Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 2, 278 – 295
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-2-8

Поведінка розв'язків із загостренням для квазілінійних параболічних рівнянь

Євгенія О. Євгеньєва

(Представлена І. І. Скрипніком)

Анотація. У роботі вивчається квазілінійне параболічне рівняння $(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0$ у багатовимірній області $(0,T)\times\Omega$ з умовою $u(t,x) = f(t,x)$ на $(0,T)\times\partial\Omega$, коли гранична функція f вибухає за скінчений час T, тобто $f(t,x)\to\infty$ при $t\to T$. За структурної умови $p \geqslant q > 0$ та за умови степеневого характеру загострення граничної функції f здобуто оцінки слабких розв'язків задачі, досліджено поведінку розв'язків при переході від випадку $p > q$ до $p = q$. Також у роботі описано загальний підхід методу енергетичних оцінок до вивчення таких задач.

2010 MSC. 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключові слова та фрази. Квазілінійне параболічне рівняння, метод енергетичних оцінок, слабкий розв'язок, сингулярні граничні дані.

1. Вступ

У роботі розглядається початково-крайова задача:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \quad p,q>0, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0 \ \text{ в } \Omega, \ \ u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \tag{1.2}$$

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \quad \text{при } t\to T, \tag{1.3}$$

де $\Delta_p u = \sum_{i=1}^n \left(|\nabla_x u|^{p-1}u_{x_i}\right)_{x_i}$, $T > 0$ будемо називати часом загострення, Ω – обмежена зв'язна область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ з C^2–гладкою межею $\partial\Omega$.

Стаття надійшла в редакцію 08.04.2020

Дослідження фінансується Національною академією наук України у рамках проектів 0120U100177 та 0119U1020890.

Функція f визначає сингулярні граничні дані. Будемо вважати, що вона допускає продовження в область $(0,T)\times\Omega$ та задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} &f(t,\cdot)\in C_{loc}([0,T);L^{q+1}(\Omega))\cap L^{p+1}_{loc}([0,T);W^{1,p+1}(\Omega));\\ &f_t(t,\cdot)\in L^1_{loc}([0,T);L^{q+1}(\Omega))\cap L^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{loc}([0,T);L^{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Основною особливістю задачі (1.1)–(1.3) є загострення (blow-up) граничної функції ($f(t,x)\to\infty$ при $t\to T$). Характер цього загострення при $t\to T$ буде описано функцією:

$$\begin{aligned} F(t) := \sup_{0<\tau<t}\int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1}dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla_x f(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau\\ +\left(\int_0^t\left(\int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}}d\tau\right)^{q+1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Введемо тепер означення слабких розв'язків задачі.

Означення 1.1. *Функцію $u\in C_{loc}([0,T);L^{q+1}(\Omega))$ будемо називати слабким розв'язком задачі* (1.1)–(1.3)*, якщо виконано умови:*

i) $u(t,\cdot)-f(t,\cdot)\in L^{p+1}_{loc}([0,T);\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$*;*

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t\in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}\left([0,T);\left(\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega)\right)^*\right)$*;*

iii) для довільної функції $\eta\in L^{p+1}((0,\tau);\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ *для довільного* $\tau<T$ *виконується інтегральна тотожність:*

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{q-1}u)_t,\eta\rangle dx + \int_0^\tau\int_\Omega \sum_{i=1}^n (\nabla_x u)^{p-1}u_{x_i}\eta_{x_i}dxdt = 0, \tag{1.6}$$

де через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *позначається операція спарювання елементів з просторів* $\left(\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega)\right)^*$ *та* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega)$

iv) виконується початкова умова (1.2) *у наступному сенсі:*

$$\lim_{t\to 0}\|u(t,\cdot)-u_0(\cdot)\|_{L^{q+1}(\Omega)} = 0.$$

Зауважимо, що питання існування слабких розв'язків задачі (1.1)–(1.3) в області $(0,T_0)\times\Omega$ для довільного значення $T_0<T$ детально вивчається в роботі [1]. Всюди далі розв'язки будуть розумітися в термінах означення 1.1.

Головним феноменом задач типу (1.1)–(1.3) є властивість локалізації розв'язків.

Означення 1.2. *Множина Ω_s, визначена таким чином:*

$$\Omega_s = \Omega_s(u) = \{x : \limsup_{t \to T} u(t,x) = \infty\}, \tag{1.7}$$

називається областю сингулярності (blow-up set) розв'язку. При цьому, якщо $\Omega_s \subset \Omega$, то розв'язок u задачі (1.1)–(1.3) *називається локалізованим.*

Параболічні рівняння з сингулярними граничними даними почали активно досліджувати у 1960-х роках у контексті вивчення процесу керованого термоядерного синтезу. Розглядалася задача (1.1)–(1.3) з умовами $p = 1$, $q < 1$, оскільки вона досить добре описує процес нагріву термоядерного палива. У роботі [20] така задача була вперше детально вивчена. З кінця 1970-х років дослідження локалізованих граничних даних стало позиціонуватись як окремий напрямок якісної теорії параболічних рівнянь. Було вивчено лінійну задачу ($p = q = 1$) [19], знайдено умови локалізації для неї, тобто умови на граничну функцію f, за яких розв'язок u буде локалізованим. Усі основні результати щодо існування та неіснування локалізації граничної функції та формування області сингулярності зібрані у монографії [18]. Фізичний зміст таких задач включає в себе вивчення сильно нестаціонарних процесів, для яких характерне явище локалізації тепла, магнітного поля та інших величин на визначених ділянках середи.

Усі дослідження в цьому напрямку були отримані чисельно або за допомогою бар'єрної техніки (див. [18]). Цей метод є досить ефективним та полягає у побудові спеціальних автомодельних розв'язків рівняння та їх аналізі, але не є універсальним, бо може бути застосований лише до задач, які допускають автомодельність.

На початку 2000-х років був запропонований метод енергетичних оцінок для вивчення локалізованих граничних даних. Цей метод базується на принципі Сен-Венану [2–4], що був сформульований у 1850-х роках та відіграє важливу роль у теорії пружності. Він полягає в оцінці поведінки енергетичних інтегралів у сімействі внутрішніх підобластей, діаметр яких прямує до 0. Перші інтегральні оцінки для еліптичних рівнянь високого порядку за допомогою принципу Сен-Венана були отримані R.A. Toupin [24] та J.K. Knowles [9]. Рівняння другого порядку вивчались у роботах [10–12]. Систематичне узагальнення ідей апріорних оцінок належить О.А. Олейник, Г.А. Іосіф'яну, Є.В. Радкевичу, В.О. Кондратьєву [14–17]. Метод енергетичних оцінок, що є комбінацією описаних підходів, був застосований для дослідження умов локалізації задачі (1.1)–(1.3) при $p > q$ у роботі [21], а для дослідження умов локалізації розв'язків для рівнянь високого порядку — у серії робіт [5–8]. Основні результати цих робіт зібрані у монографії [13, частина 3].

Приведемо основні результати, отримані методом енергетичних оцінок, для рівняння (1.1) з $p, q > 0$. У [13, розділ 6.5] показано, що у випадку $p < q$ локалізація розв'язку завжди має місце, незалежно від характеру загострення граничної функції f. Більш того, область сингулярності Ω_s буде завжди залишатись на межі $\partial\Omega$.

У роботах [7, 21], [13, розділ 6.3] досліджується випадок $p > q$, що включає в себе рівняння пористого середовища. Доведено, що локалізація розв'язку u має місце за умови на характер загострення граничної функції F:

$$F(t) = \omega(T-t)^{-\frac{q+1}{p-q}} \quad \forall\, t \leqslant T, \quad \omega > 0. \tag{1.8}$$

При цьому, якщо $\omega = \omega(t) \to 0$ при $t \to T$, то область $\Omega_s = \partial\Omega$. А якщо $\omega = \omega(t) \to \infty$ при $t \to T$, то розв'язок не є локалізованим і $\Omega_s = \Omega$. Точність отриманого результату підтверджується, зокрема, на випадку рівняння пористого середовища ($p = 1$, $q < 1$). Так, у [18, глава 3] локалізована гранична функція для рівняння пористого середовища описується таким чином:

$$f(t) = C(T-t)^{-\frac{1}{1-q}} \quad \forall\, t \leqslant T, \quad C > 0, \tag{1.9}$$

що, як неважко перевірити, відповідає характеру загострення (1.8).

У [5, 6], [13, розділ 6.4] досліджено випадок $p = q$, що є найбільш складним для вивчення, оскільки у загальному випадку рівняння не допускає автомодельність. За допомогою методу енергетичних оцінок отримано умови локалізації, а саме, показано, що за умови на характер загострення F:

$$F(t) = \exp\left(\omega(T-t)^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \forall\, t \leqslant T, \quad \omega > 0 \tag{1.10}$$

локалізація має місце. Більш того, якщо $\omega = \omega(t) \to 0$ при $t \to T$, то область сингулярності не виходить за межу області $\Omega_s = \partial\Omega$, а якщо $\omega = \omega(t) \to \infty$ при $t \to T$, то ефект локалізовації не виникає і $\Omega_s = \Omega$. Точність отриманого результату для лінійного випадку ($p = q = 1$) легко доводиться, оскільки для лінійного рівняння можна записати явний розв'язок, що дає змогу знайти умови локалізації [19]. Для нелінійного випадку ($p = q \neq 1$) точність була доведена у [5, 6], а саме, було знайдено асимптотичну поведінку розв'язку u. Для цього розглянемо одновимірний випадок ($n = 1$) та зробимо у рівнянні (1.1) заміну:

$$u(t,x) = e^{v(t,x)},$$

що приводить до рівняння з оператором Гамільтона–Якобі з дифузійним доданком:

$$v_t = |v_x|^{p+1} + p^{-1}\Delta_p\, v. \tag{1.11}$$

У [5] показано, що дифузійний доданок $p^{-1}\Delta_p\, v$ не впливає на асимптотичну поведінку розв'язку рівняння (1.11), а тому досліджуватимемо рівняння:

$$V_t = |V_x|^{p+1}\,. \tag{1.12}$$

Розв'язок рівняння (1.12) будемо шукати у вигляді:

$$V_*(t,x) = (T-t)^{-\frac{1}{p}}\theta(x),$$

де $\theta \geqslant 0$ має задовольняти рівняння:

$$\left|\theta'\right|^{p+1} - p^{-1}\theta = 0.$$

Звідки знаходимо, що $\theta(x) = \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)_+^{\frac{p+1}{p}}$, де $x_0 > 0$ – "розмір" області сингулярності. Отже маємо, що для рівняння (1.1) з умовою $p = q$ в одновимірній області критичною граничною функцією, при якій виникає локалізація, є $f(t,0) = \exp\left((T-t)^{-\frac{1}{p}}\right)$, що відповідає умові (1.10).

В останні роки в роботах [22, 23, 25–28] метод енергетичних оцінок був удосконалений для вивчення поведінки розв'язків задачі (1.1)–(1.3) біля області сингулярності при наближенні до часу загострення T. Було досліджено задачу (1.1)–(1.3) у випадку $p > q$ та $p = q$. Особливість цих досліджень полягає у тому, що ріст граничної функції f уповільнюється за допомогою малого параметра збурення. Цей прийом дозволяє вивчати випадок, коли область сингулярності лежить на межі, а також дозволяє прослідкувати процес розповсюдження області сингулярності всередину області задачі. А саме, у роботі [22] було розглянуто задачу (1.1)–(1.3) у випадку $p = q$ та за умови на характер загострення:

$$F(t) = \exp\left(\omega(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall\, t \leqslant T, \quad \omega > 0, \tag{1.13}$$

де $\mu > 0$ – параметр збурення. Аналогічне дослідження було проведено у [23, 27] для випадку $p > q$ за умов на характер загострення, близьких до (1.8):

$$F(t) = \omega(T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q}+\mu\right)} \quad \forall\, t \leqslant T, \quad \omega > 0,\ \mu > 0. \tag{1.14}$$

У [25] досліджено випадок $p = q$ за умови степеневого характеру загострення граничної функції, а саме:

$$F(t) = \omega(T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t \leqslant T, \quad \omega > 0, \alpha > 0. \tag{1.15}$$

Зрозуміло, що оскільки критичним для випадку $p = q$ є експоненціальне загострення (1.10), то при степеневому загостренні область сингулярності завжди лежить на границі, без обмежень зверху на додатній параметр α.

Умови (1.14) та (1.15) мають однакову структуру, а отже можуть бути порівняні. Основною задачею даної роботи є саме порівняння результатів, отриманих у роботах [23] та [25], дослідження поведінки розв'язків при переході від випадку $p > q$ до $p = q$, а також узагальнення методу енергетичних оцінок для дослідження задачі (1.1)–(1.3).

2. Основний результат

У роботі буде розглянуто задачу (1.1)–(1.3) зі структурною умовою на параметри нелінійності:

$$p \geqslant q > 0. \tag{2.1}$$

У попередніх роботах [25] та [23] отримано результати при степеневому загостренні для задачі (1.1)–(1.3) за умов $p = q$ та $p > q$ окремо (див. вступ). Однак при глибшому дослідженні виявилося, що ці результати можна представити у вигляді одного твердження, тим самим узагальнити метод енергетичних оцінок, розглядаючи загальний випадок $p \geqslant q$. Цей висновок є вагомим, оскільки рівняння (1.1) з умовами $p = q$ та $p > q$ є принципово різними та зазвичай потребують різних підходів до їх вивчення.

Основний результат роботи представлено у наступній теоремі.

Теорема 2.1. *Нехай u – довільний слабкий розв'язок задачі* (1.1)–(1.3) *з умовами* (1.4) *та структурною умовою* (2.1) *у сенсі означення 1.1. Нехай також гранична функція f задана таким чином, що характер її загострення F, визначений у* (1.5)*, має вигляд:*

$$\begin{aligned} F(t) = \omega_0(T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T, \quad & \omega_0 > 0,\, \frac{1}{p} < \alpha < \bar{\alpha}, \\ & \bar{\alpha} := \frac{q+1}{p-q},\ \textit{якщо } p > q, \\ & \bar{\alpha} := \infty,\ \textit{якщо } p = q. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тоді існує стала $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що залежать лише від відомих параметрів задачі, такі, що для розв'язку u справедлива рівномірна за $t \leqslant T$ енергетична оцінка:

$$E(t,s) + h(\tau,s) \leqslant G\omega_0^{\frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)}} s^{-\nu} \qquad \forall\, t \leqslant T,\ s \in (0,\hat{s}), \tag{2.3}$$

де $\nu = \frac{n(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)} + \frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)}\,\alpha(p+1)$.

Тут функції $h(t,s)$, $E(t,s)$ є параметризованими енергетичними функціями, що залежать від відстані s довільної точки x до межі області $\partial\Omega$, а саме:

$$\begin{aligned} E(t,s) &:= \int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau, \\ h(t,s) &:= \sup_{0 \leqslant \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \qquad \forall\, s \in (0,s_\Omega),\, \forall\, t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.4}$$

де сімейство підобластей $\Omega(s)$ визначається співвідношенням:

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) > s\}, \quad s \in (0,s_\Omega), \tag{2.5}$$

а значення s_Ω визначає "радіус" цієї області. Це таке число, для якого функція $d(\cdot) \in C^2(\Omega \setminus \Omega(s))$ $\forall s \leqslant s_\Omega$ і, відповідно, межа $\partial\Omega(s)$ є C^2–гладким многовидом для всіх $0 < s \leqslant s_\Omega$.

Наслідок 2.1. *Нехай u – довільний слабкий розв'язок задачі* (1.1)–(1.3) *з умовою $p = q$ у сенсі означення 1.1. Тоді за умов теореми 2.1 справедлива наступна оцінка:*

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G\omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0,\hat{s}). \tag{2.6}$$

Оцінка (2.3) дозволяє прослідкувати перехід від випадку $p > q$ до $p = q$. Легко бачити, що розв'язки рівняння при $p > q$ швидше загострюються біля границі, більш того, вони "вибухають" та формують зону сингулярності при $\alpha = \frac{q+1}{p-q}$. При цьому, чим більше різниця між параметрами p та q, тим швидше "вибухає" розв'язок.

3. Доведення теореми 2.1

Із означення (2.4) випливає, що енергетичні функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ для розв'язку u є незростаючими функціями аргументу s при довільному $t \leqslant T$. Крім того, в силу (1.8) та (1.10), з умови теореми 2.1 випливає, що

$$E(t,s) + h(\tau,s) < \infty \quad \forall\, s > 0, \forall\, t \leqslant T. \tag{3.1}$$

Зафіксуємо тепер числа

$$\xi \in (0,1); \quad \alpha_1 \in (p^{-1}, \alpha). \tag{3.2}$$

В силу (3.1) маємо дві альтернативи: або

$$E(T,s) + h(T,s) \leqslant 2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha} \quad \forall\, s > 0, \tag{3.3}$$

або існує таке значення $\bar{s} \in (0, s_\Omega)$, де s_Ω з (2.5), що

$$E(T,s) + h(T,s) > 2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha} \quad \forall\, s \in (0,\bar{s}). \tag{3.4}$$

Почнемо аналіз з випадку (3.4). Для довільної точки $\tilde{s} \in (0,\bar{s})$ визначимо скінчену зростаючу послідовність $\{t_j\} = \{t_j(\tilde{s})\}$, $j = 1, 2, ...$, $t_0 = 0$ за допомогою неперервної функції $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot) : [0, t'] \to [t_1, T]$, що визначається співвідношенням:

$$\big(\Gamma_{\tilde{s}}(t) - t\big)^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\Gamma_{\tilde{s}}(t), \tilde{s}) - E(t,\tilde{s}) + \sup_{t<\tau<\Gamma_{\tilde{s}}(t)} h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{3.5}$$

Значення $t_1 = t_1(\tilde{s}) = \Gamma_{\tilde{s}}(0)$ визначається рівністю:

$$t_1^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\left(E(t_1,\tilde{s}) + h(t_1,\tilde{s})\right), \tag{3.6}$$

а t' визначається зі співвідношення:

$$(T - t')^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(T,\tilde{s}) - E(t',\tilde{s}) + \sup_{t'<\tau<T} h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{3.7}$$

В силу означення (3.6) і припущення (3.4) маємо

$$\begin{gathered}\left(E(t_1,\tilde{s}) + h(t_1,\tilde{s})\right) t_1^\alpha = \frac{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}{\xi^\alpha} \\ < \frac{1}{2}\left(E(T,\tilde{s}) + h(T,\tilde{s})\right) T^\alpha \quad \forall \tilde{s} \in (0,\bar{s}].\end{gathered} \tag{3.8}$$

Таким чином, в силу строгої монотонності функції $R_{\tilde{s}}(t) := (E(t,\tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau,\tilde{s}))t^\alpha$ маємо, що $t_1(\tilde{s}) < T$ $\forall \tilde{s} \in (0,\bar{s}]$. Відмітимо також, що в силу (3.1) з означення (3.7) випливає:

$$t' = t'(\tilde{s}) < T \quad \forall \tilde{s} \in (0,\bar{s}]. \tag{3.9}$$

Тож, можемо зробити висновок, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ визначає строго монотонну зростаючу послідовність $\{t_j\}$ співвідношенням:

$$\begin{gathered} t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., j_0 = j_0(\tilde{s}) < \infty : \\ t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'. \end{gathered} \tag{3.10}$$

За послідовністю $\{t_j\}$ з (3.10) визначимо послідовність інтервалів $\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., j_0$, для яких в силу означення (3.5) має місце співвідношення:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau, \tilde{s})\big). \tag{3.11}$$

Покажемо тепер, що послідовність $\{\Delta_j\}$ є кваліфіковано спадною. В силу леми 4.1 має місце оцінка:

$$E(t, s) + h(t, s) \leqslant \omega_0 (T - t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T,\ \forall\, s \in (0, s_\Omega). \tag{3.12}$$

В силу (3.12) з означення (3.5) функції $\Gamma_{\tilde{s}}(t)$ випливає нерівність:

$$\begin{aligned} \Delta_j^{-\alpha} &= \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau, \tilde{s})\big) \\ &\leqslant \xi^\alpha T^{-(\alpha-\alpha_1)} (T - t_j)^{-\alpha} \quad \forall j \leqslant j_0. \end{aligned}$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $T \geqslant 1$, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta_j \geqslant \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_1}{\alpha}} (T - t_j) \geqslant \xi^{-1} (T - t_j) \geqslant \xi^{-1} \Delta_{j+1} \quad \Rightarrow \\ \Delta_{j+1} \leqslant \xi \Delta_j \quad \forall j \leqslant j_0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де $\Delta_{j_0+1} := T - t_{j_0}$. Співвідношення (3.13) назвемо властивістю кваліфікованої монотонності послідовності $\{\Delta_j\}$. За сформованою послідовністю $\{t_j\}$ визначимо пошарові енергетичні функції E_j і h_j за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned} E_j(s) &:= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(t, x)|^{p+1} dx dt, \\ h_j(s) &:= \sup_{t_{j-1} \leqslant t < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, j \leqslant j_0, \forall\, s \in (0, s_\Omega). \end{aligned} \tag{3.14}$$

В силу леми 4.2 енергетичні функції E_j і h_j задовольняють систему (4.2), (4.3). Аналізуючи цю систему, встановимо оцінки для енергетичних функцій $E(t, s)$, $h(t, s)$. Для цього спочатку введемо вагові енергетичні функції:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s), \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{3.15}$$

Для них система (4.2), (4.3) приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
&A_j(s)+H_j(s)\leqslant \overline{C}_1 H_{j-1}(s)+C_2\Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1}\\
&+C_3\Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2}\quad \forall\, s\in(\tilde{s},\bar{s}),\\
&H_j(s)\leqslant(1+\gamma)\xi^{\alpha_1}H_{j-1}(s)+C_4\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}\Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1}\\
&+C_5\gamma^{-\frac{1}{q}}\Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2},
\end{aligned}\tag{3.16}$$

де $\overline{C}_1 = C_1\xi^{\alpha_1}$, $\overline{H}_0(s)=\Delta_0^{\alpha_1}h_0(s)$, $\Delta_0=\xi^{-1}\Delta_1$. Накладемо тепер першу умову на вибір сталої ξ, а саме, покладемо $\xi<(1+\gamma)^{-\alpha_1^{-1}}$. При цьому, в силу (3.13) маємо:

$$\lambda_j:=(1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1}\leqslant\lambda:=(1+\gamma)\xi^{\alpha_1}<1,\quad j=1,2,...,j_0.\tag{3.17}$$

Легко перевірити співвідношення:

$$\lambda_j\lambda_{j-1}...\lambda_{i+1}\Delta_i^{\nu_k-\alpha_1\mu_k}=(1+\gamma)^{j-i}\Delta_j^{\nu_k-\alpha_1\mu_k}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_k)\alpha_1-\nu_k}\quad \forall\, j>i,\ k=1,2.$$

Враховуючи це, проітеруємо нерівності (3.16). У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}
&A_j(s)+H_j(s)\leqslant\overline{C}_1(1+\gamma)^{j-1}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_1}H_0(s)\\
&+\Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1}C_6\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}\left[\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_1)\alpha_1-\nu_1}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1}\right]\\
&+\Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2}C_7\gamma^{-\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_2)\alpha_1-\nu_2}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2}\right]\\
&\forall\, j\leqslant j_0,\ \forall\, s\in(\tilde{s},\bar{s}),
\end{aligned}\tag{3.18}$$

де $C_6=\max\left\{C_2\gamma^{(\nu_1+\mu_1)},\overline{C}_1C_4\lambda^{-1}\right\}$, $C_7=\max\left\{C_3\gamma^{\frac{1}{q}},\overline{C}_1C_5\lambda^{-1}\right\}$. Введемо далі нові енергетичні функції

$$\begin{aligned}
&U_j^{(1)}(s):=\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}}(A_i(s)+H_i(s)),\\
&U_j^{(2)}(s):=\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_2}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}}(A_i(s)+H_i(s)),\quad j=1,...,j_0.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

Очевидні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&U_j^{(1)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{1,j}\,\overline{U}_{j-1}^{(1)}(s), \quad U_0^{(1)}(s) = 0,\\
&U_j^{(2)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{2,j}\,\overline{U}_{j-1}^{(2)}(s), \quad U_0^{(2)}(s) = 0, \quad j = 1, 2, ..., j_0,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\theta_{1,j} := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \leqslant \theta_1 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}} \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} < 1,\\
&\theta_{1,j} := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} \leqslant \theta_2 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}} \xi^{\alpha_1 - \frac{\nu_2}{1+\mu_2}} < 1,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

За допомогою умов (3.21) накладаються більш жорсткі кінцеві вимоги на вибір сталої ξ. Очевидно, що $H_j(s)$, $j = 1, 2, ..., j_0$ є абсолютно неперервними монотонно незростаючими функціями. Тому з нерівностей (3.18), в силу співвідношень (3.20) випливає справедливість для майже всіх $s \in (\tilde{s}, \bar{s})$ співвідношень:

$$
\begin{aligned}
U_j^{(1)}(s) \leqslant{}& \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_1 U_{j-1}^{(1)}(s)\\
&+ C_6 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1}\\
&+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0,
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
U_j^{(2)}(s) \leqslant{}& \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_2 U_{j-1}^{(2)}(s)\\
&+ C_6 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1 - \alpha_1\mu_1} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1}\\
&+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2 - \alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Оцінимо зверху значення $U_j^{(1)}(\tilde{s})$. В силу (3.15) і означення (3.11) інтервалів $\{\Delta_j\} = \{\Delta_j(\tilde{s})\}$ $\forall j \leqslant j_0$ маємо

$$
\begin{aligned}
U_j^{(1)}(\tilde{s}) &= \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{\alpha_1} (E_i(\tilde{s}) + h_i(\tilde{s}))\\
&= \omega_0 \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1} \sum_{i=1}^{j} (1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1 - \frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \Delta_i^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall j \leqslant j_0.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} U_j^{(1)}(\tilde{s}) &= \omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \\ &\leqslant \omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}\sum_{i=1}^{j}\left(\theta_1\xi^{\alpha-\alpha_1}\right)^{j-1} \\ &\leqslant G_1\omega_0(1-\theta_1\xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j\leqslant j_0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

де $G_1=\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}$. Аналогічно отримуємо оцінку для $\overline{U}_j^{(2)}(\tilde{s})$:

$$\overline{U}_j^{(2)}(\tilde{s})\leqslant G_1\omega_0(1-\theta_2\xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j\leqslant j_0. \tag{3.26}$$

Введемо тепер функції $U_j(s):=U_j^{(1)}(s)+U_j^{(2)}(s)$. Нерівності (3.26) і (3.25) породжують "початкову" умову для них:

$$U_j(\tilde{s})\leqslant G_2\omega_0\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j\leqslant j_0, \tag{3.27}$$

де $G_2=G_1\left((1-\theta_1\xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1}+(1-\theta_2\xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1}\right)$. Додаючи нерівності (3.22) і (3.23) та враховуючи монотонне незростання функцій $U_j^{(1)}(s)$ і $U_j^{(2)}(s)$, отримаємо диференціальну нерівність відносно функцій $U_j(s)$ для випадку $p>q$:

$$\begin{aligned} &U_j(s)\leqslant 2\max\Bigg\{C_6\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}\Delta_j^{\mu_1\left(\frac{q+1}{p-q}-\alpha_1\right)}\left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu_1}, \\ &C_7\,\gamma^{-\frac{1}{q}}\,\Delta_j^{\mu_2\left(\frac{q+1}{p-q}-\alpha_1\right)}\left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu_2}\Bigg\}+2\overline{C}_1\lambda^{j-1}H_0(s)+\overline{\theta}U_{j-1}(s) \\ &\text{для майже всіх } s\in(\tilde{s},\bar{s}), \quad \overline{\theta}=\max(\theta_1,\theta_2). \end{aligned} \tag{3.28}$$

У випадку $p=q$ ця диференціальна нерівність приймає наступний вигляд:

$$U_j(s)\leqslant 2\overline{C}_1\lambda^{j-1}H_0(s)+\overline{\theta}U_{j-1}(s)+C_6\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}(-U_j'(s)) \quad \forall\, s\in(\tilde{s},\bar{s}) \tag{3.29}$$

Застосовуючи лему 4.4 для системи диференціальних нерівностей (3.29), (3.27) та лему 4.3 для (3.28), (3.27), отримаємо наступну оцінку:

$$U_j(s)\leqslant 2G_3\,\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s}) \quad \forall\, s:\tilde{s}<s<s_2:=\min\{s_1,\bar{s}\}, \quad \forall\, j\leqslant j_0(\tilde{s}). \tag{3.30}$$

де $\psi(s) := s^{-\frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\alpha-\alpha_1)}{q+1-\alpha(p-q)}}$, $\gamma_1 = \frac{q+1-\alpha_1(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)}$,
$G_3 = \left(\frac{C_6(\alpha-\alpha_1)(p+1)}{e(1-\bar{\theta})}\right)^{(\alpha-\alpha_1)(p+1)} G_2$ у випадку $p = q$ та
$G_3 = \left(\frac{q+1-\alpha(p-q)}{q+1-\alpha_1(p-q)}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}} \left(\frac{(\alpha-\alpha_1)(p-q)}{q+1-\alpha_1(p-q)}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)(p-q)}{\mu_1(q+1-\alpha(p-q))}} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2^{\frac{q+1-\alpha_1(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)}}$
$\times \left(\frac{\overline{C}_6}{1-\bar{\theta}}\right)^{\frac{(\alpha-\alpha_1)(p-q)}{\mu_1(q+1-\alpha(p-q))}} G_2^{\frac{q+1-\alpha_1(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)}}$ у випадку $p > q$, при цьому
$\bar{\mu}_1 = \left(\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}}$, $\bar{\mu}_2 = \left(\frac{\mu_2}{1+\mu_2}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}}$.

Далі, згадуючи означення (3.19) і (3.15), виводимо за допомогою (3.30) оцінку:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant 2^{-1}\Delta_j^{-\alpha_1} U_j(s) \leqslant G_3 \omega_0^{\gamma_1} \psi(s-\tilde{s}) \Delta_j^{-\alpha_1} \qquad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2),\ j \leqslant j_0. \quad (3.31)$$

Тепер оцінимо енергетичні функції $E(t,s)$ і $h(t,s)$. Для цього зафіксуємо довільне значення $i \leqslant j_0$ та просумуємо нерівності (3.31) за j від 1 до i. В силу (3.11) і (3.13) отримуємо

$$\begin{aligned} E(t_i,s) + \sup_{0<\tau<t_i} h(\tau,s) &\leqslant G_3 \omega_0^{\gamma_1} \psi(s-\tilde{s}) \sum_{j=1}^{i} \Delta_j^{-\alpha_1} \\ &\leqslant G_3 \omega_0^{\gamma_1} \psi(s-\tilde{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} \sum_{j=1}^{i} (\xi^{\alpha_1})^{j-1} \\ &\leqslant G_3 \omega_0^{\gamma_1} \psi(s-\tilde{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} (1-\xi^{\alpha_1})^{-1} \\ &= G_4 \omega_0^{\gamma_2} \psi(s-\tilde{s}) \left(E_i(\tilde{s}) + h_i(\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2), \end{aligned}$$
$$\text{де } \gamma_2 = \frac{(q+1)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha(q+1-\alpha(p-q))}, \quad G_4 = \xi^{\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1} T^{-\frac{(\alpha-\alpha_1)\alpha_1}{\alpha}} G_3. \quad (3.32)$$

Наступний крок доведення – отримання оцінки типу (3.32) для довільної точки $t < T$. Для цього відмітимо, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, що визначена в (3.5), неперервно, монотонно та взаємнооднозначно відображає будь-який відрізок $[t_{j-1}, t_j]$ на $[t_j, t_{j+1}]$ $\forall\, j \leqslant j_0 - 1$. Зафіксуємо довільну точку $\bar{t} \in [t_1, T)$. Нехай для визначеності $\bar{t} := \bar{t}_k \in (t_k, t_{k+1}]$ при деякому $k \leqslant j_0$. Тоді єдиним чином відновлюється послідовність $\{\bar{t}_i\}$, $i \leqslant k-1$ така, що:

$$\bar{t}_{i+1} = \Gamma_{\tilde{s}}(\bar{t}_i) \quad \forall\, i \leqslant k-1, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad \bar{t}_0 \in (0, t_1].$$

За допомогою цієї послідовності визначаються нові зсуви $\{\overline{\Delta}_i\}$:

$$\overline{\Delta}_i^{-\alpha} := (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\bar{t}_i,\tilde{s}) - E(\bar{t}_{i-1},\tilde{s}) + \sup_{\bar{t}_{i-1}<t<\bar{t}_i} h(t,\tilde{s})\Big). \tag{3.33}$$

Аналогічно (3.13) перевіряється кваліфікована монотонність послідовності $\{\overline{\Delta}_i\} : \overline{\Delta}_{i+1} < \xi\overline{\Delta}_i \ \forall\, i \leqslant k-1$. За зсувами $\{\overline{\Delta}_i\}$ визначимо відповідні енергетичні функції $\overline{E}_i(s)$ і $\overline{h}_i(s)$. Далі повторюємо обчислення (3.15)–(3.32). В силу того, що $\bar{t} = \bar{t}_k$ є довільною точкою з інтервалу $(0,T]$, отримуємо оцінку для довільного $t \leqslant T$:

$$\begin{aligned} E(t,s) + h(t,s) \leqslant G_4 \omega_0^{\frac{(q+1)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha(q+1-\alpha(p-q))}} (s-\tilde{s})^{-\frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(\alpha-\alpha_1)}{q+1-\alpha(p-q)}} \\ \times \big(E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s})\big)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, t \leqslant T,\ \forall\, s,\ \tilde{s} : 0 < \tilde{s} < s < s_3. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Тепер, застосовуючи лему 4.5, отримаємо оцінку:

$$\begin{aligned} E(t,s) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau,s) \leqslant 2^{\frac{\alpha^3(n(p-q)+(q+1)(p+1))}{\alpha_1(\alpha-\alpha_1)(q+1-\alpha(p-q))}} G_4^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}} \omega_0^{\frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)}} \\ \times s^{-\frac{n(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)} + \frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)}\,\alpha(p+1)} \quad \forall\, t \leqslant T,\ \forall\, s \in (0,s_3). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Таким чином, теорема 2.1 доведена. □

4. Додаток

Лема 4.1. [13, розділ 6.2, Лема 6.2.1] *Нехай u – довільний слабкий розв'язок задачі* (1.1)–(1.3). *Тоді справедлива оцінка:*

$$\sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant CF(t) \quad \forall\, t \in (0,T), \tag{4.1}$$

де $C > 0$ — стала, що залежить лише від відомих параметрів задачі, а функція F визначена співвідношенням (1.5).

Лема 4.2. [13, розділ 6.2, Лема 6.2.3] *Нехай u – довільний слабкий розв'язок задачі* (1.1)–(1.3) *зі структурною умовою* (2.1). *Тоді для майже всіх $s \in (0, s_\Omega)$ справедлива система диференціальних нерівностей:*

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\nu_1}\left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + C_3 \Delta_j^{\nu_2}\left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \tag{4.2}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\gamma)h_{j-1}(s) + C_4\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}\Delta_j^{\nu_1}\left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + \\ + C_5\gamma^{-\frac{1}{q}}\Delta_j^{\nu_2}\left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1,2,...,j_0, \tag{4.3}$$

для довільного $\gamma : 0 < \gamma < 1$. Додатні сталі $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$, $C_3 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі і не залежать від γ, функції E_j та h_j визначені у (3.14),

$$\nu_1 = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)}, \quad \mu_1 = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)},$$
$$\theta = \frac{n(p-q)+q+1}{n(p-q)+(q+1)(p+1)} < 1, \quad \nu_2 = \frac{q+1}{q(p+1)}, \quad \mu_2 = \frac{p-q}{q(p+1)}.$$

Лема 4.3. [13, розділ 9.2, Леми 9.2.1–9.2.6] *Нехай деяке сімейство невід'ємних абсолютно неперервних монотонно незростаючих функцій $\{M_j(s)\}$, $j \leqslant j_0 \leqslant \infty$, задовольняє для майже всіх $s \in (0, s_0)$, $s_0 > 0$, системі диференціальних нерівностей:*

$$M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)\max\Big\{k_j^{(1)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)}(-M_j'(s))^{1+\gamma_2}\Big\}, \\ M_j(0) \leqslant K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0, \tag{4.4}$$

де $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, $\lambda = const \in (0,1)$, $k_j^{(1)} = c_1\varepsilon_j^{\gamma_1}$, $k_j^{(2)} = c_2\varepsilon_j^{\gamma_2}$, $K_j = c_3\varepsilon_j^{-(1-\delta)}$, c_1, c_2, $c_3 > 0$ – деякі сталі, $\delta \in (0,1)$, $\{\varepsilon_j\}$ – довільна монотонно спадна послідовність додатних чисел. Тоді для $M_j(s)$ справедлива рівномірна оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \max\left\{B_1 s^{-\frac{(1+\gamma_1)(1-\delta)}{\delta\gamma_1}}, B_2\right\} \quad \forall\, s \in (0, s_0), \forall\, j \leqslant j_0, \tag{4.5}$$

де B_1, B_2 – додатні сталі, що залежать від c_1, c_2, c_3, δ, γ_1, γ_2, та не залежать ні від j_0, ні від послідовності $\{\varepsilon_j\}$.

Лема 4.4. [25] *Нехай деяке сімейство невід'ємних абсолютно неперервних монотонно незростаючих функцій $\{M_j(s)\}$, $j \in \mathbb{N}$, задовольняє систему диференціальних нерівностей:*

$$M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)k_j(-M_j'(s)) \quad \forall\, s \geqslant \bar{s}, \\ M_j(\bar{s}) \leqslant \exp K_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0, \tag{4.6}$$

де $\lambda \in (0,1)$, а послідовність $\{k_j\}$ прямує монотонно до 0 при $j \to \infty$. Нехай також

$$K_j = f(k_j) = a + b\ln(k_j^{-1}). \tag{4.7}$$

Тоді для розв'язків $M_j(s)$ справедлива рівномірна апріорна оцінка:

$$M_j(s) \leqslant \overline{N}(s) := b^b e^{a-b}(s-\bar{s})^{-b} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{4.8}$$

Лема 4.5. [29] *Нехай деяка неперервна невід'ємна незростаюча функція $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ задовольняє співвідношення:*

$$f(s+\delta) \leqslant a\delta^{-\rho} f(s)^{\lambda} \quad \forall\, s > 0,\, \delta > 0, \tag{4.9}$$

де числа $a > 0$, $\rho > 0$, $\lambda > 0$. Тоді для функції f справедлива універсальна апріорна оцінка:

1) якщо $\lambda < 1$, то $f(s) \leqslant 2^{\frac{\rho}{\lambda(1-\lambda)^2}} a^{\frac{1}{1-\lambda}} s^{-\frac{\rho}{1-\lambda}} \quad \forall\, s > 0$;

2) якщо $\lambda = 1$, то $f(s) \leqslant f(0) \exp\left(1 - (ae)^{-\frac{1}{\rho}} s\right) \quad \forall\, s > 0$;

3) якщо $\lambda > 1$, то $f(s_0) = 0, \quad s_0 = 2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \left(af(0)^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Література

[1] Alt, H.W., Luckhaus, S. (1983). Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z., 183*(3), 311–341.

[2] Barré de Saint-Venant, A.-J.-C. (1855). *De la Torsion des Prismes.* Paris: Imprimére Impériale.

[3] Barré de Saint-Venant, A.-J.-C. (1856). Mémoire sur la torsion des prismes. *Mémoires Divers des Savants étrangers, Acad. Sci. Paris, 14*, 233-560.

[4] Barré de Saint-Venant, A.-J.-C. (1856). Mémoire sur la exion des prismes. *Journal de Mathématiques de Liouville, Ser. II, 1*, 89.

[5] Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2003). Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, 133*(5), 1075–1119.

[6] Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2004). Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. London., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., 460*, 3299–3325.

[7] Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2005). Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, 135A*(5), 1195–1227.

[8] Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2006). Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data. *Communications in Contemp. Math., 8*(3), 331–354.

[9] Knowles, J.K. (1966). On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elastisity. *Arch. Rational Mech. Anal., 21*, 1–22.

[10] Knowles, J.K. (1967). A Saint-Venant's principle for a class of second-order elliptic boundary-value problems. *Z. angew. Math. Phys., 18*, 473–490.

[11] Knowles, J.K. (1971). On the spatial decay of the heat equation. *Z. angew. Math. Phys., 2*, 1050–1056.

[12] Campanato, S. (1966). Equazioni paraboliche del secondo ordine e spasi $L^{2,\theta}(\Omega,\delta)$. *Ann. Mat. Pura Appl., 73*, 55–102.

[13] Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). *Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel.

[14] Oleinik, O.A. (1974). On the uniqueness of the solutions of the Cauchy problem for general parabolic systems in classes of rapidly increasing functions. *Uspekhi Mat. Nauk, 29*(5), 229–230.

[15] Oleinik, O.A., Iosif'yan, G.A. (1976). An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary-value problem for parabolic equations in unbounded domains. *Russian Math. Surveys, 31*, 153–178.

[16] Oleinik, O.A., Radkevich, E.V. (1978). Method of introducing of a parameter for evolution equations. *Russian Math. Surveys, 33*, 7–84.

[17] Kondratiev, V.A., Oleinik, O.A. (1982). On the behaviour of generalized solutions of the Dirichlet problem for higher-order elliptic equations in a neighbourhood of the boundary. *Zap. Nauchn. Semin. LOMI, 115*, 114–125.

[18] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mikhailov, A.P. (1995). *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* Berlin /New York: Waler De Gruyter.

[19] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mikhailov, A.P. (1979). Localization of diffusion processes in media with constant properties. *Soviet Phys. Dokl., 24*(7), 543–545.

[20] Samarskii, A.A., Sobol', I.M. (1963). Examples of numerical computation of temperature waves. *USSR Comput. Math. and Math. Phys., 3*, 945–970.

[21] Shishkov, A.E., Shchelkov, A.G. (1999). Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains. *Sbornik: Mathematics, 190*(3), 447–479.

[22] Shishkov, A.E., Yevgenieva, Ye.A. (2019). Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations. *Mathematische Nachrichten, 292*(6), 1349–1374.

[23] Shishkov, A.E., Yevgenieva, Ye.A. (2019). Localized blow-up regimes for quasilinear doubly degenerate parabolic equations. *Mathematical Notes, 106*(4), 639—650.

[24] Toupin, R.A. (1965). Saint-Venant's principle. *Arch. Rational Mech. Anal., 18*, 83–96.

[25] Yevgenieva, Ye.A. (2017). Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking. *Ukr. Mat. Bull., 14*(4), 481–495; transl. in (2018). *Journal of Mathematical Sciences, 234*(1), 106–116.

[26] Yevgenieva, Ye.A. (2018). Quasilinear parabolic equations with a degenerate absorption potential. *Ukr. Mat. Bull., 15*(4), 576–591; transl. in (2019). *Journal of Mathematical Sciences, 242*(3), 457–468.

[27] Yevgenieva, Ye.A., Shishkov, A.E. (2019). Method of energy estimates for the study of a behavior of weak solutions of the equation of slow diffusion with singular boundary data. *Ukr. Mat. Bull., 16*(2), 277–288; transl. in (2020). *Journal of Mathematical Sciences, 244*(1), 95–103.

[28] Yevgenieva, Ye.A. (2019). Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 15*(1), 131–144.

[29] Stampacchia, G. (1966). Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16, 1965. Montreal: Les Press. Univ. Montreal.

Відомості про авторів

Євгенія Олександрівна Євгеньєва

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com