Український математичний вісник
Том 17 (**2020**), № 2, 188 – 195
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-2-3

О влиянии интегральных возмущений на асимптотическую устойчивость решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

Самандар Искандаров, Назигай А. Абдирайимова

(Представлена Ф. Абдуллаевым)

Аннотация. Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка могут не обладать изучаемым свойством. Тем самым выявляется влияние интегральных возмущений на асимптотическую устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для этого развивается метод вспомогательных ядер. Приводится иллюстративный пример.

2010 MSC. 45J05, 34K20.

Ключевые слова и фразы. Линейное интегро-дифференциальное уравнение, линейное дифференциальное уравнение, асимптотическая устойчивость решений, влияние интегральных возмущений, метод вспомогательных ядер.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $I = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ второго порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их первых производных.

Задача. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

Статья поступила в редакцию 03.11.2019

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \Big[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)\Big]d\tau = f(t), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

в случае, когда решения соответствующего ДУ второго порядка

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t), \quad t \geq t_0 \tag{1_0}$$

могут быть асимптотически неустойчивыми.

Для решения этой задачи нами развивается метод вспомогательных ядер [1, 2]. Отметим, что такая задача для других классов ИДУ вида (1) и другими методами изучена во многих работах, например, в [3, 4].

Сначала в ИДУ (1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H(t,\tau)$ с $x'(\tau)$ [1] по правилу "веса" [4, с. 114]:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) = Q_0(t,\tau)x(\tau)$$

$$+[Q_1(t,\tau) - H(t,\tau)]x'(\tau) + H(t,\tau)x'(\tau). \tag{2}$$

Затем проводим интегрирование по частям:

$$\int\limits_{t_0}^{t} H(t,\tau)x'(\tau)d\tau = H(t,t)x(t) - H(t,t_0)x(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} H'_\tau(t,\tau)x(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Тогда с учетом (2), (3), из ИДУ (1) имеем следующее нагруженное ИДУ:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + [a_0(t) + H(t,t)]x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\{[Q_0(t,\tau) - H'_\tau(t,\tau)]x(\tau)$$

$$+[Q_1(t,\tau) - H(t,\tau)]x'(\tau)\Big\}d\tau = f(t) + H(t,t_0)x(t_0). \tag{4}$$

Теперь в ИДУ (4) сделаем нестандартную замену [5]:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \tag{5}$$

где λ – некоторый вспомогательный параметр, причем $\lambda \in R$, $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция, $y(t)$ – новая неизвестная функция, и аналогично [5] ИДУ (4) сводим к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}[P(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)]d\tau = \\ = F(t) + (W(t))^{-1}H(t,t_0)x(t_0), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$b_1(t) \equiv a_1(t) - \lambda^2 + W'(t)(W(t))^{-1},$$

$$b_0(t) \equiv [a_0(t) + H(t,t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4](W(t))^{-1},$$

$$P(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - H'_\tau(t,\tau) + \lambda^2 H(t,\tau) - \lambda^2 Q_1(t,\tau)],$$

$$K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau) - H(t,\tau)]W(\tau), \quad F(t) \equiv f(t)(W(t))^{-1}.$$

Для исследования системы (6) поступаем аналогично, как в [6], а именно проведем отдельные преобразования для первого и второго уравнений системы (6), затем их сложим.

Возводим обе части первого уравнения системы (6) в квадрат [4, с. 28], интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, что дает следующее тождество:

$$\int\limits_{t_0}^{t}(x'(s))^2 ds + \lambda^2(x(t))^2 + \lambda^4\int\limits_{t_0}^{t}(x(s))^2 ds \equiv \lambda^2(x(t_0))^2 + \int\limits_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2 ds. \tag{7}$$

Для преобразования второго уравнения системы (6), а именно ИДУ для $y(t)$, сделаем следующие предположения и обозначения [4]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t) \quad (i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},$$

$$E_i(t) \equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1..n),$$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \tag{R}$$

$c_i(t) \quad (i = 1..n)$ – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ системы (6) ее второе уравнение умножаем на $y(t)$, интегрируем в пределах от

t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(F)$, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t) \quad (i = 1..n)$ условия (R), при этом применим леммы 1.4, 1.5 [7] и будем иметь следующее тождество:

$$(y(t))^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} b_1(s)(y(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n}\Big\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2$$

$$-2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) - \int\limits_{t_0}^{t}\Big[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_0) + c_i'(s)\Big]ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2 d\tau ds\Big\} + 2\int\limits_{t_0}^{t} y(s)\Big\{b_0(s)x(s)$$

$$+\int\limits_{t_0}^{s}[P(s,\tau)x(\tau) + K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau\Big\}ds \equiv$$

$$\equiv c_* + 2\int\limits_{t_0}^{t} y(s)[F_0(s) + (W(s))^{-1}H(s,t_0)x(t_0)]ds, \tag{8}$$

где $Y_i(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)y(\eta)d\eta \quad (i = 1..n), \quad c_* = (y(t_0))^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t_0).$

Далее сложим тождества (7), (8) и приходим к следующему тождеству:

$$V(t) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} (x'(s))^2 ds + \lambda^2(x(t))^2 + \lambda^4\int\limits_{t_0}^{t}(x(s))^2 ds + (y(t))^2$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t} b_1(s)(y(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n}\Big\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2$$

$$-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int\limits_{t_0}^{t}\Big[B_i^{'}(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i^{'}(s)Y_i(s,t_0)+c_i^{'}(s)\Big]ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}R_{i\tau}^{'}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\Big\}\equiv c_{**}+\int\limits_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}\Big[A_i^{'}(s)(Y_i(s,t_0))^2+\int\limits_{t_0}^{s}R_{is\tau}^{''}(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau\Big]ds$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t}y(s)\Big[F_0(s)+(W(s))^{-1}H(s,t_0)x(t_0)\Big]ds$$

$$-2\int\limits_{t_0}^{t}y(s)\Big\{b_0(s)x(s)+\int\limits_{t_0}^{s}\Big[P(s,\tau)x(\tau)+K_0(s,\tau)y(\tau)\Big]d\tau\Big\}ds, \qquad (9)$$

где $c_{**}=\lambda^2(x(t_0))^2+c_*$.

Переходом от тождества (9) к интегральному неравенству, аналогично теоремам 1.1, 2.1 [4] доказывается

Теорема. *Пусть 1)* $\lambda\neq 0,\quad W(t)>0$; *выполняются условия* $(K),(F),(R)$*;*
2) $b_1(t)\geq 0$;
3) $A_i(t)\geq 0$, $B_i(t)\geq 0$, $B_i^{'}(t)\leq 0$, $R_{i\tau}^{'}(t,\tau)\geq 0$, *существуют функции* $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$, $c_i(t)$, $\quad R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ *такие, что*

$$A_i^{'}(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\quad (E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),$$

$$R_{it\tau}^{''}(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}^{'}(t,\tau)\quad (i=1..n;k=0,1);$$

4) $(W(t))^2+|b_0(t)|+|F_0(t)|+(W(t))^{-1}|H(t,t_0)|+\int\limits_{t_0}^{t}\Big[|P(t,\tau)|+|K_0(t,\tau)|\Big]$ $d\tau\in L^1(I,R_+\backslash\{0\})$. *Тогда для любого решения* $(x(t),y(t))$ *системы (6) справедливы утверждения:*

$$x^{(k)}(t)\in L^2(I,R)\quad (k=0,1), \qquad (10)$$

$$x(t),y(t)-\ \text{ограниченные}. \qquad (11)$$

Отметим, что переход от тождества (9) к интегральному неравенству и применение леммы 1 об интегральном неравенстве [8] приводит к результату: $V(t)$ – ограниченная функция, откуда вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t}(x'(s))^2ds+\lambda^2(x(t))^2+\lambda^4\int_{t_0}^{t}(x(s))^2ds+(y(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_1(s)(y(s))^2ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2+\int_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\Big]\leq V(t),$$

что дает возможность получить утверждения (10)–(12).

Следствие. *Если выполняются все условия теоремы и $W(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верны утверждения: $x^{(k)}(t)\to 0\quad(k=0,1)$ при $t\to\infty$, т.е. любое решение $x(t)$ ИДУ (1) асимптотически устойчиво.*

На самом деле, во-первых, из (10) в силу леммы Люстерника–Соболева [9, с. 393-394; 6] следует, что любое решение $x(t)$ ИДУ (1): $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$; во-вторых, из замены (5) на основании $x(t)\to 0$, $W(t)\to 0$, $t\to\infty$ и ограниченности $y(t)$ вытекает, что $x'(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Следовательно, любое решение $x(t)$ ИДУ (1) асимптотически устойчиво.

Пример. Для ИДУ (1) с

$$t_0=0,\quad a_1(t)\equiv 3,\quad a_0(t)\equiv -2-e^{-4t},$$

$$Q_0(t,\tau)\equiv 16e^{-5t+5\tau}\sqrt{t-\tau+1}-\frac{2e^{-5t+5\tau}}{\sqrt{t-\tau+1}}+Q_1(t,\tau)+\frac{e^{-t}}{e^t+e^\tau+2},$$

$$Q_1(t,\tau)\equiv e^{-t+\tau}\Big\{\Big[\exp\Big(\frac{sint}{(t+5)^2}\Big)+\tau\Big]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+2}\Big\}$$

$$\times\exp(\sqrt[3]{tsint}+t^2+\sqrt[3]{\tau\sin\tau}+\tau^2)+4e^{-5t+5\tau}\sqrt{t-\tau+1}-\frac{e^{-t}|cos\tau|}{(t+\tau+1)^2},$$

$$f(t)\equiv-\frac{e^{-t}\exp(\sqrt[3]{tsint}+t^2)}{t+3}+e^{-t}sine^{-t},$$

выполняются все условия теоремы и следствия при $H(t,\tau)\equiv 4e^{-5t+5\tau}\sqrt{t-\tau+1}$, $\lambda=1$, $W(t)\equiv e^{-t}$, здесь $b_1(t)\equiv 4$, $b_0(t)\equiv -e^{-3t}$,

$$P(t,\tau)\equiv\frac{1}{e^t+e^\tau+2},\quad n=1,\quad \psi_1(t)\equiv\exp(t^2+\sqrt[3]{t\sin t}),$$

$$R_1(t,\tau)\equiv\Big[\exp\Big(\frac{sint}{(t+5)^2}\Big)+\tau\Big]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+2},$$

$$A_1(t) \equiv \exp\left(\frac{sint}{2(t+5)^2}\right), \quad A_1^*(t) \equiv R_1^*(t) \equiv \frac{t+7}{(t+5)^3}, \quad B_1(t) \equiv \frac{1}{t+2},$$

$$E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+3}, \quad c_1(t) \equiv \frac{1}{t+2},$$

$$K_0(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-\tau}|cos\tau|}{(t+\tau+1)^2}, \quad F_0(t) \equiv sine^{-t}.$$

Значит, любое решение такого ИДУ асимптотически устойчиво. Однако, для соответствующего однородного ДУ второго порядка:

$$x''(t) + 3x'(t) - (2 + e^{-4t})x(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

как отмечено в [10, с. 225], любое его решение не может быть асимптотически устойчивым, т.к.

$$a_0(t) \equiv -2 - e^{-4t} < 0.$$

Таким образом, установлено, что при асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова неоднородного ИДУ вида (1) решения соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми.

Авторы глубоко благодарны рецензенту за ценные и справедливые замечания.

Литература

[1] Искандаров, С. (1998). О влиянии вольтерровых интегральных возмущений на ограниченность решений линейных дифференциальных уравнений. *Вестник КГНУ. Сер. естественно-техн. науки, 1*, 83–87.

[2] Искандаров, С. (2008). Асимптотическая устойчивость двух классов интегродифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры. *Дифференц. уравнения, 44*(7), 883–895.

[3] Иманалиев, М.И., Ведь, Ю.А. (1973). Интегральные возмущения в теории устойчивости систем дифференциальных уравнений. *Исслед. по интегродифференц. уравнениям в Киргизии, 9*, 3–67.

[4] Искандаров, С. (2002). *Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра.* Бишкек: Илим.

[5] Искандаров, С. (2006). О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка. *Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям, 35*, 31–35.

[6] Искандаров, С. (2012). Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка. *Исслед. по интегродифференц. уравнениям, 44*, 44–51.

[7] Искандаров, С. (2003). *Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра*: Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.

[8] Ведь, Ю.А. Пахыров, З. (1973). Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений. *Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии, 9*, 68–103.

[9] Люстерник, Л.А., Соболев, В.И. (1965). *Элементы функционального анализа.* М.: Наука.

[10] Меркин, Д.Р. (1987). *Введение в теорию устойчивости движения.* М.: Наука.

Сведения об авторах

Самандар Искандаров
Институт математики НАН Кыргызской Республики,
Бишкек-71, Кыргызстан
E-Mail: mrmacintosh@list.ru

Назигай Абдинабиевна Абдирайимова
Ошский государственный университет,
Ош, Кыргызстан
E-Mail: nazik.abdiraimova@gmail.com