Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 2, 256 – 277
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-2-7

Система функцій, біортогональних з похідними поліномів Чебишева другого роду комплексної змінної

Ольга В. Веселовська, Вероніка В. Достойна

(Представлена В. О. Деркачом)

Анотація. Для похідних поліномів Чебишева другого роду комплексної змінної побудовано систему функцій, біортогональних з ними на замкнених кривих комплексної площини. Досліджено властивості цих функцій та встановлено умови, за яких аналітичні функції розкладаються в ряди за похідними поліномів Чебишева другого роду в комплексних областях. Наведено приклади таких розвинень. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, які мають самостійне застосування.

2010 MSC. 33E20, 33D45.

Ключові слова та фрази. Поліноми Чебишева другого роду, аналітична функція, біортогональні системи функцій, асоційована функція.

Вступ

Властивості ортогональних систем поліномів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, в [1,2]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексних областях. У роботі [2] розглянуто деякі властивості поліномів Чебишева комплексної змінної, а також наведено розвинення аналітичних функцій за поліномами Чебишева першого роду у комплексних областях. Властивості поліномів, споріднених з поліномами Чебишева, а також розвинення аналітичних функцій у ряди за ними в комплексних областях вивчалися в [9, 10], відповідно.

Узагальненням методу розкладу функцій у степеневі ряди є їхнє розвинення за системою поліномів, біортогональних з деякою іншою

Стаття надійшла в редакцію 11.02.2020

ISSN 1810 – 3200. © Інститут прикладної математики і механіки НАН України

системою функцій, які називають асоційованими. За певних умов для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею.

У даній роботі побудовано систему асоційованих функцій, біортогональних з похідними поліномів Чебишева другого роду на замкнених кривих комплексної площини, встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти в ряди за цими поліномами. Наведено приклади таких розкладів. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, які можна використовувати для інших досліджень.

1. Похідні поліномів Чебишева другого роду комплексної змінної

Нехай C_n^m — біноміальні коефіцієнти, а $U_n(z)$ – поліноми Чебишева другого роду комплексної змінної. Для поліномів $U_n(z)$ справедливі явні формули [3, с. 186]:

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k z^{n-2k}, \tag{1.1}$$

де $n = 0, 1, \ldots$.

Продиференціюємо співвідношення (1.1) s разів:

$$U_n^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} (-1)^k 2^{n-2k} (n-2k)(n-2k-1)\ldots(n-2k-s+1) C_{n-k}^k z^{n-2k-s},$$

де $s \leq n$. Оскільки

$$(n-2k)(n-2k-1)\ldots(n-2k-s+1) = s! C_{n-2k}^s,$$

то остаточно отримаємо вираз для s -ої похідної $U_n^{(s)}(z)$ поліномів $U_n(z)$:

$$U_n^{(s)}(z) = s! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} (-1)^k 2^{n-2k} C_{n-k}^k C_{n-2k}^s z^{n-2k-s}. \tag{1.2}$$

У справедливості формули (1.2) можна переконатись методом математичної індукції.

Із співвідношень (1.2) отримаємо вирази поліномів $U_n^{(s)}(z)$ у випадку парних та непарних значень n:

$$U_{2n}^{(s)}(z) = s! \sum_{k=0}^{\left[n-\frac{s}{2}\right]} (-1)^k 2^{2(n-k)} C_{2n-k}^k C_{2(n-k)}^s z^{2(n-k)-s}$$
$$= s! \sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n} (-1)^{n-j} 2^{2j} C_{j+n}^{2j} C_{2j}^s z^{2j-s}, \tag{1.3}$$

$$U_{2n+1}^{(s)}(z) = s! \sum_{j=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{n} (-1)^{n-j} 2^{2j+1} C_{j+n+1}^{2j+1} C_{2j+1}^s z^{2j+1-s}. \tag{1.4}$$

2. Властивості поліномів $U_n^{(s)}(z)$

Нехай

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ 1, n = m \end{cases}$$

– символ Кронекера, а $\Gamma(x)$ – Гамма функція.

Твердження 2.1. *Поліноми $U_n^{(s)}(z)$ ортогональні з вагою $\left(1-x^2\right)^{s+\frac{1}{2}}$ на відрізку $[-1;1]$, тобто виконуються рівності*

$$\int_{-1}^{1} U_n^{(s)}(x) U_m^{(s)}(x) \left(1-x^2\right)^{s+\frac{1}{2}} dx = \|U_n^{(s)}\|^2 \delta_{nm}, \tag{2.1}$$

де $\|U_n^{(s)}\|^2 = \dfrac{\pi(2s+1)! C_{n+s+1}^{2s+1}}{2(n+1)}$.

Доведення. Відомо, що для поліномів Гегенбауера $G_n^\lambda(x)$ виконуються умови ортогональності [4, с. 179]:

$$\int_{-1}^{1} G_n^\lambda(x) G_m^\lambda(x) \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\left[\Gamma(\lambda)\right]^2}\delta_{nm}.$$

Застосувавши їх до поліномів Гегенбауера $G_{n-s}^{s+1}(x)$ та врахувавши співвідношення

$$U_n^{(s)}(x) = 2^s s! G_{n-s}^{s+1}(x), \quad s \leq n, \tag{2.2}$$

одержимо умови (2.1).

Позначимо через D_R область, границею якої є еліпс Γ_R з рівнянням

$$z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + R^{-1}e^{-i\varphi}\right), \quad R > 1, 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{2.3}$$

□

Теорема 2.1. *Для многочленів $U_n^{(s)}(z)$ справедливі оцінки*

$$\left|U_n^{(s)}(x)\right| \le 2^s s! C_{n+s+1}^{2s+1}, \quad |x| \le 1, \tag{2.4}$$

$$\left|U_n^{(s)}(z)\right| \le 2^s s! C_{n+s+1}^{2s+1} R^{n-s}, \quad z \in \overline{D}_R. \tag{2.5}$$

Доведення. Спочатку оцінимо модуль поліномів $U_n^{(s)}(x)$ дійсної змінної x на відрізку $[-1;1]$. Використовуючи інтегральне зображення поліномів Гегенбауера $G_n^\lambda(x)$ [3, с.178]:

$$G_n^\lambda(x) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!\left[\Gamma(\lambda)\right]^2} \int\limits_0^\pi \left(x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right)^n \sin^{2\lambda-1}\varphi d\varphi$$

та співвідношення (2.2), одержимо

$$U_n^{(s)}(x) = \frac{(s+1)! C_{2s+1}^s C_{n+s+1}^{2s+1}}{2^{s+1}} \int\limits_0^\pi \left(x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right)^{n-s} \sin^{2s+1}\varphi d\varphi.$$

Звідси знаходимо

$$\left|U_n^{(s)}(x)\right| \le \frac{(s+1)! C_{2s+1}^s C_{n+s+1}^{2s+1}}{2^{s+1}} \int\limits_0^\pi \left|x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2}\right|^{n-s} \sin^{2s+1}\varphi d\varphi.$$

Враховуючи, що

$$\left|x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2}\right| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\varphi} = \sqrt{x^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \le 1$$

для $|x| \le 1$ і [7, с.169]

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2s+1}\varphi d\varphi = 2\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k C_s^k}{2k+1} = \frac{2(2s)!!}{(2s+1)!!} = \frac{2^{2s+1}(s!)^2}{(2s+1)!},$$

одержимо оцінку

$$\left|U_n^{(s)}(x)\right| \le 2^s s! C_{n+s+1}^{2s+1}$$

чи

$$\left|\frac{1}{2^s s! C_{n+s+1}^{2s+1}} U_n^{(s)}(x)\right| \le 1, \quad |x| \le 1.$$

Поліном

$$\frac{1}{2^s s! C_{n+s+1}^{2s+1}} U_n^{(s)}(x)$$

задовольняє умови теореми [5, с. 166]: *якщо для полінома $W_n(z)$ n-го степеня на дійсному відрізку $[-1;1]$ виконується нерівність $|W_n(z)| \le M$, де $M = const$, то для будь-якого z ззовні цього відрізку справедлива оцінка*

$$|W_n(z)| \le M(a+b)^n,$$

де a і b – півосі еліпса з фокусами в точках $z = \pm 1$, який проходить через точку z.

Звідси, оскільки півосі еліпса Γ_r, $1 < r \le R$, з рівнянням (2.3) відповідно дорівнюють $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$, одержуємо оцінку (2.5). □

Теорема 2.2. *Степені z^{n-s} однозначно виражаються через поліноми $U_n^{(s)}(z)$, тобто справедливі співвідношення:*

$$z^{n-s} = \frac{1}{2^n s! C_n^s} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} \frac{(n-2k+1)C_n^k}{n-k+1} U_{n-2k}^{(s)}(z), \tag{2.6}$$

де $s \le n$.

Доведення. Відомо [2, с. 28], що степені z^n однозначно виражаються через поліноми Чебишева $U_n(z)$:

$$z^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-2k+1)C_n^k}{n-k+1} U_{n-2k}(z), \quad n \ge 0.$$

Звідси, диференціюючи за змінною z s разів, знаходимо

$$n(n-1)\dots(n-s+1)z^{n-s} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]} \frac{(n-2k+1)C_n^k}{n-k+1} U_{n-2k}^{(s)}(z).$$

Оскільки $n(n-1)\dots(n-s+1) = s!C_n^s$, то одержимо вирази (2.6). В їх справедливості можна переконатись методом математичної індукції.

Із співвідношень (2.6) отримаємо вирази z^{n-s} для парних та непарних значень n:

$$z^{2n-s} = \frac{1}{2^{2n}s!C_{2n}^s}\sum_{k=0}^{[n-\frac{s}{2}]}\frac{[2(n-k)+1]\,C_{2n}^k}{2n-k+1}U_{2(n-k)}^{(s)}(z)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}s!C_{2n}^s}\sum_{m=[\frac{s}{2}]}^{n}\frac{(2m+1)C_{2n}^{n-m}}{m+n+1}U_{2m}^{(s)}(z), \tag{2.7}$$

$$z^{2n+1-s} = \frac{1}{2^{2n+1}s!C_{2n+1}^s}\sum_{m=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{n}\frac{(2m+2)C_{2n+1}^{n-m}}{m+n+2}U_{2m+1}^{(s)}(z). \tag{2.8}$$

□

Твердження 2.2. *Справедливі комбінаторні тотожності*

$$(2m+1)\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{j+n}^{2j}C_{2j}^{j-m}}{j+m+1} = \delta_{mn}, \tag{2.9}$$

$$(2m+2)\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{j+n+1}^{2j+1}C_{2j+1}^{j-m}}{j+m+2} = \delta_{mn}. \tag{2.10}$$

Доведення. Підставивши вирази (2.7) для степенів z^{2n-s} в (1.3) та змінивши порядок сумування, знаходимо:

$$U_{2n}^{(s)}(z) = \sum_{j=[\frac{s}{2}]}^{n}(-1)^{n-j}C_{j+n}^{2j}\sum_{m=[\frac{s}{2}]}^{j}\frac{(2m+1)\,C_{2j}^{j-m}}{m+j+1}U_{2m}^{(s)}(z)$$

$$= \sum_{m=[\frac{s}{2}]}^{n}(2m+1)U_{2m}^{(s)}(z)\sum_{j=m}^{n}\frac{(-1)^{n-j}C_{j+n}^{2j}C_{2j}^{j-m}}{j+m+1}.$$

Звідси, враховуючи незалежність поліномів $U_n^{(s)}(z)$, отримуємо тотожність (2.9).

Аналогічно, підставивши вирази (2.8) для степенів z^{2n+1-s} в (1.4), приходимо до тотожності (2.10). □

Позначимо через A_R простір однозначних аналітичних у крузі $|z| < R$, $0 < R \le \infty$, функцій комплексної змінної.

Теорема 2.3. *Система поліномів $U_n^{(s)}(z)$ лінійно незалежна і повна у просторі A_R.*

Доведення. Оскільки коефіцієнт при найстаршому степені полінома $U_n^{(s)}(z)$ дорівнює $2^n s! C_n^s$ і відмінний від нуля, то система поліномів $U_n^{(s)}(z)$ лінійно незалежна [8, с. 137]. Крім того, вона повна [8, с. 137], бо кожний степінь z^{n-s} однозначно виражається у вигляді лінійної комбінації поліномів $U_n^{(s)}(z)$. □

3. Функції, асоційовані з поліномами $U_n^{(s)}(z)$

Розглянемо однозначну аналітичну у крузі $|z| < R, \quad 1 < R \leq \infty$, функцію $f(z)$ комплексної змінної. Її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{3.1}$$

Знайдемо формальне розвинення функції $f(z)$ за поліномами $U_n^{(s)}(z)$. Для цього підставимо вирази (2.7) та (2.8) у рівність (3.1). Тоді

$$f(z) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{f^{(k-s)}(0)}{(k-s)!} z^{k-s}$$

$$= \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} z^{2k-s} + \sum_{k=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} \frac{f^{(2k+1-s)}(0)}{(2k+1-s)!} z^{2k+1-s}$$

$$= \frac{1}{s!} \left[\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} \frac{1}{2^{2k} C_{2k}^s} \sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k} \frac{(2r+1) C_{2k}^{k-r}}{r+k+1} U_{2r}^{(s)}(z) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} \frac{f^{(2k+1-s)}(0)}{(2k+1-s)!} \frac{1}{2^{2k+1} C_{2k+1}^s} \sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k} \frac{(2r+2)\, C_{2k+1}^{k-r}}{r+k+2} U_{2r+1}^{(s)}(z) \right].$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{s!} \left[\sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} (2r+1) U_{2r}^{(s)}(z) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{C_{2k}^{k-r}}{2^{2k}(k+r+1) C_{2k}^s} \frac{f^{(2k-s)}(0)}{(2k-s)!} + \right.$$

$$+\sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty}(2r+2)U_{2r+1}^{(s)}(z)\sum_{k=r}^{\infty}\frac{C_{2k+1}^{k-r}}{2^{2k+1}(k+r+2)C_{2k+1}^{s}}\frac{f^{(2k+1-s)}(0)}{(2k+1-s)!}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{s!}\Bigg[\sum_{r=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty}(2r+1)U_{2r}^{(s)}(z)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2(l+r)}^{l}}{2^{2(l+r)}(l+2r+1)C_{2(l+r)}^{s}}\frac{f^{(2l+2r-s)}(0)}{(2l+2r-s)!}$$

$$+\sum_{r=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty}(2r+2)U_{2r+1}^{(s)}(z)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2(l+r)+1}^{l}}{2^{2(l+r)+1}(l+2r+2)C_{2(l+r)+1}^{s}}\frac{f^{(2l+2r+1-s)}(0)}{(2l+2r+1-s)!}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_{m=s}^{\infty}(m+1)U_{m}^{(s)}(z)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2l+m}^{l}}{2^{m+2l}(l+m+1)C_{2l+m}^{s}}\frac{f^{(2l+m-s)}(0)}{(2l+m-s)!}. \tag{3.2}$$

Позначивши

$$L_{m-s}(f)=\frac{m+1}{2^m s!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2l+m}^{l}}{2^{2l}(l+m+1)C_{2l+m}^{s}}\frac{f^{(2l+m-s)}(0)}{(2l+m-s)!} \tag{3.3}$$

та врахувавши співвідношення (3.2), отримаємо

$$f(z)=\sum_{m=s}^{\infty}L_{m-s}(f)U_{m}^{(s)}(z).$$

Введемо функції, асоційовані з поліномами $U_n^{(s)}(z)$ [8, с. 120]:

$$\omega_{m-s}(z)=\frac{m+1}{2^m s!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2l+m}^{l}}{2^{2l}(l+m+1)C_{2l+m}^{s}}\frac{1}{z^{2l+m-s+1}}. \tag{3.4}$$

На підставі співвідношення (3.4) запишемо вирази асоційованих функцій $\omega_{m-s}(z)$ для парних та непарних значень індексів m:

$$\omega_{2m-s}(z)=\frac{2m+1}{2^{2m}s!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2(l+m)}^{l}}{2^{2l}(l+2m+1)C_{2(l+m)}^{s}}\frac{1}{z^{2(l+m)-s+1}}$$

$$=\frac{2m+1}{s!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_{2k}^{k-m}}{2^{2k}(k+m+1)C_{2k}^{s}}\frac{1}{z^{2k-s+1}}, \tag{3.5}$$

$$\omega_{2m+1-s}(z) = \frac{2m+2}{2^{2m+1}s!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C^{l}_{2(l+m)+1}}{2^{2l}(l+2m+2)C^{s}_{2(l+m)+1}}\frac{1}{z^{2(l+m)-s+2}}$$
$$= \frac{2m+2}{s!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C^{k-m}_{2k+1}}{2^{2k+1}\,(k+m+2)\,C^{s}_{2k+1}}\frac{1}{z^{2k-s+2}}. \qquad (3.6)$$

Твердження 3.1. *Функції $\omega_{m-s}(z)$ аналітичні в області $|z| > 1$. Тоді коефіцієнти $L_{m-s}(f)$ зображуються у вигляді контурних інтегралів*

$$L_{m-s}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(z)\omega_{m-s}(z)dz, \qquad (3.7)$$

де C – додатно орієнтоване коло $|z| = q$, $1 < q < R$.

Доведення. Використовуючи асимптотичну формулу $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}$, $n \to \infty$, знайдемо оцінку для коефіцієнтів ряду (3.4)

$$\frac{(m+1)C^{l}_{2l+m}}{2^{2l+m}s!(l+m+1)C^{s}_{2l+m}} = \frac{(m+1)(2l+m-s)!}{2^{2l+m}l!(l+m+1)!} \sim \frac{m+1}{2^{s}l^{s+1}}.$$

Звідси

$$\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{(m+1)C^{l}_{2l+m}}{2^{2l+m}s!(l+m+1)C^{s}_{2l+m}}} = \lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{m+1}{2^{s}l^{s+1}}} = 1$$

і твердження 3.1 доведено. □

Означення 3.1. *Систему асоційованих функцій $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ називають біортогональною із системою поліномів $\{V_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, якщо справджуються умови*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} V_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm},$$

де L – додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функції $\omega_m(z)$.

Теорема 3.1. *Асоційовані функції $\omega_{n-s}(z)$ біортогональні з поліномами $U_n^{(s)}(z)$ вздовж замкненого контура γ, що охоплює круг $|z| \le 1$, тобто виконуються рівності*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_n^{(s)}(z)\omega_{m-s}(z)dz = \delta_{nm}. \qquad (3.8)$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок парних значень індексів m, n. Підставимо вирази (1.3) та (3.5) у ліву частину рівності (3.8). Матимемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2m-s}(z)dz$$

$$= (2m+1)\sum_{j=\left[\frac{s}{2}\right]}^{n}(-1)^{n-j}C_{j+n}^{2j}C_{2j}^{s}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{2^{2(j-k)}C_{2k}^{k-m}}{(k+m+1)C_{2k}^{s}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^{2(k-j)+1}}.$$

Звідси, на підставі відомого результату [6, с.81-82]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 1, n=1, \\ 0, n\neq 1 \end{cases},$$

де γ – довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається в додатному напрямі, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2m-s}(z)dz = (2m+1)\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{j+n}^{2j}C_{2j}^{j-m}}{j+m+1}.$$

Аналогічно знаходимо для непарних значень індексів m, n:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n+1}^{(s)}(z)\omega_{2m+1-s}(z)dz = (2m+2)\sum_{j=m}^{n}(-1)^{n-j}\frac{C_{j+n+1}^{2j+1}C_{2j+1}^{j-m}}{j+m+2}.$$

Використавши комбінаторні тотожності (2.9) та (2.10) приходимо до рівностей (3.8).

Рівності

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n+1}^{(s)}(z)\omega_{2m-s}(z)dz = 0, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2m+1-s}(z)dz = 0$$

очевидні, бо відсутні доданки з z^{-1}. □

У роботі [11] встановлено таку умову ортогональності поліномів $P_n(z)$ комплексної змінної:

$$\int\limits_{C} F(z)P_n(z)P_m(z)dz = \delta_{nm}, \tag{3.9}$$

де C – контур, що містить одиничне коло,

$$F(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{w(x)}{z-x} dx$$

– функція Стілтьєса полінома $P_n(z)$, а $w(x)$ – вагова функція така, що

$$\int\limits_{-1}^{1} w(x) P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm}.$$

Покажемо на прикладі поліномів $U_n(z)$ Чебишева другого роду, що умови біортогональності (3.8) та ортогональності (3.9) не співпадають.

Покладемо в рівності (3.8) $s = m = 0$. Тоді

$$\int\limits_{\gamma} \omega_0(z) U_n(z) dz = \delta_{nm}, n = 0, 1, ...$$

Оскільки

$$\omega_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{2l}^l}{2^{2l}(l+1)} \frac{1}{z^{2l+1}} = z - \sqrt{z^2-1}$$

і функцією Стілтьєса полінома $U_n(z)$ є $F(z) = z - \sqrt{z^2-1}$, то $F(z) = \omega_0(z)$. У загальному випадку повинна виконуватись рівність

$$\omega_n(z) = F(z) U_n(z). \tag{3.10}$$

Функції $\omega_n(z)$, асоційовані з поліномами $U_n(z)$, мають вигляд

$$\omega_n(z) = (n+1) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{2l+n}^l}{2^{2l+n}(l+n+1)} \frac{1}{z^{2l+n+1}} = 2(z - \sqrt{z^2-1})^{n+1}.$$

Підставимо вирази функцій $\omega_n(z)$ та $F(z)$ у рівність (3.10). Матимемо

$$U_n(z) = 2(z - \sqrt{z^2-1})^n = 2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k z^{n-k} (z^2-1)^{\frac{k}{2}}$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2j} z^{n-2j} (z^2-1)^j = 2 \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2j} z^{n-2j} \sum_{r=0}^{j} (-1)^r C_j^r z^{2j-2r}$$

$$= 2 \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r z^{n-2r} \sum_{j=r}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2j} C_j^r.$$

Використовуючи відому комбінаторну тотожність [7, с. 621]

$$\sum_{j=r}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} C_j^r = 2^{n-2r-1} \frac{n}{n-2r} C_{n-r-1}^r,$$

одержимо

$$U_n(z) = n \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{1}{n-r} C_{n-r}^r z^{n-2r}.$$

Останній вираз не співпадає з явними формулами (1.1) для поліномів $U_n(z)$. Тому рівність (3.10) не виконується.

Твердження 3.2. *Асоційовані функції $\omega_{n-s}(z)$ мають інтегральне зображення*

$$\omega_{n-s}(z) = \frac{1}{\left\|U_n^{(s)}\right\|^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{U_n^{(s)}(x)\left(1-x^2\right)^{s+\frac{1}{2}}}{z-x} dx, \tag{3.11}$$

де $\left\|U_n^{(s)}\right\|^2 = \dfrac{\pi(2s+1)! C_{n+s+1}^{2s+1}}{2(n+1)}$.

Доведення. Запишемо для поліномів $U_n^{(s)}(z)$ інтегральну формулу Коші

$$U_n^{(s)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{U_n^{(s)}(z)}{z-x} dz, \tag{3.12}$$

де γ – контур, який є границею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Підставивши співвідношення (3.12) в (2.1), одержимо

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{U_{2n}^{(s)}(z)}{z-x} dz \right) U_m^{(s)}(x) \left(1-x^2\right)^{s+\frac{1}{2}} dx = \left\|U_n^{(s)}\right\|^2 \delta_{nm}.$$

Змінюючи у лівій частині останньої рівності порядок інтегрування та поділивши її на $\left\|U_n^{(s)}\right\|^2$, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} U_n^{(s)}(z) \frac{1}{\left\|U_n^{(s)}\right\|^2} \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{U_n^{(s)}(x)\left(1-x^2\right)^{s+\frac{1}{2}}}{z-x} dx \right) dz = \delta_{nm}.$$

Звідси на підставі співвідношень (3.8), приходимо до зображення (3.11). □

Твердження 3.3. *Для асоційованих функцій $\omega_{n-s}(z)$ справедливі оцінки:*

$$|\omega_{n-s}(z)| \leq \frac{n+1}{2^s(s+1)!(R_0-1)R_0^{n-s}} \tag{3.13}$$

для $|z| \geq R_0$, $R_0 > 1$;

$$|\omega_{n-s}(z)| \leq \frac{n+1}{2^{s-2}(s+1)!(R-1)R^{n-s-2}} \tag{3.14}$$

для $z \in \Gamma_R$, $R > 1$.

Доведення. Враховуючи, що

$$\int_{-1}^{1} x^k U_n^{(s)}(x)(1-x^2)^{s+\frac{1}{2}}dx = 0, \quad 0 \leq k < n-s,$$

та розвинення

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}, \quad |z| > 1,$$

одержимо

$$\omega_{n-s}(z) = \frac{1}{\left\|U_n^{(s)}\right\|^2} \sum_{k=n-s}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_{-1}^{1} x^k U_n^{(s)}(x)(1-x^2)^{s+\frac{1}{2}}dx.$$

Звідси

$$|\omega_{n-s}(z)| \leq \frac{1}{\left\|U_n^{(s)}\right\|^2} \sum_{k=n-s}^{\infty} \frac{1}{|z|^{k+1}} \int_{-1}^{1} |x|^k |U_n^{(s)}(x)|(1-x^2)^{s+\frac{1}{2}}dx.$$

Використовуючи оцінку (2.4) і те, що

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{s+\frac{1}{2}}dx = \int_{0}^{\pi} \sin^{2s+2}\varphi d\varphi = \frac{(2s+1)!!}{2^{s+1}(s+1)!} = \frac{C_{2s+1}^s}{2^{2s+1}}, \tag{3.15}$$

знаходимо

$$|\omega_{n-s}(z)| \leq \frac{n+1}{2^s(s+1)!(|z|-1)|z|^{n-s}}.$$

Оскільки $|z| \geq R_0$, то ми отримаємо нерівність (3.13).

Відомо, що [2, p. 149]

$$\frac{1}{z-x} = \frac{4p}{p^2-1} \sum_{k=0}^{\infty}{}^{0} \frac{T_k(x)}{p^k}, \tag{3.16}$$

де $T_k(x)$ – поліноми Чебишева першого роду степеня k,

$$p = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}^{0} a_k T_k(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x) + \ldots.$$

Підставивши розвинення (3.16) в (3.11) і врахувавши рівність

$$\int_{-1}^{1} U_n^{(s)}(x) T_k(x) (1 - x^2)^{s+\frac{1}{2}} dx = 0, \quad k < n - s,$$

отримаємо

$$\omega_{n-s}(z) = \frac{1}{\left\|U_n^{(s)}\right\|^2} \frac{4p}{p^2 - 1} \sum_{k=n-s}^{\infty}{}^{0} \frac{1}{p^k} \int_{-1}^{1} U_n^{(s)}(x) T_k(x) (1 - x^2)^{s+\frac{1}{2}} dx.$$

Використовуючи нерівність [2, p. 46] $|T_k(x)| \leq 1$, $|x| \leq 1$, оцінку (2.5) і співвідношення (3.15), знаходимо, що

$$|\omega_{n-s}(z)| \leq \frac{(n+1)|p|}{2^{s-2}(s+1)!|p^2 - 1|} \sum_{k=n-s}^{\infty} \frac{1}{|p|^k}$$
$$= \frac{(n+1)|p|^2}{2^{s-2}(s+1)!|p^2 - 1||p|^{n-s}} \leq \frac{n+1}{2^{s-2}(s+1)!(|p|^2 - 1)^2 |p|^{n-s-2}}.$$

Оскільки $z \in \Gamma_R$, то $p = z + \sqrt{z^2 - 1} = Re^{i\varphi}$, $|p| = R$ і ми одержимо оцінку (3.14). □

Теорема 3.2. *Справедливе розвинення*

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{n=s}^{\infty} U_n^{(s)}(z) \omega_{n-s}(t), \tag{3.17}$$

яке рівномірно збігається для $t \in \overline{D}_\rho^\infty$, $z \in \overline{D}_r^0$, *де* ρ, r *– будь-які числа, що задовольняють умови* $0 < r < \infty$, $\rho > \max\{1, r\}$, $\overline{D}_\rho^\infty$ *– замкнена область з границею* Γ_ρ, *що містить нескінченно віддалену точку,* $\overline{D}_r^0$ *– замкнена область з границею* Γ_r, *що містить нульову точку.*

Доведення. Підставивши у праву частину рівності (3.17) вирази (3.5) та (3.6) для асоційованих функцій, отримаємо

$$\sum_{n=s}^{\infty} U_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(t) = \sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} U_{2n}^{(s)}(z)\omega_{2n-s}(t) + \sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} U_{2n+1}^{(s)}(z)\omega_{2n+1-s}(t)$$

$$= \frac{1}{s!}\left[\sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty} (2n+1)U_{2n}^{(s)}(z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{C_{2k}^{k-n}}{2^{2k}(k+n+1)C_{2k}^{s}}\frac{1}{t^{2k-s+1}}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty} (2n+2)\,U_{2n+1}^{(s)}(z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{C_{2k+1}^{k-n}}{2^{2k+1}\,(k+n+2)\,C_{2k+1}^{s}}\frac{1}{t^{2k-s+2}}\right].$$

Змінивши в двох останніх сумах порядок сумування та врахувавши співвідношення (2.7) та (2.8), матимемо

$$\sum_{n=s}^{\infty} U_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(t) = \frac{1}{s!}\left[\sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}C_{2k}^{s}}\frac{1}{t^{2k-s+1}}\sum_{n=\left[\frac{s}{2}\right]}^{k}\frac{(2n+1)C_{2k}^{k-n}}{n+k+1}U_{2n}^{(s)}(z)\right.$$

$$\left. + \sum_{k=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}C_{2k+1}^{s}}\frac{1}{t^{2k-s+2}}\sum_{n=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{k}\frac{(2n+2)\,C_{2k+1}^{k-n}}{n+k+2}U_{2n+1}^{(s)}(z)\right]$$

$$= \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]}^{\infty}\frac{z^{2k-s}}{t^{2k-s+1}} + \sum_{k=\left[\frac{s-1}{2}\right]}^{\infty}\frac{z^{2k-s+1}}{t^{2k-s+2}} = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{z}\right)^{s}\sum_{m=s}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{m} = \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{j} = \frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд в (3.17) рівномірно збіжний для $t \in \overline{D}_{\rho}^{\infty}$, $z \in \overline{D}_{r}^{0}$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty$, $\rho > \max\{1, r\}$.

Врахувавши оцінки (2.5) та (3.13), отримаємо

$$\left|\sum_{n=s}^{\infty} U_n^{(s)}(z)\omega_{n-s}(t)\right| \le \sum_{n=s}^{\infty}\left|U_n^{(s)}(z)\right|\,|\omega_{n-s}(t)|$$

$$\le \frac{1}{(s+1)(\rho-1)}\sum_{n=s}^{\infty}(n+1)C_{n+s+1}^{2s+1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-s}. \tag{3.18}$$

На підставі асимптотичної рівності

$$(n+1)C_{n+s+1}^{2s+1} \sim \frac{n^{2s+2}}{(2s+1)!} \tag{3.19}$$

ряд у правій частині нерівності (3.18) еквівалентний ряду

$$\frac{2}{(2s+2)!(\rho-1)}\sum_{n=s_0}^{\infty} n^{2s+2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-s},$$

який збігається при $\rho > r$. Звідси випливає, що ряд у співвідношенні (3.17) збігається рівномірно у зазначених областях. □

4. Розвинення аналітичних функцій за поліномами $U_n^{(s)}(z)$

Теорема 4.1. *Нехай $f(z)$ – функція комплексної змінної, однозначна та аналітична у відкритій області D_R, границею якої є еліпс Γ_R, $1 < R \le \infty$, з рівнянням (2.3), і обмежена на Γ_R, тобто*

$$|f(z)| \le M. \tag{4.1}$$

Тоді ряд

$$\sum_{n=s}^{\infty} L_{n-s}(f)U_n^{(s)}(z) \tag{4.2}$$

рівномірно збігається в замкненій області $\overline{D}_r$, обмеженій еліпсом Γ_r, де $1 \le r < R$.

Доведення. Замінюючи в рівності (3.7) контур інтегрування C на Γ_R і використовуючи нерівності (4.1) та (3.14), отримаємо оцінку на коефіцієнти $L_{n-s}(f)$:

$$|L_{n-s}(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R} |f(z)||\omega_{m-s}(z)|dz \le \frac{M(n+1)}{\pi 2^{s-1}(s+1)!(R-1)R^{n-s-2}}\int\limits_{\Gamma_R} dz.$$

Оскільки еліпс Γ_R має осі $2a = R + \dfrac{1}{R}$ та $2b = R - \dfrac{1}{R}$, то

$$\int\limits_{\Gamma_R} dz = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + \frac{1}{R^2} - 2\cos 2\varphi}\, d\varphi$$

$$\le 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R + \frac{1}{R})d\varphi = \frac{\pi(R^2+1)}{R}.$$

Тому

$$|L_{n-s}(f)| \le \frac{M(n+1)(R^2+1)}{2^{s-2}(s+1)!(R-1)R^{n-s-2}}.$$

Звідси, згідно з (2.5)

$$\left|\sum_{n=s}^{\infty} L_{n-s}(f)U_n^{(s)}(z)\right| \le \sum_{n=s}^{\infty} |L_{n-s}(f)| \left|U_n^{(s)}(z)\right|$$
$$\le \frac{4M(R^2+1)R^2}{(s+1)(R-1)} \sum_{n=s}^{\infty}(n+1)C_{n+s+1}^{2s+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-s}.$$

Останій ряд на підставі асимптотичної рівності (3.19) збіжний для $r < R$. Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (4.2) у зазначеній області. □

Позначимо $U_n^{(s)}(z) = Q_{n-s}(z)$.

Приклад 4.1. Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{1}{a-z}$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Із співвідношення (3.17) одержимо

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=s}^{\infty} \omega_{n-s}(a)U_n^{(s)}(z), \quad |a| > |z|,$$

де $\omega_{n-s}(a)$ визначені співвідношенням (3.4).

Приклад 4.2. Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{a}{a^2-z^2}$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Оскільки для поліномів Гегенбауера $G_n^{\lambda}(z)$ виконується співвідношення [3, с. 177]

$$G_n^{\lambda}(-z) = (-1)^n G_n^{\lambda}(z),$$

то, згідно (2.2), отримаємо

$$U_n^{(s)}(-z) = (-1)^{n-s}U_n^{(s)}(z). \tag{4.3}$$

Використовуючи рівність

$$\frac{1}{a^2-z^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-z} + \frac{1}{a+z}\right),$$

співвідношення (4.3) та приклад 4.1, знаходимо

$$\frac{a}{a^2-z^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=s}^{\infty}\omega_{n-s}(a)U_n^{(s)}(z) + \sum_{n=s}^{\infty}\omega_{n-s}(a)U_n^{(s)}(-z)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=s}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-s}\right)\omega_{n-s}(a)U_n^{(s)}(z) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+(-1)^m\right)\omega_m(a)Q_m(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $m = 2k$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k}(a) Q_{2k}(z), \quad |a| > |z|.$$

Приклад 4.3. Розкласти функцію $\frac{z}{a^2 - z^2}$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Використовуючи рівність

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \frac{a + z - a}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a - z} - \frac{a}{a^2 - z^2},$$

приклади 4.1 та 4.2, матимемо

$$\frac{z}{a^2 - z^2} = \sum_{n=s}^{\infty} \omega_{n-s}(a) U_n^{(s)}(z) - \frac{1}{2} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 + (-1)^{n-s}\right) \omega_{n-s}(a) U_n^{(s)}(z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 - (-1)^{n-s}\right) \omega_{n-s}(a) U_n^{(s)}(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^m\right) \omega_m(a) Q_m(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $m = 2k + 1$, тому

$$\frac{a}{a^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+1}(a) Q_{2k+1}(z), \quad |a| > |z|.$$

Приклад 4.4. Розкласти функцію $f(z) = e^{az}$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Оскільки $f^{(j)}(0) = a^j$, то із співвідношення (3.3) знаходимо

$$L_{n-s}(f) = \frac{2(n+1)}{a^{s+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+n+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2l+n+1} = \frac{2(n+1)}{a^{s+1}} I_{n+1}(a),$$

де $I_\nu(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – модифіковані функції Бесселя першого роду [3, с. 13]. Тому

$$e^{az} = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} (n+1) I_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z). \tag{4.4}$$

Із співвідношення (4.4), враховуючи рівність

$$I_n(iz) = i^n J_n(z),$$

де $J_\nu(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)} \left(\dfrac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ — функції Бесселя першого роду порядку ν [3, с. 13], та співвідношення (4.3), можна отримати такі розвинення за поліномами $U_n^{(s)}(z)$:

$$e^{-az} = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n-s}(n+1) I_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z), \tag{4.5}$$

$$e^{iaz} = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} (n+1) i^{n-s} J_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z), \tag{4.6}$$

$$e^{-iaz} = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n-s}(n+1) i^{n-s} J_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z). \tag{4.7}$$

Приклад 4.5. Розкласти функцію $f(z) = \sin az$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Оскільки $\sin az = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iaz} - e^{-iaz}\right)$, то, враховуючи співвідношення (4.6) та (4.7), маємо

$$\sin az = \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 - (-1)^{n-s}\right)(n+1) i^{n-s-1} J_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z)$$
$$= \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^m\right)(m+s+1) i^{m-1} J_{m+s+1}(a) Q_m(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $m = 2k+1$, тому

$$\sin az = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+s+2) J_{2k+s+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 4.6. Розкласти функцію $f(z) = \cos az$ в ряд за поліномами $U_n^{(s)}(z)$.

Враховуючи співвідношення (4.6) та (4.7), одержимо

$$\cos az = \frac{1}{2}\left(e^{iaz} + e^{-iaz}\right) = \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 + (-1)^{n-s}\right)(n+1) i^{n-s} J_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z)$$
$$= \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^m\right)(m+s+1) i^m J_{m+s+1}(a) Q_m(z).$$

В останній сумі залишаться доданки для $m = 2k$, тому

$$\cos az = \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+s+1) J_{2k+s+1}(a) Q_{2k}(z).$$

Приклад 4.7. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{sh} az$ в ряд за поліномами $U_n(z)$.

Оскільки $\operatorname{sh} az = \dfrac{1}{2}\left(e^{az} - e^{-az}\right)$, то, згідно прикладу 4.4 та розкладу (4.5), одержимо

$$\operatorname{sh} az = \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 - (-1)^{n-s}\right)(n+1) I_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z)$$

$$= \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^m\right)(m+s+1) I_{m+s+1}(a) Q_m(z)$$

$$= \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+s+2) I_{2k+s+2}(a) Q_{2k+1}(z).$$

Приклад 4.8. Розкласти функцію $f(z) = \operatorname{ch} az$ в ряд за многочленами $U_n(z)$.

Маємо

$$\operatorname{ch} az = \frac{1}{2}\left(e^{az} + e^{-az}\right) = \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{n=s}^{\infty} \left(1 + (-1)^{n-s}\right)(n+1) I_{n+1}(a) U_n^{(s)}(z)$$

$$= \frac{1}{a^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^m\right)(m+s+1) I_{m+s+1}(a) Q_m(z)$$

$$= \frac{2}{a^{s+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+s+1) I_{2k+s+1}(a) Q_{2k}(z).$$

Висновки

Методи розвинення функцій у степеневі ряди та в ряди за ортогональними поліномами і іншими ортогональними функціями однієї чи декількох змінних широко використовують при вивченні математичних моделей у фундаментальних та прикладних науках. Не менш перспективним є метод розкладу функцій за біортогональними системами функцій у комплексних областях. За певних умов для будь-якої незалежної і повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею. Відшукання коефіцієнтів рядів грунтується на властивості біортогональності і вони виражаються через похідні функцій, що розкладаються в

ці ряди. Актуальною задачею є розвиток математичного апарату побудови та дослідження біортогональних систем функцій стосовно до розвинення у ряди за цими системами.

У даній роботі побудовано асоційовані функції, біортогональні на замкнених кривих комплексної площини з похідними поліномів Чебишева другого роду. Встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти в ряди за цією системою поліномів. Наведено приклади таких розкладів. З отриманих результатів у випадку $s = 0$ можна отримати аналогічні результати для поліномів Чебишева другого роду. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, що мають самостійне застосування.

Література

[1] Сегё, Г. (1962). *Ортогональные многочлены.* М.: ГИФМЛ.

[2] Пашковский, С. (1983). *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова.* М.: Наука.

[3] Бейтмен, Г., Эрдейи, А. (1973). *Высшие трансцендентные функции. Т.2.* М.: Наука.

[4] Бейтмен, Г., Эрдейи, А. (1973). *Высшие трансцендентные функции. Т.1.* М.: Наука.

[5] Полиа, Г., Сегё, Г. (1978). *Задачи и теоремы из анализа. Ч.1*, М.: Наука.

[6] Жевержеев, В.Ф., Кальницкий, Л.А., Сапогов, Н.А. (1970). *Специальный курс высшей математики для втузов.* М.: Высшая школа.

[7] Прудников, А.П., Брычков, Ю.А., Маричев, О.И. (1981). *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука.

[8] Маркушевич, А.И. (1976). *Избранные главы теории аналитических функций.* М.: Наука.

[9] Сухорольський, М.А., Достойна, В.В., Веселовська, О.В. (2017). Многочлени, споріднені з многочленами Чебишова. *Прикладні проблеми механіки і математики, 15*, 35–41.

[10] Сухорольський, М.А., Достойна, В.В., Веселовська, О.В. (2018). Система функцій, біортогональна з многочленами, спорідненими з многочленами Чебишова. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, 39*(1), 53–59.

[11] Geronimus, J. (1931). On orthogonal Polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc., 33*, 322–328.

Відомості про авторів

Ольга Володимирівна Веселовська
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-Mail: veselovskaov@gmail.com

Вероніка Володимирівна Достойна
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-Mail: v.dostoyna@gmail.com