Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 3, 313 – 324
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-3-2

Нелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем

Сергій М. Чуйко, Ольга В. Нєсмєлова

(Представлена В. Я. Гутлянськuм)

Анотація. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Побудовано вдосконалену класифікацію та збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

2010 MSC. 34B15.

Ключові слова та фрази. Диференціально-алгебраїчні системи, нелінійні крайові задачі, ітераційні схеми.

1. Постановка задачі

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon)\in \mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot)\in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [1, 2]

$$A(t)z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1.2}$$

Розв'язки крайової задачі (1.1), (1.2) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t)\in \mathbb{C}^1[a,b]$ породжуючої нетерової $(n\neq k)$ крайової задачі [1, 3–6]

$$A(t)z_0'(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{1.3}$$

Стаття надійшла в редакцію 11.04.2020

Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

Тут $A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ – неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ – неперервний вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ – нелінійна функція, неперервно-диференційовна за невідомою $z(t,\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a,b]$ і неперервна по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ – лінійний і $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : \mathbb{C}[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^k$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою $z(t,\varepsilon)$ і неперервний по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0,\varepsilon_0]$. Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1.1), (1.2) узагальнює численні постановки нелінійних крайових задач [1]. На відміну від статті [7] досліджуємо випадок виродженості [6] породжуючої крайової задачі (1.3), а саме: $P_{A^*}(t) \neq 0$; тут $P_{A^*}(t)$ – ортопроектор [1]: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t))$. Вироджена система (1.3), взагалі кажучи, не розв'язна відносно похідної.

2. Умови розв'язності

Припустимо, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме: $1 \leq \operatorname{rank} A(t) = \sigma_0$. Як відомо [6], довільна $(m\times n)$-матриця $A(t)$ у визначеному базисі може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t)\cdot J_{\sigma_0}\cdot S_0(t),\quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix},\quad R_0(t) \in \mathbb{C}_{m\times m}[a,b];$$

тут $R_0(t)$ і $S_0(t)$ – невироджені матриці: $S_0(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a,b]$. Заміна змінної

$$y(t) = \operatorname{col}\ (u(t),v(t)) \in \mathbb{C}^1_n[a,b],\quad u(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_0}[a,b],\quad v(t) \in \mathbb{C}^1_{n-\sigma_0}[a,b]$$

приводить систему (1.3) до вигляду

$$u'(t) = C^{(0)}_{11}(t)u(t) + C^{(0)}_{12}(t)v(t) + g^{(0)}_1(t), \tag{2.1}$$

$$C^{(0)}_{21}(t)u(t) + C^{(0)}_{22}(t)v(t) + g^{(0)}_2(t) = 0. \tag{2.2}$$

Тут $P_{D_0^*}(t)$ – матриця-ортопроектор: $P_{D_0^*}(t) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \to \mathbb{N}(D_0^*(t))$, крім того

$$R_0^{-1}(t)f(t) := \operatorname{col}\ \left(g^{(0)}_1(t),\, g^{(0)}_2(t)\right).$$

Рівняння (2.2) розв'язне тоді і тільки тоді, коли $P_{D_0^*}(t)g^{(0)}_2(t) \equiv 0$; у цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2.2)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(t) - D_0^+(t)g^{(0)}_2(t),\quad D_0(t) := \left[C^{(0)}_{21}(t); C^{(0)}_{22}(t)\right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0)\times n}$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(t)$ – $(n \times \rho_0)$ – матриця, утворена з ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(t)$ – матриці-ортопроектора: $P_{D_0}(t) \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(D_0(t))$. Позначивши

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{ col } (P_1^{(0)}(t),\ P_2^{(0)}(t)),$$

$$D_0^+(t)g_2^{(0)}(t) = - \text{ col } \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t)\right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a,b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\varphi'(t) = B_1(t)\varphi(t) + f_1(t), A_1(t) := P_1^{(0)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times \rho_0}; \qquad (2.3)$$

тут

$$B_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)P_1^{(0)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)P_2^{(0)}(t) - A_1'(t),$$
$$\text{rank } A_1(t) := \sigma_1 = \sigma_0 \le \rho_0,$$

крім того

$$f_1(t) := C_{11}^{(0)}(t)f_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(0)}(t)f_2^{(1)}(t) + g_1^{(0)}(t) - \left(f_1^{(1)}(t)\right)'.$$

За умови [6]

$$P_{A^*} \neq 0,\ P_{A_1^*} \equiv 0,\ P_{D_0^*}f_1(t) \equiv 0, \qquad (2.4)$$

система (2.3) розв'язна відносно похідної

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\varphi + \mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)),$$
$$\mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)) := A_1^+(t)f_1(t) + P_{A_{\rho_1}}(t)\nu_1(t).$$

Тут $P_{A_1^*}(t)$ – матриця-ортопроектор [1]: $P_{A_1^*}(t) \ : \ \mathbb{R}^{\sigma_0} \to \mathbb{N}(A_1^*(t))$, $P_{A_{\rho_1}}(t)$ – $(n \times \rho_1)$ – матриця, утворена із ρ_1 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_0 \times \rho_0)$– матриці-ортопроектора $P_{A_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(A_1(t))$. Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умови (2.4) система (1.3) має розв'язок вигляду [6]

$$z_0(t, c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K\Big[f(s), \nu_1(s)\Big](t), \quad \nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a;b], \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

де

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t),$$
$$K\Big[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\,ds.$$

$$K\Big[f(s),\nu_1(s)\Big](t) := P_{D_{\rho_0}} S_0^{-1}(t) K\Big[\mathfrak{F}_1(s,\nu_1(s))\Big](t) - S_0^{-1}(t) D_0^{+}(t) g_2^{(0)}(t)$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a)=0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.3). За умови (2.4) будемо казати, що для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (1.3) має місце виродження першого порядку. Покладемо

$$\nu_1(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p \times w}[a,b], \quad \gamma \in \mathbb{R}^w;$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a)=0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1.3) зображуваний у вигляді

$$K\Big[f(s),\nu_1(s)\Big](t) = K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](t) + K\Big[P_{A_{\rho_p}}(s)\nu_1(s)\Big](t).$$

Позначимо матриці

$$\mathcal{D} := \Big[\ Q\ ;\ \ell K\Big[P_{A_{\rho_1}}(s)\Psi(s)\Big](\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{k\times(\rho_1+w)}, \quad Q := \ell X_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times\rho_1}.$$

Породжуюча задача (2.3) розв'язна за умови

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](\cdot), \quad \check{c} := \mathrm{col}\,(c_{\rho_1},\gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_1+w}. \qquad (2.5)$$

Рівняння (2.5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (2.6)$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$. За умови (2.6) розв'язок [8]

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

породжуючої задачі (1.3) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t) := K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](t)$$

$$+\Big\{X_1(t); K\Big[P_{A_{\rho_1}}\Psi(s)\Big](t)\Big\}\mathcal{D}^{+}\Big\{\alpha - \ell K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Матрицю $X_r(t)$ утворено з r лінійно незалежних стовпців матриці

$$\Big\{X_p(t); K\Big[P_{A_{\rho_p}}(s)\Psi(s)\Big](t)\Big\}P_{\mathcal{D}}.$$

Розв'язки крайової задачі (1.1), (1.2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$. Для знаходження вектора $x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], x(t,\cdot) \in \mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0],\ x(t,0) \equiv 0$ приходимо до задачі

$$A(t)x'(t,\varepsilon) = B(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\, Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\ \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2.7}$$

Невироджена заміна змінної $y(t) = S_0(t)x(t)$ приводить систему (2.7) до вигляду

$$J_{\sigma_0}y'(t) = C_0(t)y(t) + \varepsilon\, R_0^{-1}(t)Z(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{2.8}$$

Заміна змінної

$$y(t) = \text{ col }(u(t),v(t)) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

перетворює систему (2.8):

$$u'(t) = C_{11}^{(0)}(t)u(t) + C_{12}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon\, Z_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{2.9}$$

$$C_{21}^{(0)}(t)u(t) + C_{22}^{(0)}(t)v(t) + \varepsilon\, Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = 0; \tag{2.10}$$

тут

$$R_0^{-1}(t)Z(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) :=$$
$$= \text{ col }(Z_1(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\ Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)).$$

Рівняння (2.10) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{D_0^*}(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \equiv 0, \tag{2.11}$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (2.10) має зображення

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\mu(t) - D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{ col }(P_1^{(0)}(t),\ P_2^{(0)}(t)).$$

Позначивши добуток

$$D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = -\text{ col }(M(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), N(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\mu(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a,b]$ нелінійної диференціально-алгебраїчної системи

$$A_1(t)\mu'(t) = B_1(t)\mu(t) + \varepsilon\, Y(y(t,\varepsilon),y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon); \tag{2.12}$$

тут

$$Y(y(t,\varepsilon),y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon) := C_{11}^{(0)}(t)M(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

$$+C_{12}^{(0)}(t)N(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+Z_1(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)-M_y'(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\,\mu'(t).$$

За умови (2.4) система (2.12), принаймі однозначно, розв'язна відносно похідної

$$\frac{d\mu}{dt}=A_1^+(t)B_1(t)\mu+\varepsilon\,\mathfrak{F}_1(y(t,\varepsilon),y'(t,\varepsilon),\nu_1(t),t); \tag{2.13}$$

тут

$$\mathfrak{F}_1(y(t,\varepsilon),y'(t,\varepsilon),\nu_1(t),t):=A_1^+(t)Y(y(t,\varepsilon),y'(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+P_{A_{\rho_1}}(t)\nu_1(t).$$

За умови (2.4) та (2.11) система (2.7) має розв'язок вигляду

$$x(t,c_{\rho_1}(\varepsilon))=X_1(t)c_{\rho_1}(\varepsilon)+\varepsilon\,K\Big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)\Big](t),\quad c_{\rho_1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\rho_1};$$

тут

$$K[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)](t):=-S_0^{-1}(t)D_0^+(t)Z_2(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

$$-S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t)\int_a^t U_1^{-1}(s)\,A_1^+(s)Y(y(s,\varepsilon),y'(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds.$$

У критичному випадку задача (1.1), (1.2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*}\{J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell K[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_1(s)](\cdot)\}=0. \tag{2.14}$$

Необхідні умови існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.1), (1.2) у критичному випадку визначає наступна лема.

Лема 2.1. *За умови* (2.4) *та* (2.6) *породжуюча диференціально-алгебраїчна задача* (1.3) *має розв'язок вигляду*

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)c_r+G[f(s);\psi(s);\alpha](t),\quad c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Припустимо, що нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1.1), (1.2) *має розв'язок, який при* $\varepsilon=0$ *перетворюється на породжуючий* $z(t,0)=z_0(t,c_r^*)$. *За додаткової умови* (2.11) *для існування розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі* (1.1), (1.2) *необхідно виконується умова*

$$F(c_r^*):=P_{\mathcal{D}^*}\{J(z_0(\cdot,c_r^*),\varepsilon)-\ell K[Z(z_0(s,c_r^*),s,0),\nu_1(s)](\cdot)\}=0. \tag{2.15}$$

По аналогії з монографією [1], рівняння (2.15) будемо називати рівнянням для породжуючих констант.

Контрприклад 2.1. Умови доведеної леми не виконуються у випадку задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків

$$z(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t,\varepsilon) & z_b(t,\varepsilon) & z_c(t,\varepsilon) \end{pmatrix}^*$$

диференціально-алгебраїчної системи

$$A(t)z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon); \tag{2.16}$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \\ \sin 2t \\ \cos 2t - 1 \end{pmatrix}, \quad Z(z,t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^2(t,\varepsilon)\cos t \\ -z_a^2(t,\varepsilon)\sin t \\ z_c^2(t,\varepsilon)\cos t \\ -z_c^2(t,\varepsilon)\sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*}(t) \neq 0$, остільки для лінійної диференціально-алгебраїчної системи (2.16) має місце виродження, при цьому матриця $A(t)$ може бути представлена у вигляді

$$A(t) = R_0(t)\cdot J_{\sigma_0}\cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

тут

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \ S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– невироджені матриці. У даному випадку матриця $A_1(t) = I_3$ невироджена, при цьому $P_{A_1}(t) = 0,\ P_{A_{\rho_1}}(t) = 0$, тому шуканий розв'язок породжуючої системи $z_0(t,c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t),\ c_3 \in \mathbb{R}^3$ не залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t}-1 & e^{-t} & 1-e^{-t}-t \end{pmatrix},$$

а також

$$K\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\,(t+\cos t-1) \\ -2\,(\cos t+\sin t-1) \\ 4-3\,e^{-t}-2\,t-\cos t-\sin t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної частини для породжуючої 2π-періодичної задачі для системи (2.16) визначають матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-e^{-2\pi} & 1-e^{-2\pi} & -1+e^{-2\pi}+2\pi \end{pmatrix},\ P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, диференціально-алгебраїчна 2π-періодична задача для системи (2.16) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.6). Загальний розв'язок породжуючої задачі

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t), X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\cos t-3 \\ -4\,(\cos t+\sin t) \\ 3-2\,(\cos t+\sin t) \end{pmatrix},$$

при цьому необхідну умову розв'язності нелінійної 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної задачі для системи (2.16) не виконано: $F(c_r^*) = 8\pi \neq 0$, тому 2π-періодична задача для системи (2.16) не має розв'язків, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на породжуючий $z_0(t,c_r^*)$.

Припустимо далі необхідну умову розв'язності нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.1), (1.2) виконаною. Фіксуючи один із коренів $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (2.15), розв'язок $z(t,\varepsilon)$ диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.1), (1.2) шукаємо в околі породжуючого розв'язку $z_0(t,c_r^*)$. Використовуючи неперервну диференційовність по першому аргументу функції $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку, розвинемо цю функцію в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$$
$$= Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

де $A_1(t) = Z'_z(z_0(t, c_r^*), t, 0)$. Залишок $R(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ розвинення функції $Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ за умови $Z'_\varepsilon(z_0(t, c_r^*), t, 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення. Аналогічно, в малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має місце розвинення

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

де $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) := J'_{1_z}(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$. Залишок $J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ розвинення функціоналу $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ за умови $J'_{1_\varepsilon}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) \equiv 0$ більш високого порядку малості по x і ε в околі точок $x = 0$ і $\varepsilon = 0$, ніж перші два члени розвинення. Розв'язки крайової задачі (1.1), (1.2) при цьому визначає операторна система [1]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \tag{2.17}$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](t).$$

Позначимо сталу $(d \times r)$ – вимірну матрицю

$$B_0(\psi) = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s), \Psi(s)](\cdot)\}$$

та $P_{B_0^*}(\psi)$ – ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{N}(B_0^*(\psi))$. За умови $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ для побудови принаймі одного із розв'язків операторної системи може бути використаний [1] метод простих ітерацій

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^+(\psi)\, P_{Q_d^*}\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_{k+1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$-\ell K[A_1(s)x_{k+1}^{(1)}(s, \varepsilon) + R(z_0(s, c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \Psi(s)](\cdot)\}, \tag{2.18}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G[Z(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); \Psi(s); J(z_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](t).$$

Достатню умову існування розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.1), (1.2) у критичному випадку визначає наступна теорема.

Теорема 2.1. *За умов* (2.4) *та* (2.6) *для кожного із коренів* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *рівняння* (2.15) *породжуюча диференціально-алгебраїчна задача* (1.3) *має розв'язок вигляду*

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (2.11) *та* $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ *для побудови принаймі одного із розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі* (1.1), (1.2) *можна використати ітераційну схему* (2.18).

Зазначимо, що на відміну від статей [2, 9], доведена теорема визначає умови розв'язності для нелінійної крайової задачі (1.1), (1.2) без використання центральної канонічної форми. Крім того, на відміну від статей [2, 9], умови розв'язності крайової задачі (1.1), (1.2) визначає матриця $B_0(\psi)$, яка залежить від матриці $\Psi(t)$. Довжина відрізку $[0, \varepsilon_*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (2.18), може бути оцінена, як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1], так і безпосередньо з умови стискання оператора, яка визначається системою (2.17) аналогічно [10].

Приклад 2.1. Умови доведеної теореми виконуються у випадку задачі про знаходження 2π-періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчної системи

$$A(t)z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z, t, \varepsilon); \qquad (2.19)$$

тут $A(t)$, $B(t)$ — матриці, визначені у контрприкладі, крім того

$$f(t) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t + 1 \\ -\sin 2t \end{pmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a^3(t, \varepsilon)\cos t \\ -z_a^3(t, \varepsilon)\sin t \\ z_a^2(t, \varepsilon)\cos t \\ -z_a^2(t, \varepsilon)\sin t \end{pmatrix}.$$

У даному випадку шуканий породжуючий розв'язок

$$z(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K[f(s)](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не залежить від довільної неперервної функції; тут

$$K\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 0 \\ \cos t - \sin t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задача про знаходження 2π-періодичних розв'язків диференціально-алгебраїчної системи (2.16) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (2.6). Загальний розв'язок неоднорідної частини для породжуючої задачі (2.16)

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \psi(s); \alpha](t), c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+4\sin t\\ 0\\ 2\cos t-2\sin t-1\end{pmatrix}.$$

У випадку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.16) рівняння (2.15) має розв'язок

$$c_r^*=\left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{12}\left(\frac{14\ 2^{2/3}}{\left(4+3\sqrt{78}\right)^{1/3}}-2\left(8+6\sqrt{78}\right)^{1/3}-1\right)\end{array}\right)^*,$$

якому відповідає розв'язок породжуючої задачі

$$z_0(t,c_r^*)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\frac{7\ 2^{2/3}}{\left(4+3\sqrt{78}\right)^{1/3}}+\left(8+6\sqrt{78}\right)^{1/3}+6\sin t\\ 0\\ -2+\frac{7\ 2^{2/3}}{\left(4+3\sqrt{78}\right)^{1/3}}-\left(8+6\sqrt{78}\right)^{1/3}+3\cos t-3\sin t\end{pmatrix},$$

а також матриця повного рангу B_0. Оскільки виконано умову $P_{B_0^*}=0$, остільки принаймі один розв'язок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (2.16) визначає ітераційна схема (2.18).

Запропонована у статті схема дослідження нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1.1), (1.2) аналогічно [1, 11, 12] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, у частинних похідних [13, 14].

Література

[1] Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th edition, Berlin-Boston, De Gruyter.

[2] Бойчук, А. А., Шегда, Л. М. (2009). Вироджені нелінійні крайові задачі. *Укр. мат. журн., 61*(9), 1174–1188.

[3] Campbell, S. L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program.

[4] Бояринцев, Ю. Е., Чистяков, В. Ф. (1998). *Алгебро-диффференциальные системы. Методы решения и исследования.* Новосибирск, Наука.

[5] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, К., Вища школа.

[6] Chuiko, S. M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Ukr. Math. Bull., 15*(1), 1–17. Transl. in: (2018). *J. Math. Sci., 235*(1), 2–14.

[7] Чуйко, С. М., Нєсмєлова, О. В. (2019). Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", 90*, 60–72.

[8] Чуйко, С. М. (2020). Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи. *Математические труды, 23*(1), 1–20.

[9] Перепелица, М. А., Покутный, А. А. (2013). Исследование разрешимости слабо-нелинейных дифференциально-алгебраических систем. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование", 6*(4), 55–62.

[10] Chuiko, S. M. (2006). Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem. *Nonlinear Oscillations (N.Y.), 9*(3), 405–422.

[11] Boichuk, A. A., Krivosheya, S. A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equations, 37*(4), 464–471.

[12] Chuiko, S. M. (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 38*(2), 236–244.

[13] Gutlyanskii, V., Nesmelova, O., Ryazanov, V. (2016). On a Model Semilinear Elliptic Equation in the Plane. *Ukr. Math. Bull., 13*(1), 91–105. Transl. in: (2017). *J. Math. Sci., 220*(5), 603–614.

[14] Skrypnik, I. I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163–179.

Відомості про авторів

Сергій Михайлович Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: chujko-slav@ukr.net

Ольга Володимирівна Нєсмєлова

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: star-o@ukr.net