Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 3, 437 – 447
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-3-8

УМВ

Екстремальна задача для мозаїчної системи точок

Андрій Л. Таргонський, Ірина І. Таргонська

(*Представлена О. А. Довгошиєм*)

Анотація. У геометричній теорії функцій комплексного змінного добре відомий напрям зв'язаний з оцінками добутків внутрішніх радіусів взаємно непертинних областей. Цей напрям отримав назву екстремальних задач на класах попарно неперетинних областей. Одна з задач такого типу і розглянута у цій роботі.

2010 MSC. 30C70, 30C75.

Ключові слова та фрази. Функція комплексної змінної, внутрішній радіус, попарно неперетинні області.

1. Вступ

Ця стаття належить до теорії екстремальних задач на класах попарно-неперетинних областей, що є окремим напрямком у геометричній теорії функцій комплексної змінної. Початок цієї тематики пов'язують із статтею М. А. Лаврентьєва [1]. Він знайшов максимум функціоналу, складеного з добутку конформних радіусів двох неперетинних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. У 1947 році Г. М. Голузін розв'язав подібну задачу для трьох фіксованих точок комплексної площини [2]. Після цього ця тематика почала стрімко розвиватися. У зв'язку з цим ми можемо згадати результати багатьох авторів, зокрема Ю. Є. Аленіцина, М. А. Лебедєва, Дж. Дженкінса, П. М. Тамразова, П. П. Куфарева, Г. В. Кузьміна та інших. У 1974 році П. М. Тамразов висунув ідею розгляду екстремальних задач у яких полюси квадратичних диференціалів мають певну свободу (див. [3]). В рамках цієї ідеї Г. П. Бахтіна сформулювала ряд задач з так званими "вільними полюсами"на одиничному колі (див., наприклад, [4]).

Стаття надійшла в редакцію 03.04.2020

Автор вдячний професору О. К. Бахтіну за постановку задачі та плідну дискусію.

Важливим кроком для розробки цієї тематики стали роботи В. М. Дубініна. У них він запропонував декілька методів, зокрема й метод – кусково-поділяюче перетворення, за допомогою якого він розв'язав ряд екстремальних задач для будь-яких багатозв'язних областей (див., наприклад, [5–7]). Зараз ці результати знайшли своє використання, навіть при дослідженнях у голоморфній динаміці.

В останнє десятиліття з'явився метод "керуючих функціоналів". За допомогою нього ним було розв'язано низку екстремальних проблем для так званих "променевих систем точок" (див., наприклад, [5, 8–21]).

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множина натуральних та дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай фіксовані числа $n, m, d \in \mathbb{N}$.

Систему точок $A_{n,m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}, p = \overline{1, m}\}$, назвемо (n, m)-променевою системою точок, якщо при всіх $k = \overline{1, n}$, виконуються співвідношення:

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;$$

$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k;$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

Для таких систем точок розглянемо наступні величини:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\left(\theta_{k+1} - \theta_k\right),\ k = \overline{1, n},\ \alpha_{n+1} := \alpha_1,\ \alpha_0 := \alpha_n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

При $m = 1$, $k = \overline{1, n}$ отримаємо n-променеву систему точок (див. [5, 8–16]). При виконанні умов $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$ систему точок $A_{n,m}$ будемо називати рівнокутовою.

Для довільної (n, m)- рівнокутової променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, введемо у розгляд наступний "керуючий" функціонал

$$M\left(A_{n,m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right) \cdot |a_{k,p}|,$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(t + t^{-1}\right)$.

Розглянемо систему кутових областей:

$$P_k\left(A_{n,m}\right) = \left\{w \in \mathbb{C} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\right\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для фіксованого числа $R \in \mathbb{R}^+$, розглянемо однозначну вітку багатозначної аналітичної функції

$$z_k(w) = -i\left(\frac{e^{-i\theta_k}w}{R}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{1.1}$$

яка, при кожному $k = \overline{1,n}$, реалізує однолисте та конформне відображення області P_k на праву півплощину $\mathrm{Re} z > 0$.

Нехай $\{b_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ – множина точок таких, що

$$b_k = R \cdot e^{i\frac{\pi}{n}(2k-1)},\ k = \overline{1,n},$$

Із співвідношень (1.1) нескладно помітити, що

$$z_k\left(b_k\right) = 1,\ z_k\left(a_{k+1,p}\right) = is_{m-p+1},\ z_k\left(a_{k,p}\right) = is_{m+p},\ s_j > 0, j = \overline{1,m};$$

$$s_j < 0, j = \overline{m+1,2m},\ s_1 > s_2 > ... > s_{2m},$$

$$a_{n+1,p} := a_{1,p}, k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}.$$

Для сукупності точок

$$is_j, s_j > 0, j = \overline{1,m}; s_j < 0, j = \overline{m+1,2m}; s_1 > s_2 > ... > s_m$$

на уявній осі розглянемо множину кіл Γ_j таких, що точки $-1, 1, is_j \in \Gamma_j$.

Для кожного $k = \overline{1,n}$ позначимо через

$$\begin{array}{l} \Omega_j^{(k)} := \left\{z:\ z \in \Gamma_j, 0 \le \arg z \le \pi, j = \overline{1,m}, \right\} \\ \Omega_j^{(k)} := \left\{z:\ z \in \Gamma_j, -\pi \le \arg z \le 0, j = \overline{m+1,2m}\right\}. \end{array} \tag{1.2}$$

Нехай при кожному фіксованому k, $k = \overline{1,n}$, $\left\{L_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{2m}$ – сукупність кривих таких, що

$$\begin{array}{l} L_j^{(k)} \subset \overline{P_k},\ b_k \in L_j^{(k)},\ j = \overline{1,2m}, \\ a_{k,p} \in L_{m-p+1}^{(k-1)},\ a_{k,p} \in L_{m+p}^{(k)},\ p = \overline{1,m}, \\ z_k:\ L_j^{(k)} \to \left\{z:\ z \in \Omega_j^{(k)},\ 0 \le |\arg z| \le \frac{\pi}{2}\right\}, j = \overline{1,2m}. \end{array} \tag{1.3}$$

Розглянемо відображення:

$$\zeta(z) = \frac{z-1}{z+1}, \tag{1.4}$$

яке при кожному $k = \overline{1,n}$, однолисто та конформно відображає області $\Omega_j^{(k)}$ відповідно, на систему променів $\{\zeta:\ \arg\zeta = \beta_j\}$, $j = \overline{1,2m}$, $0 \le \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_{2m}$.

У випадку, якщо $\beta_1 > 0$ повернемо отриману променеву систему на такий кут, при якому $\beta_1 = 0$. На кожному промені отриманої променевої системи оберемо $2d+1$ точку та отримаємо $(2m, 2d+1)$-променеву систему точок, яку позначимо $\mathbb{A}_{2m,2d+1}$, де

$$\nu_{j,t} \in \mathbb{A}_{2m,2d+1}, j = \overline{1,2m}, t = \overline{1,2d+1}$$

таким чином, що

$$z_k\left(\zeta(a_{k,p})\right) = \nu_{m+p,d+1}, z_{k-1}\left(\zeta(a_{k,p})\right) = \nu_{p,d+1}, z_0 := z_n, p = \overline{1,m}.$$

При кожному $k = \overline{1,n}$ розглянемо системи прообразів композиції відображень (1.1), (1.4) та позначимо відповідні системи точок

$$D^{(k)}_{2m,d} = \left\{ c^{(k)}_{j,s} \in L^{(k)}_j : \, j = \overline{1,2m}, \, s = \overline{1,d} \right\}.$$

Систему точок

$$AD_{n,m,d} = \bigcup_{k=1}^{n} D^{(k)}_{2m,d} \bigcup A_{n,m}$$

будемо називати мозаїчною.

Для довільної мозаїчної системи точок $AD_{n,m,d}$, розглянемо наступний "керуючий" функціонал

$$\mu\left(AD_{n,m,d}\right) := \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{p=1}^{m} \left| a_{k,p} \right| \cdot \prod_{j=1}^{2m} \prod_{s=1}^{d} \left| c^{(k)}_{j,s} \right| \right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Для образів довільної мозаїчної системи $AD_{n,m,d}$ при відображення (1.1), введемо у розгляд систему точок $\{\omega^*_{j,t}\}_{j=1,t=1}^{2m,2d+1}$, які є полюсами другого порядку квадратичного диференціалу:

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(z-1)^{2m-2}}{(z+1)^{6m+2}} \times$$

$$\times \frac{\left((z+1)^{2m} + (z-1)^{2m}\right)^{4d}}{\left(\left((z+1)^m - i(z-1)^m\right)^{4d-2} + \left((z+1)^m + i(z-1)^m\right)^{4d-2}\right)^2} dz^2. \tag{1.5}$$

Основні результати теорії квадратичних диференціалів можно знайти у роботі [22].

При цьому, введемо у розгляд $(2m, 2d+1)$-променеву систему точок $\mathbb{A}_{2m,2d+1}$, точки якої є полюсами квадратичного диференціалу:

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\zeta^{2m-2}\cdot\left(1+\zeta^{2m}\right)^{4d}}{\left((1-i\zeta^m)^{4d+2}+(1+i\zeta^m)^{4d+2}\right)^2}\cdot d\zeta^2. \tag{1.6}$$

Нехай $\left\{B_{k,p}, B_{j,s}^{(k)}\right\}$ — довільний набір попарно неперетинних областей мозаїчної системи $AD_{n,m,d}$ такої, що

$$a_{k,p}\in B_{k,p},\ c_{j,s}^{(k)}\in B_{j,s}^{(k)},\ B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}, B_{j,s}^{(k)}\subset P_k,$$

$$k=\overline{1,n}, p=\overline{1,m}, j=\overline{1,2m}, s=\overline{1,d}. \tag{1.7}$$

Позначимо через $r(B;a)$ внутрішній радіус області $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a\in B$ (див. [5–7, 23]).

Предметом вивчення нашої роботи є наступна задача.

Задача. Нехай $n, m, d\in\mathbb{N}$, $R\in\mathbb{R}^+$, $\iota,\kappa\geq 0$, $n\geq 2$. Потрібно визначити максимум величини

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} r^{\iota}\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)\cdot\prod_{j=1}^{2m}\prod_{s=1}^{d} r^{\kappa}\left(B_{j,s}^{(k)}, c_{j,s}^{(k)}\right)\right)$$

для довільної мозаїчної системи точок $AD_{n,m,d}$, де $\left\{B_{k,p}, B_{j,s}^{(k)}\right\}$ – довільний набір попарно неперетинних областей, що задовольняють (1.7).

Зрозуміло, що при $\kappa=0$, ці задачі узагальнюють відповідні постановки задач розглянуті у роботах [8–16].

2. Допоміжний результат

Лема 2.1. *Нехай $m, q\in\mathbb{N}$,*

$$\Omega_j=\left\{z:\ z\in\Gamma_j, 0\leq\arg z\leq\pi, j=\overline{1,m},\right\},$$

$$\Omega_j=\left\{z:\ z\in\Gamma_j, -\pi\leq\arg z\leq 0, j=\overline{m+1,2m}\right\}.$$

Тоді для довільної системи точок $\{\omega_{j,t}\}_{j=1,t=1}^{2m,q}$ такої, що

$$\begin{aligned}&\omega_{j,t}\in\Omega_j, j=\overline{1,2m}, t=\overline{1,q},\\ &0<|\arg\omega_{j,1}|<|\arg\omega_{j,2}|<|\arg\omega_{j,q}|<\tfrac{\pi}{2},\end{aligned} \tag{2.1}$$

та довільного набора попарно неперетинних областей $\{G_{j,t}\}_{j=1,t=1}^{2m,q}$, $\omega_{j,t} \in G_{j,t} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *справедлива рівність*

$$\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{q} r\left(G_{j,t},\omega_{j,t}\right) = \frac{1}{2^{2mq}} \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{q}\Big(\left|\omega_{j,t}+1\right|^2 \cdot r\left(\Lambda_{j,t},\nu_{j,t}\right)\Big),$$

де

$$\nu_{j,t} := \zeta\left(\omega_{j,t}\right),$$
$$\zeta:\ G_{j,t} \to \Lambda_{j,t},\ j=\overline{1,2m}, t=\overline{1,q},$$

а відображення $\zeta(z)$ *задано співвідношенням* (1.4).

Доведення. Функція (1.4) реалізує автоморфізм комплексної площини, при якому однолисто та конформно відображає систему точок $\{\omega_{j,t}\}_{j=1,t=1}^{2m,q}$, яка задовольняє (2.1) на $(2m,q)$-променеву систему точок $A_{2m,q} = \{\nu_{j,t}\}_{j=1,t=1}^{2m,q}$.

Зрозуміло, що $\zeta\left(1\right)=0$, $\zeta\left(-1\right)=\infty$.

Тоді маємо:

$$r\left(G_{j,t},\omega_{j,t}\right) = \frac{\left|\omega_{j,t}+1\right|^2}{2} \cdot r\left(\Lambda_{j,t},\nu_{j,t}\right),\ j=\overline{1,2m}, t=\overline{1,q}.$$

Звідси отримаємо співвідношення

$$\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{q} r\left(G_{j,t},\omega_{j,t}\right) = \frac{1}{2^{2mq}} \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{q}\Big(\left|\omega_{j,t}+1\right|^2 \cdot r\left(\Lambda_{j,t},\nu_{j,t}\right)\Big).$$

□

3. Основний результат

Теорема 3.1. *Нехай* $n, m, d \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 2$. *Тоді для довільної мозаїчної системи точок* $AD_{n,m,d}$ *та довільного набору попарно неперетинних областей* $\left\{B_{k,p}, B_{j,s}^{(k)}\right\}$, *який задовольняє умові* (1.7), *справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{s=1}^{d} r\left(B_{j,s}^{(k)},c_{j,s}^{(k)}\right)\right) \leq \left(\frac{2\sqrt{R}}{mn\left(2d+1\right)}\right)^{mn(1+2d)}$$
$$\times \mu\left(AD_{n,m,d}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1}\left|\omega_{j,t}^{*}+1\right|\right)^{n} \cdot M^{\frac{n}{2}}\left(\mathbb{A}_{2m,2d+1}\right),$$

де точки $\{\omega_{j,t}^{*}\}_{j=1,t=1}^{2m,2d+1}$, *є полюсами другого порядку квадратичного диференціалу* (1.5), *а* $(2m,2d+1)$*-променева система точок* $\mathbb{A}_{2m,2d+1}$, *точки якої є полюсами квадратичного диференціалу* (1.6).

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки мозаїчної системи $AD_{n,m,d}$ *та області системи попарно неперетинних областей* $\left\{B_{k,p}, B_{j,s}^{(k)}\right\}$, *є, відповідно, полюсами другого порядку та круговими областями квадратичного диференціалу*

$$Q(w)dw^2 = \frac{w^{n-2}}{(\Upsilon(w)+1)^{6m+2}}$$

$$\times\frac{(\Upsilon(w)-1)^{2m-2}\cdot\Big((\Upsilon(w)+1)^{2m}+(\Upsilon(w)-1)^{2m}\Big)^{4d}}{\Big(((\Upsilon(w)+1)^{m}-i\,(\Upsilon(w)-1)^{m})^{4d+2}+((\Upsilon(w)+1)^{m}+i\,(\Upsilon(w)-1)^{m})^{4d+2}\Big)^{2}}dw^2. \tag{3.1}$$

де $\Upsilon(w)=\frac{-iw^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$.

Доведення. Доведення теореми опирається на метод кусково-поділяючого перетворення, розробленого В. М. Дубініним [5–7].

Нехай

$$\omega_{m+p,d+1}^{(k)}:=z_k\left(a_{k,p}\right),\omega_{m-p+1,d+1}^{(k-1)}:=z_{k-1}\left(a_{k,p}\right),\omega_{j,s}^{(k)}:=z_k\left(c_{j,s}^{(k)}\right),$$

$$\omega_{m-p+1,d+1}^{(0)}:=z_n\left(a_{n,p}\right),z_0:=z_n(k=\overline{1,n},p=\overline{1,m},j=\overline{1,2m},s=\overline{1,d}).$$

Сімейство функцій $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$, заданих рівністю (1.1), є допустимим для кусково-поділяючого перетворення (див. напр., [5–7, 17, 18]) областей $\left\{B_{k,p}:\, k=\overline{1,n},\, p=\overline{1,m}\right\}$ відносно системи кутів $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Для довільної множини $\Delta\in\mathbb{C}$ позначимо $(\Delta)^*:=\left\{w\in\overline{\mathbb{C}}:\,\overline{w}\in\Delta\right\}$. Нехай $\Omega_{m+p,d+1}^{(k)}$ позначає зв'язну компоненту множини $z_k\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_k\right)\bigcup\left(z_k\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_k\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{m+p,d+1}^{(k)}$, а $\Omega_{m-p+1,d+1}^{(k-1)}$ – зв'язну компоненту множини $z_{k-1}\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(z_{k-1}\left(B_{k,p}\bigcap\overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, яка містить точку $\omega_{m-p+1,d+1}^{(k-1)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\overline{P}_0:=\overline{P}_n$. Пара областей $\Omega_{m+p,d+1}^{(k)}$ и $\Omega_{m-p+1,d+1}^{(k-1)}$ є результатом поділяючого перетворення області $B_{k,p}$ відносно сімейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\{z_{k-1},z_k\}$ в точці $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Аналогічно, при кожному $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,2m}$, $s=\overline{1,d}$, позначимо через $\Omega_{j,s}^{(k)}$ и $\Omega_{j,2d-s+2}^{(k)}$ – результати поділяючого перетворення області $B_{j,s}^{(k)}$ відносно сімейств P_k, z_k в точці $c_{j,s}^{(k)}$, яка містить, відповідно, точки $\omega_{j,s}^{(k)}$, $\omega_{j,2d-s+2}^{(k)}$. Зрозуміло, що $\Omega_{j,t}^{(k)}$ є, взагалі кажучи, багатозв'язними областями, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,2m}$, $t=\overline{1,2d+1}$.

З формули (1.1) отримуємо наступні асимптотичні рівності

$$\left|z_k(t) - z_t(a_{k,p})\right| \sim \frac{1}{R^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left|a_{k,p}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_t, \quad k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}, \quad t = k-1, k. \tag{3.2}$$

З теореми 1.9 [7] (див. також [5,6,18]) та формул (3.2) отримаємо нерівність

$$r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{2 \cdot R^{\frac{n}{2}}}{n\left|a_{k,p}\right|^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$\times \left\{ r\left(\Omega^{(k)}_{m+p,d+1}, \omega^{(k)}_{m+p,d+1}\right) \cdot r\left(\Omega^{(k-1)}_{m-p+1,d+1}, \omega^{(k-1)}_{m-p+1,d+1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}. \tag{3.3}$$

Для областей $B^{(k)}_{j,s}$ відносно сімейств P_k, z_k в точці $c^{(k)}_{j,s}$, в результаті поділяючого перетворення отримаємо наступні співвідношення

$$r\left(B^{(k)}_{j,s}, c^{(k)}_{j,s}\right) = \frac{2 \cdot R^{\frac{n}{2}}}{n\left|c^{(k)}_{j,s}\right|^{\frac{n}{2}-1}} \cdot \left[r\left(\Omega^{(k)}_{j,s}, \omega^{(k)}_{j,s}\right) \cdot r\left(\Omega^{(k)}_{j,2d-s+2}, \omega^{(k)}_{j,2d-s+2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k = \overline{1,n}, j = \overline{1,2m}, s = \overline{1,d}. \tag{3.4}$$

Тоді з (3.3) та (3.4) отримаємо

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{s=1}^{d} r\left(B^{(k)}_{j,s}, c^{(k)}_{j,s}\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(AD_{n,m,d}\right) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{mn(1+2d)} \cdot R^{\frac{mn}{2}(1+2d)} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1} r\left(\Omega^{(k)}_{j,t}, \omega^{(k)}_{j,t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи лему, з попередньої нерівності, отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{s=1}^{d} r\left(B^{(k)}_{j,s}, c^{(k)}_{j,s}\right)\right) \leq \mu\left(AD_{n,m,d}\right) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{mn(1+2d)}$$

$$\times R^{\frac{mn}{2}(1+2d)} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{2m(2d+1)}} \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1}\left(\left|\omega^{(k)}_{j,t}+1\right|^{2} \cdot r\left(\Lambda^{(k)}_{j,t}, \nu^{(k)}_{j,t}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{mn(1+2d)} \cdot R^{\frac{mn}{2}(1+2d)} \cdot \mu\left(AD_{n,m,d}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1}\left|\omega_{j,t}^{(k)}+1\right|\right)$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1} r\left(\Lambda_{j,t}^{(k)}, \nu_{j,t}^{(k)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.5)$$

де при кожному $k=\overline{1,n}$

$$\nu_{j,t}^{(k)} := \zeta\left(\omega_{j,t}^{(k)}\right),$$

$$\zeta:\, G_{j,t}^{(k)} \to \Lambda_{j,t}^{(k)},\ j=\overline{1,2m}, t=\overline{1,2d+1}.$$

При кожному $k=\overline{1,n}$, система точок $\left\{\nu_{j,t}^{(k)}\right\}_{j=1,t=1}^{2m,2d+1}$ є $(2m,2d+1)$-променевою системой точок.

Використовуючи наслідок 3.1.5 роботи [5], при кожному $k=\overline{1,n}$, маємо

$$\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1} r\left(\Lambda_{j,t}^{(k)}, \nu_{j,t}^{(k)}\right) \le \left(\frac{2}{m\left(2d+1\right)}\right)^{2m(2d+1)} \cdot M\left(\mathbb{A}_{2m,2d+1}\right), \quad (3.6)$$

причому знак рівності досягається, коли точки $\left\{\nu_{j,t}^{(k)}\right\}_{j=1,t=1}^{2m,2d+1}$ та області $\left\{\Lambda_{j,t}^{(k)}\right\}_{j=1,t=1}^{2m,2d+1}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (1.6)

З (3.5)), враховуючи (3.6)), отримаємо наступні співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \cdot \prod_{j=1}^{2m}\prod_{s=1}^{d} r\left(B_{j,s}^{(k)}, c_{j,s}^{(k)}\right)\right) \le \left(\frac{2\sqrt{R}}{mn\left(2d+1\right)}\right)^{mn(1+2d)}$$

$$\times \mu\left(AD_{n,m,d}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{2m}\prod_{t=1}^{2d+1}\left|\omega_{j,t}^{(k)}+1\right|\right) \cdot \left(M\left(\mathbb{A}_{2m,2d+1}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Квадратичний диференціал (1.5) отримаємо з диференциалу (1.6) з допомогою заміни (1.4). А квадратичний диференціал (3.1) отримаємо з диференциалу (1.5) з допомогою заміни

$$z(w) = \frac{-iw^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}.$$

$\square$

Література

[1] Lavrent'ev, M. A. (1934). On the theory of conformal mappings. *Tr. Fiz.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 5*, 159–245.

[2] Goluzin, G. M. (1966). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Nauka, Moscow.

[3] Tamrazov, P. M. (1968). Extreme conformal mappings and poles of quadratic differentials. *Izv. An SSSR., 32* (5), 1033–1043.

[4] Bakhtina, G.P. (1975). *Variational methods and quadratic differentials in problems for disjoint domains.* PhD thesis, Kiev (in Russian).

[5] Bakhtin, A. K., Bakhtina, G. P., Zelinskii, Yu. B. (2008). *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis.* Inst. Math. NAS Ukraine, Kiev (in Russian).

[6] Dubinin, V. N. (1988). Separating transformation of domains and problems of extremal division. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Ros. Akad. Nauk, 168*, 48–66 (in Russian).

[7] Dubinin, V. N. (1994). Method of symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Usp. Mat. Nauk, 49*(1), 3–76.

[8] Bakhtin, A. K. (2009). Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J., 61*(5), 716–733.

[9] Bakhtin, A. K., Targonskii, A. L. (2005). Extremal problems and quadratic differential. *Nonlin. Oscillations, 8*(3), 296–301.

[10] Targonskii, A. L. (2008). Extremal problems of partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Dop. NAN Ukr., 9*, 31–36 (in Russian).

[11] Targonskii, A. (2014). Extremal problems on the generalized (n; d)-equiangular system of points. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 22*(2), 239–251.

[12] Targonskii, A. (2016). Extremal problem (2n; 2m-1)-system points on the rays. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 24*(2), 283–299.

[13] Targonskii, A. L. (2013). Extremal problems for partially non-overlapping domains on equiangular systems of points. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, 63*(1), 57–63.

[14] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2016). On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere. *International Journal of Advanced Research in Mathematics, 4*, 1–7.

[15] Bakhtin, A. K., Targonskii, A. L. (2011). Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J., 63*(7), 999–1012.

[16] Bakhtin, A. K., Targonskii, A. L. (2006). Some extremal problems in the theory of nonoverlapping domains with free poles on rays. *Ukr. Math. J., 58*(12), 1950–1954

[17] Dubinin, V. N. (1997). Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications. *Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst., 237*, 56–73. (in Russian).

[18] Dubinin, V. N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Dal'nayka, Vladivostok (in Russian).

[19] Targonskii, A. (2017). An extremal problem for the nonoverlapping domains. *Ukr. Math. Bull., 14*(1), 126–134. Transl. in: (2017). *J. Math. Sci., 227*(1), 98–104.

[20] Targonskii, A., Targonskaya, I.(2018). Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Ukr. Math. Bull., 15*(1), 94–102. Transl. in: (2017). *J. Math. Sci., 235*(1), 74–80.

[21] Targonskii, A. L. (2018). About one extremal problem for projections of the points on unit circle. *Ukr. Math. Bull., 15*(3), 418–430.

[22] Jenkins, J. A. (1958). *Univalent functions and conformal mapping*, Springer, Berlin.

[23] Hayman, W. K. (1958). *Multivalent functions.* Cambridge University, Cambridge.

Відомості про авторів

Андрій Леонідович Таргонський

Житомирський державний університет ім. І. Франко, Житомир, Україна
E-Mail: targonsk@zu.edu.ua

Ірина Ігорівна Таргонська

Житомирський державний університет ім. І. Франко, Житомир, Україна
E-Mail: targonsk@zu.edu.ua