m}\, i\, r^{-\tau-1}$ задовольняє умову (3.1). Таким чином, умови теореми 3.1 виконані. З іншого боку, легко бачити, що $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{m}}} = 1$.

Приклад 2. Розглянемо у полярній системі координат рівняння

$$f_r = -\frac{i}{mr}|f_\theta|^m f_\theta, \quad 0 < m < 2\,. \tag{3.5}$$

Легко перевірити, що $f = e^{i\theta} \ln^{-1/m}\left(\frac{e}{r}\right)$ є розв'язком рівняння (3.5). Відмітимо, що коефіцієнт $\sigma = -\frac{i}{mr}$ ні при яких значеннях $\lambda > 1$, $\tau > 0$ і $C_0 > 0$ не задовольняє умову (3.1). З іншого боку, легко бачити, що $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\beta}} = \infty$ для довільного $\beta > 0$.

Теорема 3.2. *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (1.3) *класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $A > 1$ і $c_0 > 0$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r} (\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}}\, ds\right)^{m+1} \leqslant c_0\, r^A \tag{3.6}$$

для м.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}} \leqslant \nu_0\,, \tag{3.7}$$

де ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від m, c_0 і A.

Доведення. Нехай $\lambda = 2$ і $\tau = A - 1$. З умови (3.6) випливає оцінка:

$$\varepsilon^\tau \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dr}{\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r} (\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}}\, ds\right)^{m+1}} \geqslant \varepsilon^{A-1}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dr}{c_0\, r^A} = \frac{1 - 2^{1-A}}{c_0(A-1)}\,.$$

Застосовуючи теорему 3.1 з параметрами $\lambda = 2$, $\tau = A - 1$ і $C_0 = \frac{1-2^{1-A}}{c_0(A-1)}$, отримуємо оцінку

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}} \leqslant \left(\frac{c_0(A-1)}{m(1-2^{1-A})}\right)^{\frac{1}{m}}\,.$$

□

Наслідок 3.1. *Якщо для деякого числа $c_0 > 0$ виконується умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}(\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1}\leqslant c_0\,r^{m+1}$$

для м.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant \nu_0\,,$$

де ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від m і c_0.

Наслідок 3.2. *Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0)=0$. Якщо для деяких чисел $A>1$ і $c_0>0$ виконується умова*

$$\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\geqslant c_0\,|z|^{-A}$$

для м.в. $z\in B_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}}\leqslant \nu_0\,,$$

де ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від m і c_0.

Наслідок 3.3. *Якщо для деякого числа $c_0 > 0$ виконується умова*

$$\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\geqslant c_0\,|z|^{-(m+1)}$$

для м.в. $z\in B_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|}\leqslant \nu_0\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m і c_0.

Приклад 3. Припустимо, що $m>0$. Розглянемо рівняння

$$f_{\overline{z}}=\frac{z}{\overline{z}}\,\frac{(1+2i)|z|^{-m}|zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}|^m-1}{(1+2i)|z|^{-m}|zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}|^m+1}\,f_z. \tag{3.8}$$

Покажемо, що $f=ze^{2i\ln|z|}$ є розв'язком рівняння (3.8). Дійсно, перепишемо рівняння у полярній системі координат

$$f_r=(2-i)r^{-(m+1)}|f_\theta|^m\,f_\theta\,, \tag{3.9}$$

звідси видно, що $\sigma = (2-i)r^{-(m+1)}$. Для $f = re^{2i\ln r}e^{i\theta}$ маємо

$$f_r = (1+2i)e^{2i\ln r}e^{i\theta},\ f_\theta = ire^{2i\ln r}e^{i\theta}\,,\ |f_\theta| = r\,.$$

Підставляючи знайдені частинні похідні у рівняння (3.9), переконуємося, що $f = re^{2i\ln r}e^{i\theta}$ є його розв'язком. Відмітимо, що коефіцієнт $\sigma = (2-i)r^{-(m+1)}$ задовольняє умову (3.1). Таким чином, всі умови теореми 3.1 виконуються. З іншого боку, легко бачити, що $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} = 1\,.$

Наступна теорема є наслідком леми 2.3.

Теорема 3.3. *Нехай $f\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ – регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1.3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$, $\alpha > \frac{2}{m}$. Якщо виконується умова*

$$J = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\alpha(m+1)}\,(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma})^{\alpha}} < \infty$$

для деякого $r_0 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, то

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\kappa}} \leqslant \nu_0 J^{\frac{1}{m}}\,,$$

де $\kappa = 1 - \frac{2}{\alpha m}$ і ν_0 – додатна стала, яка залежить тільки від m і α.

Зауваження 3.1. У випадку прикладу 2, легко перевірити, що для кожного $\alpha > \frac{2}{m}$

$$J = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\alpha(m+1)}\,(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma})^{\alpha}} = \infty\,.$$

Якщо $\alpha = \frac{2}{m}$, то $J=\infty$. З іншого боку, легко бачити, що в обох випадках $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\beta}} = \infty$ для довільного $\beta > 0$.

4. Точні оцінки

Нехай $A>1$, $c_0>0$ і H – множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$, які задовольняють рівнянню (1.3), $f(0)=0$ і

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r} (\mathrm{Im}\,\overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}}\,ds\right)^{m+1} \leqslant c_0\,r^{A} \qquad (4.1)$$

для м.в. $r\in[0,1)$.

Теорема 4.1. *Якщо $f \in H$ і $r \in [0,1)$, то справедлива точна оцінка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(\frac{m}{c_0(A-1)r^{A-1}} + 1 - \frac{m}{c_0(A-1)} \right)^{-\frac{2}{m}} . \tag{4.2}$$

Знак рівності досягається на відображенні

$$f_*(z) = \left(\frac{m}{c_0(A-1)|z|^{A-1}} + 1 - \frac{m}{c_0(A-1)} \right)^{-\frac{1}{m}} \frac{z}{|z|} . \tag{4.3}$$

Доведення. Нехай $f \in H$. З умови (4.1) випливає оцінка

$$d_p(r) = d_{m+2}(r) = \frac{1}{r^{m+1}} \left(\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\gamma_r} (\operatorname{Im} \overline{\sigma}(z))^{-\frac{1}{m+1}} \, ds \right)^{m+1} \leqslant c_0 \, r^{A-m-1} \tag{4.4}$$

для м.в. $r \in [0,1)$.

Використовуючи диференціальну нерівність (2.1), приходимо до нерівності

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{m+2}{2}}(r)} \, dr \geqslant \frac{2 \, dr}{\pi^{\frac{m}{2}} r^{m+1} \, d_{m+2}(r)} \geqslant \frac{2 \, dr}{\pi^{\frac{m}{2}} c_0 \, r^A}$$

для м.в. $r \in [0,1)$. Інтегруючи обидві частини останньої нерівності по $t \in (r,1)$, отримуємо

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-\frac{m}{2}} \right)' dt \geqslant \frac{2}{\pi^{\frac{m}{2}} c_0} \int\limits_r^1 r^{-A} \, dr$$

$$= \frac{2}{\pi^{\frac{m}{2}} c_0(A-1)} (r^{-A+1} - 1) \, . \tag{4.5}$$

Відмітимо, що функція $g_m(t) = \frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-\frac{m}{2}}$ є неспадною, тоді

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(r)}{-\frac{m}{2}} \right)' dr = \int\limits_r^1 g'_m(t) \leqslant g_m(1) - g_m(r)$$

$$= \frac{2}{m} \left(S^{-\frac{m}{2}}(r) - S^{-\frac{m}{2}}(1) \right) \tag{4.6}$$

(див. теорему IV. 7.4 в [51]). Комбінуючи нерівності (4.5) і (4.6), маємо

$$\frac{2}{m} \left(S^{-\frac{m}{2}}(r) - S^{-\frac{m}{2}}(1) \right) \geqslant \frac{2}{\pi^{\frac{m}{2}} c_0(A-1)} \left(r^{-A+1} - 1 \right) .$$

Звідси, враховуючи умову $S(1) \leqslant \pi$, приходимо до оцінки

$$S(r) \leqslant \pi \left(\frac{m}{c_0(A-1)r^{A-1}} + 1 - \frac{m}{c_0(A-1)} \right)^{-\frac{2}{m}} .$$

Легко перевірити, що f_* є розв'язком рівняння (1.3) з $\sigma = -\frac{i}{c_0}\, |z|^{-A}$. Звідси одразу випливає, що $f_* \in H$. □

Попередня теорема дозволяє нам також отримати екстремальний аналог леми Ікоми–Шварца, див. теорему 2 в [52].

Теорема 4.2. *Якщо $f \in H$, то справедлива точна оцінка*

$$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}} \leqslant \left(\frac{c_0(A-1)}{m} \right)^{1/m} .$$

Знак рівності досягається на відображенні виду (4.3).

Доведення. Покладемо $l_f(\varepsilon) = \min\limits_{|z|=\varepsilon} |f(z)|$, $\varepsilon \in (0,1)$. Тоді, враховуючи, що $f(0) = 0$, отримуємо $\pi l_f^2(\varepsilon) \leqslant S(\varepsilon)$, і, відповідно, $l_f(\varepsilon) \leqslant \sqrt{\frac{S(\varepsilon)}{\pi}}$. Таким чином, враховуючи теорему 4, маємо

$$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{l_f(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{A-1}{m}}} \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\frac{S(\varepsilon)}{\pi \varepsilon^{\frac{2(A-1)}{m}}}} \leqslant \left(\frac{c_0(A-1)}{m} \right)^{1/m} .$$

Легко перевірити, що знак рівності в останній оцінці досягається на відображенні (4.3) . □

Наслідок 4.1. *Якщо $A = m + 1$, то*

$$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant c_0^{1/m} .$$

Знак рівності досягається на відображенні

$$f_*(z) = \left(\frac{c_0}{1 + c_0 |z|^m} \right)^{\frac{1}{m}} z \, .$$

Література

[1] Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami Equation: A Geometric Approach.* Developments in Mathematics, 26, Springer, New York etc.

[2] Maly, J., Martio, O. (1995). Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$. *J. Reine Angew. Math., 458*, 19-36.

[3] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer, New York etc.

[4] Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2010). On recent advances in the degenerate Beltrami equations. Ukr. Mat. Visn., 7(4), 467-515.

[5] Srebro, U., Yakubov, E. (2005). *"The Beltrami equation", Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory, v. 2.* Elseiver Sci. B.V., Amsterdam, 555-597.

[6] Guo, C.-Y., Kar, M. (2016). Quantitative uniqueness estimates for p-Laplace type equations in the plane. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 143*, 19-44.

[7] Astala, K., Iwaniec, T., Martin, G. (2009). *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane.* Princeton Mathematical Series, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[8] Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. (1957). Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными. *Докл. АН СССР, 112*(5), 810-811.

[9] Лаврентьев, М.А. (1947). Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей. *Матем. сб., 21(63)*(2), 285-320.

[10] Лаврентьев, М.А. (1962). *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.* М.: Изд-во АН СССР.

[11] Шабат, Б.В. (1957). Геометрический смысл понятия эллиптичности. *Успехи матем. наук, 12(6)*(78), 181-188.

[12] Шабат, Б.В. (1961). К понятию производной системы в смысле М. А. Лаврентьева. *Докл. АН СССР, 136*(6), 1298-1301.

[13] Kuhnau, R. (2010). Minimal surfaces and quasiconformal mappings in the mean. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ, 7(*2), 104–131.

[14] Крушкаль, С.Л., Кюнау, Р. (1984). *Квазиконформные отображения – новые методы и приложения.* М.: Наука.

[15] Adamowicz, T. (2009). On p-harmonic mappings in the plane. *Nonlinear Anal., 71*(1-2), 502-511.

[16] Aronsson, G. (1988). On certain p-harmonic functions in the plane. *Manuscripta Math., 61*(1), 79-101.

[17] Романов, А.С. (2008). Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике. *Сиб. матем. журн., 49*(4), 886-897; transl. in *Siberian Math. J., 49*(4), 709-717.

[18] Bojarski, B., Iwaniec, T. (1987). p-harmonic equation and quasiregular mappings. *Banach Center Publications, 19*(1), 25-38.

[19] Astala, K., Clop, A., Faraco, D., Jääskeläinen, J., Koski, A. (2017). Nonlinear Beltrami operators, Schauder estimates and bounds for the Jacobian. *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 34*(6), 1543-1559.

[20] Carozza, M., Giannetti, F., Passarelli di Napoli, A., Sbordone, C., Schiattarella, R. (2018). Bi-Sobolev mappings and Kp-distortions in the plane. *J. Math. Anal. Appl., 457*(2), 1232-1246.

[21] Golberg, A., Salimov, R., Stefanchuk, M. (2019). Asymptotic Dilation of Regular Homeomorphisms. *Complex Analysis and Operator Theory, 13*(6), 2813–2827.

[22] Lehto, O., Virtanen, K. (1973). *Quasiconformal Mappings in the Plane.* New York: Springer–Verlag.

[23] Iwaniec, T., Martin, G. (2001). *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis.* Clarendon Press, Oxford.

[24] Iwaniec, T., Koskela, P., Onninen, J. (2002). Mappings of finite distortion: Compactness. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., 27*(2), 391-417.

[25] Водопьянов, С.К., Ухлов, А.Д. (2002). Операторы суперпозиции в пространствах Соболева. *Изв. вузов. Матем., 10*, 11-33.

[26] Водопьянов, С.К. (2011). Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева. *Докл. РАН, 440*(3), 301-305.

[27] Водопьянов, С.К. (2012). О регулярности отображений, обратных к соболевским. *Матем. сб., 203*(10), 3-32.

[28] Водопьянов, С.К. (2018). О дифференцируемости отображений класса Соболева W^1_{n-1} с условиями на функцию искажения. *Сиб. матем. журн., 59*(6), 1240-1267.

[29] Kauhanen, J., Koskela, P., Maly, J. (2001). Mappings of finite distortion: discreteness and openness. *Arch. Ration. Mech. Anal., 160*(2), 135-151.

[30] Kauhanen, J., Koskela, P., Maly, J. (2001). Mappings of finite distortion: condition N. *Michigan Math. J., 49*(1), 169-181.

[31] Kauhanen, J., Koskela, P., Maly, J. (2003). Mappings of finite distortion: sharp Orlicz-conditions. *Rev. Mat. Iberoamericana, 19*(3), 857-872.

[32] Koskela, P., Onninen, J. (2006). Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities. *J. Reine Angew. Math., 599*, 1-26.

[33] Ковтонюк, Д.А., Рязанов, В.И., Салимов, Р.Р., Севостьянов, Е.А. (2013). К теории классов Орлича–Соболева. *Алгебра и анализ, 25*(6), 50-102.

[34] Ковтонюк, Д.А., Рязанов, В.И., Салимов, Р.Р., Севостьянов, Е.А. (2014). Граничное поведение классов Орлича–Соболева. *Мат. заметки, 95*(4), 564-576.

[35] Ковтонюк, Д.А., Петков, И.В., Рязанов, В.И., Салимов, Р.Р. (2013). Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами. *Алгебра и анализ, 25*(4), 101-124.

[36] Салимов, Р.Р. (2016). Метрические свойства классов Орлича–Соболева. *Укр. мат. вісник, 13*(1), 129-141.

[37] Салимов, Р.Р. (2015). О конечной липшицевости классов Орлича–Соболева. *Владикавк. мат. журн., 17*(1), 64-77.

[38] Bojarski, B., Gutlyanskii, V., Martio, O., Ryazanov, V. (2013). *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane.* Tracts in Mathematics, 19. Warsaw–Donetsk–Helsinki.

[39] Reich, E., Walczak, H. (1965). On the behavior of quasiconformal mappings at a point. *Trans. Amer. Math. Soc., 117*, 338-351.

[40] Schatz, A. (1968). On the local behavior of homeomorphic solutions of Beltrami equation. *Duke Math. J., 35*, 289-306.

[41] Andreian Cazacu, C. (1971). *Influence of the orientation of the characteristic ellipses on the properties of the quasiconformal mappings.* In Proc. Rom. Finn. Sem., Romania, 1969, Publ. House Acad. Soc. Rep. Rom., Bucharest, 65-85.

[42] Brakalova, M.A., Jenkins, J.A. (1998). On solutions of the Beltrami equation. *J. Analyse Math., 76*, 67-92.

[43] Gutlyanskii, V., Sugawa, T. (2001). On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings. *Rep. Univ. Jyväskylää Dep. Math. Stat., 83*, 91-108.

[44] Gutlyanskii, V., Golberg, A. (2009). On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space. *J. d' Anal. Math., 109*, 233-251.

[45] Gutlyanskii, V., Golberg, A. (2009). Rings and Lipschitz continuity of quasiconformal mappings. *Analysis and mathematical physics, Trends Math.*, Birkhuser, Basel, 187-192.

[46] Gutlyanskii, V., Martio, O., Sugawa, T., Vuorinen, M. (2005). On the degenerate Beltrami equation. *Trans. Amer. Math. Soc., 357*, 875-900.

[47] Ryazanov, V., Salimov, R., Srebro, U., Yakubov, E. (2013). On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemp. Math., 591*, 211-242.

[48] Билет, В.В., Клищук, Б.А., Салимов, Р.Р. (2017). Оценки площади образа круга для классов Соболева. *Збірник праць Інституту математики НАН України, 14*(1), 39-45.

[49] Ломако, Т.В., Салимов, Р.Р. (2010). К теории экстремальных задач. *Збірник праць Ін-ту математики НАНУ, 7*(2), 264-269.

[50] Салимов, Р.Р. (2014). Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева. Алгебра и анализ, 26(6), 143-171.

[51] Сакс, С. (1949). *Теория интеграла.* М.: ИЛ.

[52] Ikoma, K. (1965). On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space. *Nagoya Math. J., 25*, 175-203.

Відомості про авторів

Руслан Радікович Салімов
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Марія Володимирівна Стефанчук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: stefanmv43@gmail.com