Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 2, 171 – 187
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-2-2

УМВ

Лінійні і колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних

Михайло В. Гембарський, Світлана Б. Гембарська

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Отримано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ. Крім того, в одновимірному випадку встановлено також точні за порядком оцінки колмогоровських і лінійних поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $L_q,\ 1 \le q \le \infty$.

2010 MSC. 42A10, 42B99.

Ключові слова та фрази. Лінійний поперечник, колмогоровський поперечник, східчастий гіперболічний хрест.

1. Вступ. Позначення, означення та допоміжні твердження

У роботі встановлено точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1, 2] періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q у двох випадках: а) $1 < p \le 2,\ \frac{p}{p-1} < q < \infty$; б) $2 \le p < q < \infty$. Зазначимо, що раніше у роботах [3, 4] були одержані оцінки зверху і знизу згаданих апроксимаційних характеристик, але питання про їхні порядкові значення залишалося відкритим. Нами уточнено оцінки знизу лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, які є для них точними за порядком.

Крім того, у випадку функцій однієї змінної одержано точні за порядком оцінки колмогоровських і лінійних поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $L_q,\ 1 \le q \le \infty$. Отримані результати доповнюють оцінки відповідних апроксимаційних характеристик, які встановлені у роботах [5–7].

Стаття надійшла в редакцію 09.02.2020

Нехай $\mathbb{R}^d$ позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d := \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, позначимо простір функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$, які є 2π-періодичними по кожній із d змінних, вимірними на π_d і такими, що

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Надалі вважаємо, що для $f \in L_p(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

і множину таких функцій позначимо $L_p^0(\pi_d)$. Іноді замість $L_p(\pi_d)$ і $L_p^0(\pi_d)$ будемо вживати простіші позначення L_p і L_p^0 відповідно.

Означимо k-ту різницю функції $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, з кроком h_j за змінною x_j згідно з формулою

$$\triangle_{h_j}^k f(x) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} \, C_k^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$ і $h = (h_1, \dots, h_d)$ введемо мішану $\boldsymbol{l}$-векторну різницю

$$\triangle_h^{\boldsymbol{l}} f(x) = \triangle_{h_d}^{l_d} \ldots \triangle_{h_1}^{l_1} f(x) = \triangle_{h_d}^{l_d} (\ldots (\triangle_{h_1}^{l_1} f(x)))$$

і при $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$ означимо мішаний модуль неперервності порядку $\boldsymbol{l}$

$$\Omega_{\boldsymbol{l}}(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \|\triangle_h^{\boldsymbol{l}} f(\cdot)\|_p.$$

Надалі розглядаємо лише випадок, коли $l_1 = l_2 = \ldots = l_d = l$, $l \in \mathbb{N}$, і замість $\boldsymbol{l}$ пишемо l.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ – функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція Ω задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0,\ \ t_j > 0,\ \ j = \overline{1,d}$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(t)$ не спадає за кожною змінною $t_j \geq 0$, $j = \overline{1,d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq C\left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $\quad m_j \in \mathbb{N}$, $\quad j = \overline{1,d}$, де $C > 0$ — деяка стала.

Множину функцій Ω, які підпорядковані умовам 1) − 4), позначимо через $\Psi_{l,d}$ і у випадку $d = 1$ пишемо просто Ψ_l.

Далі припускаємо, що Ω належить множинам $S^{\alpha,d}$ і $S_{l,d}$ (при $d = 1$ відповідно множинам S^α і S_l). Пояснимо це.

Кажуть, що невід'ємна функція однієї змінної $\varphi : R_+ \to R_+$ належить множині S^α, $\alpha > 0$ (пишемо: $\varphi \in S^\alpha$), якщо функція $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha},\ 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Невід'ємна функція однієї змінної $\varphi : R_+ \to R_+$ належить множині S_l (пишемо: $\varphi \in S_l$), якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma},\ 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Умова належності функції до множини S_l запроваджена С.Б. Стєчкіним [8], а умова належності функції до множини S^α вперше зустрічається у роботі Н.К. Барі і С.Б. Стєчкіна [9].

Отже, тепер вважаємо, що $\Omega \in S^{\alpha,d}$ (відповідно $\Omega \in S_{l,d}$), якщо $\Omega(t_1, \ldots, t_d)$ як функція змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить множині S^α (відповідно множині S_l).

Позначимо $\Phi_{\alpha,l}^d = \Psi_{l,d} \cap S^{\alpha,d} \cap S_{l,d}$ і відповідно при $d = 1$ $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Зазначимо також таке: у подальшому викладі запис $A \asymp B$ для виразів A та B, що визначені деякою сукупністю параметрів, означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2, які *не залежать від одного істотного за контекстом параметра*, що $c_1 B \leq A \leq c_2 B$. Також пишемо $A \ll B$ $(A \gg B)$, якщо існує така додатна стала c, що $A \leq cB$ $(B \leq cA)$.

Тепер визначимо функціональні класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Нехай $\Omega \in \Phi^{d}_{\alpha,l}$ і $1 \le p,\theta \le \infty$. Тоді покладемо [2]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in L^0_p : \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)}{\Omega(t)}$$

(тут для вектора $t = (t_1, \ldots, t_d)$ запис $t > 0$ означає, що $t_i > 0$ при $i = \overline{1,d}$).

Зауважимо, що у випадку, коли $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}, 0 < r_j < l, \ j = \overline{1,d}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ тотожні аналогам класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ з $r = (r_1, \ldots, r_d)$, які досліджувалися у роботах [10,11]. У свою чергу, при $\theta = \infty$ класи $B^{r}_{p,\infty} =: H^{r}_{p}$ є аналогами класів С. М. Нікольського [12]. Дослідженням класів $B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p}$ присвячена робота М. М. Пустовойтова [1].

Зручнішим у дослідженнях є інше нормування функцій, що належать класам $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину

$$\rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d \ : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ \ j = \overline{1,d}\}$$

і для $f \in L^0_p, \ 1 < p < \infty$, покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Отже, якщо $\Omega(t), \ t \in \mathbb{R}^d_+$, – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$, то для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 < p < \infty, \ 1 \le \theta \le \infty$ справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} \Big(\Omega(2^{-s}) \Big)^{-\theta} \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут, і у подальшому, $\Omega(2^{-s}) := \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d}), \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що при $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (1.1) доведено у роботі [2], а при $\theta = \infty$ – в [1].

Для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ можна записати аналогічні (1.1) співвідношення, замінивши "блоки" $\delta_s(f)$ на інші. А саме, позначимо через $V_m(t),\ m \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$, ядро Валле–Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt$$

(для коректності означення $V_m(t)$, при $m = 1$ останню суму у цій формулі слід вважати тотожною нулю).

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\Big), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

і для $f \in L^0_p,\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

де $*$ – операція згортки.

Тоді справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \Big(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f)\|_p^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

При $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (1.2) доведено у роботі [13], а при $\theta = \infty$ – в [1].

Наші дослідження стосуються класів, які визначаються за допомогою специфічної функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, а саме

$$\Omega(t) = \omega\Bigg(\prod_{j=1}^{d} t_j\Bigg), \tag{1.3}$$

де $\omega(\cdot)$ – функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Зрозуміло, що функція Ω вигляду (1.3) має властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$, а тому справедливими є наведені вище співвідношення (1.1), (1.2) для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Надалі у випадку $d=1$ для класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ з функцією Ω вказаного вигляду вживаємо позначення $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Тепер дамо означення апроксимаційних характеристик, які досліджуються у роботі.

Нехай X – нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{L}_M(X)$ – сукупність підпросторів в X, розмірність яких не перевищує M, $L(X,L_M)$ – сукупність лінійних неперервних відображень X в $L_M\in\mathcal{L}_M(X)$ і W – центрально-симетрична множина в X.

Величина

$$\lambda_M(W,X):=\inf_{\substack{L_M\in\mathcal{L}_M(X)\\ \Lambda\in L(X,L_M)}}\ \sup_{w\in W}\|w-\Lambda w\|_X,$$

де нижню грань взято по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(X)$ і всіх лінійних неперервних операторах Λ, що діють з X в L_M, називається *лінійним M-поперечником* множини W у просторі X.

Поперечник $\lambda_M(W,X)$ введений у 1960 році В. М. Тихомировим [14] і на даний час історія його досліджень на різного типу функціональних класах є досить об'ємною. Зокрема, результати, що стосуються оцінок лінійних поперечників класів $B^r_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних можна знайти у роботах [15–25], а також у монографіях [26, 27].

Величина

$$d_M(W,X):=\inf_{L_M\in\mathcal{L}_M(X)}\ \sup_{w\in W}\ \inf_{u\in L_M}\|w-u\|_X$$

називається *колмогоровським M-поперечником* множини W у просторі X.

Поперечник $d_M(W,X)$ введений у 1936 році А. М. Колмогоровим [28]. Детальна бібліографія стосовно досліджень колмогоровських поперечників класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних наведена у монографіях [26, 27, 29].

Легко бачити, що означені апроксимаційні характеристики пов'язані співвідношенням:

$$d_M(W,X)\le\lambda_M(W,X). \tag{1.4}$$

Тепер сформулюємо декілька допоміжних тверджень.

Теорема А [30]. *Нехай* $n_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$ *і*

$$t(x)=\sum_{|k_j|\le n_j}c_k e^{i(k,x)},\qquad x\in\mathbb{R}^d,$$

де $k = (k_1, \dots, k_d)$, *а* c_k *– довільні комплексні числа.*

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|t\|_q. \tag{1.5}$$

Нерівність (1.5) доведена С. М. Нікольським і має назву "нерівність різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ цю нерівність довів Д. Джексон [31].

Далі, для $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, $d \ge 2$ та $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(s,1)\le n} \rho(s), \quad (s,1) := s_1 + \ldots + s_d.$$

Множина Q_n називається східчастим гіперболічним хрестом.

Через $S_{Q_n}(f)$ позначимо так звану східчасто-гіперболічну суму Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$ вигляду

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f,x) = \sum_{(s,1)\le n} \delta_s(f,x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Якщо $X \subset L_1(\pi_d)$ – деякий функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, то для класу функцій $F \subset X$ покладемо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(F)_X := \sup_{f\in F} \|f - S_{Q_n}(f)\|_X$$

і у випадку $X = L_q(\pi_d)$ пишемо $\mathcal{E}_{Q_n}(F)_q$ замість $\mathcal{E}_{Q_n}(F)_X$.

Зазначимо також: якщо A – деяка скінченна множина, то через $|A|$ позначатимемо число її елементів.

Теорема Б [2]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})\, 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Далі, нехай l_p^m, $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$, позначає простір $\mathbb{R}^m$ векторів $x = (x_1, \dots, x_m)$, який наділений нормою $\|\cdot\|_{l_p^m}$:

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^m позначимо одиничну кулю в l_p^m, тобто множину елементів $x \in l_p^m$, для яких $\|x\|_{l_p^m} \le 1$.

Для $m, n \in \mathbb{N}$ і $1 \le p, q \le \infty$ через $l_{p,q}^{m,n}$ будемо позначати простір $\mathbb{R}^{mn}$ з нормою

$$\|x\|_{l_{p,q}^{m,n}} = \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k \in \Delta_l} |x_k|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.6}$$

(при $1 \le p, q < \infty$), де $\Delta_l = \{k \in \mathbb{N} : \ (l-1)m \le k < lm\}$, $l = \overline{1, n}$, з відповідною зрозумілою модифікацією правої частини в (1.6) при $q = \infty$ і/або $p = \infty$.

Зазначимо, що у випадку $p = q$ простір $l_{p,q}^{m,n}$ тотожній простору l_p^{mn} і для будь-якого $x \in l_{p,p}^{m,n}$ маємо $\|x\|_{l_{p,p}^{m,n}} = \|x\|_{l_p^{mn}}$.

Через $B_{p,q}^{m,n}$ позначимо одиничну кулю у просторі $l_{p,q}^{m,n}$.

Теорема B [32]. *Для $m, n \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка*

$$d_{[\frac{mn}{2}]}(B_{1,\infty}^{m,n}, l_{2,1}^{m,n}) > C_4 n,$$

де $C_4 > 0$ - абсолютна стала, а $[x]$ позначає цілу частину числа $x \in \mathbb{R}$.

2. Результати

Теорема 2.1. *Нехай $d \ge 2$, $1 < p \le 2$, $\frac{p}{p-1} < q < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $q < \theta \le \infty$ справедливе співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m}) 2^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \, m^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})}, \tag{2.1}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху в (2.1) одержана у роботах [3] і [4] відповідно у випадках $\theta = \infty$ і $q < \theta < \infty$. Окрім того, там же встановлені і оцінки знизу поперечника $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, але вони відрізняються за порядком від оцінок в (2.1) . Тому для доведення порядкового співвідношення (2.1) проведемо уточнення оцінки знизу.

Оскільки при $p \le 2$ справедливе вкладення $B^{\Omega}_{2,\theta} \subseteq B^{\Omega}_{p,\theta}$ і права частина в (2.1) не залежить від параметра p, то шукану оцінку достатньо встановити для поперечника $\lambda_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q)$.

Нехай $\theta_m = \{s : (s, 1) = m\}$ і $\triangle Q_m = \bigcup\limits_{s \in \theta_m} \rho(s)$. Зазначимо, що $|\theta_m| \asymp m^{d-1}$ і відповідно $|\triangle Q_m| \asymp 2^m m^{d-1}$. Виберемо число $m \in \mathbb{N}$

залежно від $M \in \mathbb{N}$ таке, що $M \asymp 2^m m^{d-1}$ і кількість точок множини $\triangle Q_m$ була б не меншою ніж $2M$.

У роботі [4] за допомогою методу дискретизації при $q < \theta < \infty$ встановлено співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,\theta},\, L_q) \gg \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, |\theta_m|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} \lambda_M(B^{2^m,\,|\theta_m|}_{1,\infty},\, l^{2^m,|\theta_m|}_{2,1}),$$

з якого, взявши до уваги нерівність (1.4), випливає

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,\theta},\, L_q) \geq \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, |\theta_m|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} \times$$

$$\times d_M(B^{2^m,\,|\theta_m|}_{1,\infty},\, l^{2^m,|\theta_m|}_{2,1}). \qquad (2.2)$$

Застосувавши до оцінки $d_M(B^{2^m,\,|\theta_m|}_{1,\infty},\, l^{2^m,|\theta_m|}_{2,1})$ теорему В, із (2.2) отримаємо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q) \gg \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, |\theta_m|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1}\, |\theta_m| =$$

$$= \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, |\theta_m|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічно, у випадку $\theta = \infty$ (див. [3]) маємо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q) \gg \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, |\theta_m|^{\frac{1}{q}-1}\, |\theta_m| \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)\frac{1}{q}}.$$

Теорему 2.1 доведено. □

Надамо коментарі щодо одержаного результату, зіставивши його з оцінками інших апроксимаційних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

Наведемо, для зручності, відповідний результат стосовно колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$.

Теорема Г. [2] *Нехай $d \geq 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких M і $m \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^m m^{d-1}$, справедливі оцінки:*

а) якщо $1 < p < 2 \leq q < \infty$, то

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+};$$

б) якщо $2 \leq p \leq q < \infty$, то

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Отже, зіставивши теорему Г з теоремою 2.1, можна стверджувати, що за умов теореми 2.1 щодо параметрів p, q, θ і функції ω лінійний і колмогоровський поперечник відрізняються за порядком.

А з іншого боку, зазначимо, що оцінка (2.1) не реалізується за наближення M-вимірними підпросторами тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастого гіперболічного хреста (див. теорему Б).

У наступному твердженні встановлено точну за порядком оцінку лінійного поперечника класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q для значень параметрів p і q, відмінних від тих, що розглянуті у теоремі 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай $d \geq 2$, $2 \leq p < q < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $q < \theta \leq \infty$ справедлива оцінка*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}, \tag{2.3}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху в (2.3) є наслідком теореми Б, оскільки при $M \asymp 2^m\, m^{d-1}$ справджуються співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_m}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Встановимо в (2.3) оцінку знизу. Спершу, використовуючи теорему А, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 \leq \theta < \infty$ можна записати

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Bigg(\sum_{s} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\, \|\delta_s(f)\|_p^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq \Bigg(\sum_{s} \omega^{-\theta}\,(2^{-(s,1)})\, 2^{(s,1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta} \|\delta_s(f)\|_2^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \Bigg(\sum_{s} \omega_1^{-\theta}\,(2^{-(s,1)})\, \|\delta_s(f)\|_2^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}}, \tag{2.4}$$

де $\Omega_1(t) = \omega_1\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, а $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\, \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ – функція, що належить множині $\Phi_{\alpha_1, l+1}$, $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

З (2.4) випливає, що при $1 \le \theta < \infty$

$$B^{\Omega_1}_{2,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}. \tag{2.5}$$

Аналогічне вкладення справедливе і у випадку $\theta = \infty$, тобто

$$B^{\Omega_1}_{2,\infty} \subset B^{\Omega}_{p,\infty}. \tag{2.6}$$

Тепер, на підставі співвідношення (2.1), взявши до уваги (2.5) і (2.6), маємо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg \lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \gg \omega_1\,(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}$$

$$= \omega\,(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорему 2 доведено. □

Зіставивши оцінку $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ із (2.3) з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ (див. теорему Г), видно, що як і у випадку теореми 2.1, значення цих апроксимаційних характеристик відрізняються за порядком.

З іншого боку, на відміну від теореми 2.1, за умов теореми 2.2 порядкове значення лінійного поперечника $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ реалізується за наближення M-вимірними підпросторами тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастого гіперболічного хреста (див. теорему Б).

Тепер, поєднавши результати теорем 2.1 і 2.2 з відповідними оцінками лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, встановленими у роботі [5] при $2 \le \theta \le q$, сформулюємо такі твердження.

Теорема 2.1$'$. *Нехай $d \ge 2$, $1 < p \le 2$, $\frac{p}{p-1} < q < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $2 \le \theta \le \infty$ справедлива оцінка*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $M \asymp 2^m\, m^{d-1}$.

Теорема 2.2$'$. *Нехай $d \ge 2$, $2 \le p < q < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $2 \le \theta \le \infty$ справедлива оцінка*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-m})\, 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\, m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $M \asymp 2^m\, m^{d-1}$.

Зробимо декілька зауважень стосовно доведених результатів.

1. При $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j},\ r_j > 0,\ j = \overline{1,d}$, теореми $2.1'$ і $2.2'$ доведені у роботі [21].

2. Питання про порядки лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ при $\theta \in [1,2)$ і за всіх обмежень щодо інших параметрів у теоремах $2.1'$ та $2.2'$ (зокрема, за умови $d \geq 2$) залишається відкритим.

3. У одновимірному випадку (тобто при $d = 1$) відомі точні за порядком оцінки лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q)$ для всіх допустимих значень параметра θ.

Щодо останнього зауваження укажемо на таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $d = 1,\ 1 \leq \theta \leq \infty,\ \omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $l \in \mathbb{N}$, *а* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ *при* $1 < p < 2,\ \frac{p}{p-1} < q < \infty$, *або* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *при* $2 \leq p < q < \infty$.

Тоді справедливі співвідношення

$$\lambda_M(B^{\omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} \omega(M^{-1})\, M^{1/2-1/q}, & 1 < p \leq 2,\ \frac{p}{p-1} < q < \infty, \\ \omega(M^{-1})\, M^{1/p-1/q}, & 2 \leq p < q < \infty. \end{cases} \tag{2.7}$$

Зазначимо, що при $2 \leq \theta \leq q$ оцінки (2.7) встановлені в [5], а при інших значеннях параметра θ в [6].

У завершальній частині роботи встановлено точні за порядком оцінки колмогоровського і лінійного поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $L_q,\ 1 \leq q \leq \infty$ у одновимірному випадку ($d = 1$).

Насамперед зауважимо, що при встановленні оцінок зверху згаданих апроксимаційних характеристик використовується оцінка колмогоровського поперечника класу $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ (див. нижче теорему Д). Тому спочатку доцільно нагадати визначення банахового простору $B_{\infty,1}$.

Простір $B_{\infty,1}$ є лінійним підпростором в L_∞ з нормою, що визначається наступним чином. Для довільного тригонометричного полінома τ вона означається згідно з формулою

$$\|\tau\|_{B_{\infty,1}} = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d_+} \|A_s(\tau)\|_\infty.$$

Таким же чином означається норма $\|f\|_{B_{\infty,1}}$ для функцій $f \in L_1$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}_+^d} \|A_s(f)\|_\infty$. При цьому зазначимо, що справедливе співвідношення

$$\|f\|_\infty \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{2.8}$$

Отже, відомим є таке твердження.

Теорема Д [25]. *Нехай* $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді мають місце співвідношення*

$$d_M(B^\omega_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \lambda_M(B^\omega_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \omega(M^{-1}).$$

Далі, при встановленні оцінки знизу колмогоровського поперечника $d_M(B^\omega_{\infty,\theta}, L_1)$ використовується ще одне відоме твердження. Наведемо його.

Нехай $T(2^n)$ – множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) = \{t : t(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k\, e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема Е [33]. *Нехай* $\varepsilon > 0$ *і підпростір* $\Psi \subset T(2^n)$ *такий, що* $\dim\Psi \ge \varepsilon(2^n + 1)$. *Тоді знайдеться елемент* $t \in \Psi$, *що*

$$\|t\|_\infty \le 1 \quad \text{і} \quad \|t\|_2 \ge C_5(\varepsilon) > 0.$$

Тепер сформулюємо і доведемо таке твердження.

Теорема 2.3. *Нехай* $d = 1$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді справедливі оцінки*

$$d_M(B^\omega_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^\omega_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}). \tag{2.9}$$

Доведення. Оцінки зверху для обох поперечників, зважаючи на нерівність $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_\infty \ll \|\cdot\|_{B_{\infty,1}}$, є наслідком теореми Д.

Переходячи до встановлення оцінок знизу в (2.9), зауважимо, що шукану оцінку достатньо встановити для колмогоровського поперечника $d_M(B^\omega_{\infty,\theta}, L_1)$.

Отже, нехай число $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{n-1} \le M \le 2^n$, а $\{u_i\}_{i=1}^M$ – деяка система функцій, що належать $L_1(\pi_1)$. Розглянемо підпростір $\Psi \subset T(2^n)$ вигляду

$$\Psi = \{t \in T(2^n) : (t, u_i) = 0, \ i = \overline{1, M}\},$$

де для функцій $g \in T(2^n)$ і $h \in L_1(\pi_1)$ покладаємо $(g, h) := \int\limits_0^{2\pi} g(x)h(x)dx$. Тоді $\dim \Psi \ge 2^n$, і згідно з теоремою E існує функція $f \in \Psi$ така, що

$$\|f\|_\infty \le 1 \quad \text{і} \quad \|f\|_2 \ge C_6 > 0. \tag{2.10}$$

Тепер, якщо $u := lin\{u_i\}_{i=1}^M$, то, взявши до уваги (2.10), маємо

$$C_6^2 \le (f, f) = (f - u, f) \le \|f - u\|_1 \ \|f\|_\infty \le \|f - u\|_1. \tag{2.11}$$

Крім того, для $f \in T(2^n)$ можна записати

$$\|f\|_{B^\omega_{\infty,\theta}} \asymp \Big(\sum_{s=1}^n \omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|A_s(f)\|_\infty^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le \Big(\sum_{s=1}^n \omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|A_s\|_1^\theta \ \|f\|_\infty^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.12}$$

Врахувавши, що $\|A_s\|_1 \le C_7$ і $\|f\|_\infty \le 1$, а $\omega \in S_\alpha$, з (2.12) одержимо

$$\|f\|_{B^\omega_{\infty,\theta}} \ll \Big(\sum_{s=1}^n \omega^{-\theta}(2^{-s})\Big)^{\frac{1}{\theta}} = \Big(\sum_{s=1}^n \omega^{-\theta}(2^{-s}) 2^{-s\alpha\theta} 2^{s\alpha\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{-n\alpha} \Big(\sum_{s=1}^n 2^{s\alpha\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega^{-1}(2^{-n}).$$

Отже, можна стверджувати, що функція

$$g(x) = C_8 \, \omega(2^{-n}) \, f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

з відповідною сталою $C_8 > 0$ належить класу $B^\omega_{\infty,\theta}$ і, зважаючи на (2.11), маємо

$$\|g - u\|_1 \gg \omega(2^{-n}). \tag{2.13}$$

Нарешті, на підставі (2.13), взявши до уваги співвідношення між числами M та n, за умови $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ можна записати

$$d_M(B^\omega_{\infty,\theta}, L_1) \ge d_M(B^\omega_{\infty,\theta} \cap T(2^n), L_1) \gg \omega(2^{-n}) \asymp \omega(M^{-1}).$$

Теорему 2.3 доведено. $\square$

У випадку, коли $\omega(t) = t^r$, $r > 0$, з теореми 2.3 отримуємо

Наслідок 1. *Нехай* $d = 1$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r > 0$. *Тоді*

$$d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \asymp M^{-r}.$$

Література

[1] Пустовойтов, Н.Н. (1994). Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности. *Anal. Math., 20*, 35–48.

[2] Yongsheng, S., Heping, W. (1997). Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Тр. МИАН, 219*, 356–377.

[3] Дерев'янко, Н.В. (2014). Оцінки лінійних поперечників класів H^{Ω}_p періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, 11*(3), 128–145.

[4] Дерев'янко, Н.В., Черемшинська, О.І. (2015). Лінійні поперечники класів $S^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, 12*(4), 165–185.

[5] Федуник, О.В. (2006). Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. *Укр. мат. журн., 58*(1), 93–104.

[6] Конограй, А.Ф. (2010). Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, 7*(1), 94–112.

[7] Дерев'янко, Н.В. (2014). Оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. *Укр. мат. журн., 66*(7), 909–921.

[8] Стечкин, С.Б. (1951). О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Изв. АН СССР. Сер. мат., 15*, 219–242.

[9] Бари, Н.К., Стечкин, С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва, 5*, 483–522.

[10] Аманов, Т.И. (1965). Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}$, $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \dots, n)$. *Тр. Мат. ин-та АН СССР., 77*, 5–34.

[11] Лизоркин, П.И., Никольский, С.М. (1989). Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 187*, 143–161.

[12] Никольский, С.М. (1963). Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера. *Сиб. мат. журн., 4*(6), 1342–1364.

[13] Стасюк, С.А., Федуник, О.В. (2006). Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 58*(5), 692–704.

[14] Тихомиров, В.М. (1960). Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. *Успехи мат. наук., 15*(3), 81–120.

[15] Романюк, А.С. (2001). Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I. *Укр. мат. журн., 53*(5), 647–661.

[16] Романюк, А.С. (2001). Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II. *Укр. мат. журн., 53*(6), 820–829.

[17] Романюк, А.С. (2008). Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных. *Мат. сб., 199*(2), 93–114.

[18] Романюк, А.С. (2011). Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Anal. Math., 37*, 181–213.

[19] Романюк, А.С. (2014). К вопросу о линейных поперечниках классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 66*(7), 970–982.

[20] Романюк, А.С. (2016). Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 68*(10), 1403–1417.

[21] Романюк, А.С. (2017). Тригонометрические и линейные поперечники классов периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 69*(5), 670–681.

[22] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Укр. мат. журн., 71*(2), 271–282.

[23] Федуник, О.В. (2004). Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, 1*(1), 375–388.

[24] Гембарський, М.В., Гембарська, С.Б. (2018). Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$. *Укр. мат. вісник, 15*(1), 43–57.

[25] Гембарський, М.В., Гембарська, С.Б., Соліч, К.В. (2019). Найкращі наближення і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Мат. студії, 51*(1), 74–85.

[26] Романюк, А.С. (2012). Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. *Пр. Ін-ту математики НАН України., 93*.

[27] Dung, D., Temlyakov, V., Ullrich, T. (2018). *Hyperbolic Cross Approximation.* Birkhauser.

[28] Kolmogoroff, A. (1936). Über die beste Annüherung von Fukctionen einer gegebenen Funktionenklasse. *Anal. Math., 37*(2), 107–111.

[29] Temlyakov, V.N. (1993). *Approximation of periodic functions.* New York: Nova Sci. Publ. Inc.

[30] Никольский, С.М. (1951). Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 38*, 244–278.

[31] Jackson, D. (1933). Certain problems of closest approximation. *Bull. Amer. Math. Soc., 39*(12), 889–906.

[32] Малыхин, Ю.В., Рютин, К.С. (2017). Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$. *Мат. заметки., 101*(1), 85–90.

[33] Темляков, В.Н. (1992). Билинейная аппроксимация и близкие вопросы. *Тр. МИАН, 194*, 229–248.

Відомості про авторів

Михайло Віталійович Гембарський
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: hembarskyi@gmail.com

Світлана Борисівна Гембарська
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: gembarskaya72@gmail.com