Український математичний вісник
Том 17 (**2020**), № 3, 372 – 395
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2020-17-3-5

Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського–Бєсова

Анатолій С. Романюк, Віктор С. Романюк

(*Представлена В. П. Моторним*)

Анотація. Встановлено точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ та класів Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних за нормою простору $B_{\infty,1}$. Досліджено властивості лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у цьому просторі за допомогою тригонометричних поліномів, породжених сукупністю гармонік з "номерами", що належать до східчастих гіперболічних хрестів.

2010 MSC. 41A10, 41A35, 42A10.

Ключові слова та фрази. Класи Нікольського–Бєсова, класи Соболєва, ортопоперечник, лінійний обмежений оператор, східчастий гіперболічний хрест.

1. Вступ

В даній статті продовжуються дослідження (див. [1]) з апроксимації класів Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ періодичних функцій з однією та багатьма змінними у просторі $B_{\infty,1}$. Особливістю простору $B_{\infty,1}$, як лінійного підпростору в L_∞, є те, що його нормування здійснюється на основі розкладу функцій з L_∞ у ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ і відповідна норма у цьому просторі є більш "сильною", ніж L_∞ – норма. Як зазначено в [1], до дослідження певних апроксимаційних характеристик саме у просторі $B_{\infty,1}$ спонукає та обставина, що розв'язання задач щодо встановлення їх порядкових значень у просторі L_∞, зокрема при $d \geq 3$, за допомогою відомих методів наштовхується на низку перешкод, усунути

Стаття надійшла в редакцію 11.04.2020

ISSN 1810 – 3200.

які допоки не вдається. Водночас зазначимо, що деякі апроксимаційні характеристики певних функціональних класів у просторі $B_{\infty,1}$ вивчалися у роботах [1–4].

Результати даної роботи фактично викладені у двох пунктах. У одному з них досліджуються ортопоперечники класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ (а також схожі за означенням величини) з точки зору знаходження порядкових значень цих апроксимаційних характеристик. В іншому, об'єктами дослідження є лінійні оператори, які є оптимальними в задачі про точні за порядком значення найкращих наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів, породжених системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Q}_n}$, де множини $\mathbb{Q}_n$, $n\in\mathbb{N}$, — так звані східчасто гіперболічні хрести в $\mathbb{Z}^d$. Одним із ключових тут є питання, що стосується послідовності норм таких операторів (як операторів, що діють із L_∞ в L_∞), а саме — питання щодо обмеженості чи необмеженості цієї послідовності.

У роботі використовуються позначення та означення, запроваджені в [1]. Основні з них відтворені, а нові вводяться за необхідністю по мірі викладу матеріалу.

2. Позначення, означення та допоміжні твердження

По тексту роботи вживаються стандартні позначення $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ відповідно для множин натуральних, дійсних, невід'ємних дійсних, цілих, цілих невід'ємних чисел. Через $A^d=\prod\limits_{i=1}^{d}A$, $d\geq 2$ позначається декартів добуток d множин A, де A — одна із множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, а через C_i, $i=1,2,\ldots,$ — величини (сталі), які, зазвичай, залежать від певних параметрів, і таку залежність досить легко відстежити за контекстом, не зважаючи на те, що ці параметри не вказуються явно.

Означимо функціональні простори та класи в них. Нехай $\mathbb{R}^d$ — $d-$вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_d)$; $\pi_d:=\prod\limits_{j=1}^{d}[0,2\pi)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d:\, x_j\in[0,2\pi),\, j=\overline{1,d}\}$. Через $L_p(\pi_d)$, $1\leq p\leq\infty$, позначимо простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожною змінною функцій $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ зі скінченними нормами

$$\|f\|_p=\left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leq p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{x})|,\quad p=\infty.$$

Для $f,\, g \in L_1(\pi_d)$ означимо оператор згортки $*$ формулою

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Визначимо повний мішаний $p-$модуль гладкості порядку l функції $f \in L_p(\pi_d)$:

$$\omega_l(f, \boldsymbol{t})_p := \sup_{|h_i| \le t_i} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f\|_p, \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+.$$

Тут для $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ та $l \in \mathbb{N}$

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := \Delta^l_{h_d} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x_1, \ldots, x_d),$$

де

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_j} \Delta^{l-1}_{h_j} f(\boldsymbol{x}), \quad \Delta^0_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}),$$

$$\Delta_{h_j} f(\boldsymbol{x}) \equiv \Delta^1_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_j + h_j, \ldots, x_d) - f(\boldsymbol{x}).$$

Відомо, що

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^k_l f(x_1, \ldots, x_j + k h_j, \ldots, x_d).$$

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$ *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, *якщо скінченна її напівнорма*

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t_j > 0} \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p, & \theta = \infty, \end{cases}$$

де $l > \max\{r_i,\ i = \overline{1, d}\}$.
Норму на лінійних просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$.

Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ введені в [5] і, з одного боку, є узагальненнями відомих ізотропних просторів Бєсова [6] (у випадку $\theta = \infty$ — просторів Нікольського [7]), а з іншого, належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених Т. І. Амановим в [8].

Зазначимо, що для просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ справедливі такі вкладення за параметром θ:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_1} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_2} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p, \tag{2.1}$$

де $1 \le \theta_1 < \theta_2 \le \infty$.

В [5] простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ охарактеризовані в термінах так званого декомпозиційного нормування належних їм функцій на базі розкладу в ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$. Саме таке нормування часто використовується у доведенні належності тієї чи іншої функції простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, чи деякому класу з цього простору.

Сформулюємо результат із [5] у відповідності до прийнятих нижче означень і позначень. Для вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\, j = \overline{1,d}\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ визначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Позначимо

$$L^0_p(\pi_d) := \{f \in L_p(\pi_d) : \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}\}.$$

Нехай $p \in (1, \infty)$. В [5] доведено, що для напівнорми $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ справедливі співвідношення

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2.2}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p\,, \tag{2.3}$$

а також показано, що на множині $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ напівнорма $|\cdot|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ насправді є нормою.

Тут, і в подальшому, $\asymp$ позначає відношення слабкої еквівалентності, тобто для виразів a та b, що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a \asymp b$ означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2, які не залежать від одного істотного параметра, що $c_1 b \le a \le c_2 b$. Також використовуємо символи $\ll$ чи $\gg$ для порядкових нерівностей, тобто $a \ll b$ $(a \gg b)$, якщо існує такого ж змісту додатна величина c_3, що $a \le c_3 b$ $(b \le c_3 a)$.

Так звані порядкові (або точні за порядком) співвідношення (2.2) та (2.3) за певної їхньої модифікації мають місце і у випадках $p = 1$

та $p=\infty$. Отже, нехай $V_l(u),\ l\in\mathbb{N},\ u\in\mathbb{R}$ позначає ядро Валлє–Пуссена вигляду

$$V_l(u)=1+2\sum_{k=1}^{l}\cos ku+2\sum_{k=l+1}^{2l}\frac{2l-k}{l}\cos ku.$$

Якщо $f\in L_p(\pi_d)$, а

$$A_s(\boldsymbol{x}):=2^d\prod_{j=1}^{d}(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

$\boldsymbol{s}=(s_1,\dots,s_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ (при $s_j=0$ вважаємо, що $V_{2^{s_j-1}}(x_j)=0$), то покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}f(\boldsymbol{x})=(f*A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}).$$

Для кожного $\boldsymbol{s}$ за допомогою оператора $\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}$ визначаються деякі кратні середні $A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}):=\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}f(\boldsymbol{x})$ функції $f\in L_p(\pi_d)$, які в силу відомих властивостей оператора згортки можна подати у вигляді тригонометричного полінома з певними коефіцієнтами, залежними від f.

Отже, на додачу до співвідношень (2.2) та (2.3), можна записати: для $f\in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\cap L^0_p(\pi_d)$ справедливі співвідношення (див. зауваження 2.1 в [5], а також [8])

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}\asymp\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^d}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\quad 1\le\theta<\infty \tag{2.4}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}}\asymp\sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^d}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p\,. \tag{2.5}$$

Зауважимо, співвідношення (2.4) та (2.5) справджуються також і при $1<p<\infty$.

Оскільки у результатах фігурують відомі функціональні простори $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ та класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, то нагадаємо також і їхнє визначення. Нехай $F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_d)$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=2^d\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d}\prod_{j=1}^{d}k_j^{-r_j}\cos(k_jx_j-\frac{\alpha_j\pi}{2}),\quad r_j>0,\ \alpha_j\in\mathbb{R}.$$

Позначимо через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ лінійний простір функцій f, які можна подати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x})=\varphi(\cdot)*F_{\boldsymbol{r}}(\cdot,\boldsymbol{\alpha})=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}\varphi(\boldsymbol{y})F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.6}$$

де $\varphi \in L_p(\pi_d)$. Для $f \in W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ покладемо $\|f\|_{W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}} := \|\varphi\|_p$. Якщо функція $\varphi \in L_p(\pi_d)$ в (2.6) така, що $\|\varphi\|_p \le 1$, то відповідний клас у просторі $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Детальну інформацію щодо просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, а також про історію їхніх досліджень з точки зору апроксимації можна почерпнути з монографій [9–12] і роботи [5]. Нагадаємо лише, що для цих просторів справедливі такі вкладення:

$$\begin{aligned} &B^{\boldsymbol{r}}_{p,p} \hookrightarrow W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, \quad 1 < p \le 2; \\ &B^{\boldsymbol{r}}_{p,2} \hookrightarrow W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}, \quad 2 \le p < \infty; \\ &W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p, \quad 1 \le p \le \infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Надалі вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$ впорядковані так, що $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \dots \le r_d$, а $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ — вектор з координатами $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$ і $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$, при $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Також зазначимо, через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля у просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, а точніше,

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \{f \in L^0_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \le 1\}.$$

Замість $L_p(\pi_d)$ і $L^0_p(\pi_d)$ в подальшому іноді використовуються спрощені позначення L_p і L^0_p відповідно.

Тепер визначимо норму $\|\cdot\|_{B_{p,1}}$ у підпросторах $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, функцій $f \in L_p$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1, \infty\}$, визначається формулою

$$\|t\|_{B_{p,1}} := \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \|A_{\boldsymbol{s}}(t,\cdot)\|_p$$

(тут, очевидно, сума складається із скінченного числа доданків). Аналогічно визначається норма $\|f\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1, \infty\}$ для будь-якої функції $f \in L_p$ такої, що збігається ряд $\sum\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p$.

Отже, простори $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, фактично можна “вписати” в шкалу просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, якщо з огляду на співвідношення (2.4) вважати, що $\boldsymbol{r} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d_+$.

Зазначимо, що для $f \in B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, очевидно,

$$\|f\|_p \ll \|f\|_{B_{p,1}}. \tag{2.8}$$

Означимо апроксимаційні величини, які є основними у наших дослідженнях.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована у просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d),\ 1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i(\cdot)$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тут, і далі, $(f,u_i) := (2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$ *величина*

$$d_M^{\perp}(F;L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f\in F} \Big\| f - \sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i \Big\|_q \qquad (2.9)$$

називаєтьcя ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу F *у просторі* $L_q(\pi_d)$.

Поперечник $d_M^{\perp}(F;L_q)$ запроваджений В. М. Темляковим [13].

Поряд з поперечниками $d_M^{\perp}(\mathbb{B}_{p,\theta}^r;L_q)$ досліджуються величини $d_M^B(F;L_q),\ F=\mathbb{B}_{p,\theta}^r$, введені до розгляду також В. М. Темляковим [9]. Вони означаються такою формулою:

$$d_M^B(F;L_q) := \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap \mathcal{D}(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \qquad (2.10)$$

Тут через $L_M(B)_q$ позначена множина лінійних операторів G, що підпорядковані умовам:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значень належить підпростору вимірності M в $L_q(\pi_d)$;

б) для числа $B,\ B\ge 1$ і для будь-якого вектора $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$ $\|Ge^{i(\boldsymbol{k},\cdot)}\|_2 \le B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на підпростір вимірності M в $L_q(\pi_d)$, а також оператори, дія яких на ортонормованій системі функцій визначається за допомогою мультиплікаторів, заданих такою послідовністю $\{\lambda_l\}$, що $|\lambda_l| \le 1$ для всіх l.

Легко бачити, що величини $d_M^{\perp}(F;L_q)$ та $d_M^B(F;L_q)$ пов'язані нерівністю

$$d_M^B(F;L_q) \le d_M^{\perp}(F;L_q). \qquad (2.11)$$

Величини (2.9) і (2.10) для різноманітних функціональних класів F як у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, так і в інших функціональних просторах, досліджувалися у роботах [13–29]. З більш детальною бібліографією можна ознайомитися в монографіях [9–12].

Тепер сформулюємо декілька відомих тверджень, які згодом будуть використані.

Теорема А. *Нехай* $d \ge 1$, $1 \le p, \theta \le \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{p}$. *Тоді справедлива оцінка*

$$d_M^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \tag{2.12}$$

Зауважимо, що при $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (2.12) доведено в [24], а при $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, — в [16].

Теорема Б [16]. *Нехай* $d \ge 1$, $1 < p \le \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{p}$ *Тоді має місце оцінка*

$$d_M^B(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, L_\infty) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{2}{p}}.$$

Для формулювання наступного твердження введемо додаткові означення і позначення.

Для $n \in \mathbb{N}$ та $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^\alpha_+$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_j \le \gamma_{j+1}$, $j = \overline{1,d}$, визначимо множину

$$Q_n^{\boldsymbol{\gamma}} := \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \le n} \rho(\boldsymbol{s}),$$

де, нагадаємо, $\rho(\boldsymbol{s}) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d}\}$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+$. Множина $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}$ називається східчастим гіперболічним хрестом в $\mathbb{Z}^d$.

Далі, для функції $f \in L_1(\pi_d)$ через $S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f)$ позначимо її часткову східчасто-гіперболічну суму Фур'є

$$S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \le n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай X — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $X \hookrightarrow L_1(\pi_d)$. Для класу $F \subset X$ покладемо

$$\mathcal{E}_n^{\boldsymbol{\gamma}}(F)_X = \mathcal{E}_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(F)_X := \sup_{f \in F} \|f - S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}(f)\|_X.$$

При $d = 1$ замість $\mathcal{E}_n^{\gamma}(F)_X$ вживаємо позначення $\mathcal{E}_n(F)_X$. Зауважимо, що у такому випадку

$$S_{Q_n^{\gamma}}(f)(x) = S_n(f)(x) := \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Отже, поєднавши наслідок 1 і теорему 6 з роботи [1], можна сформулювати таке твердження.

Теорема B. *Нехай* $d \geq 1, \;\; 1 < p < \infty, \;\; 1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{p}$. *Тоді справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Сформулюємо ще одне твердження, яке часто використовується у доведеннях результатів. Нехай, як раніше, $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, а $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ та $\boldsymbol{\gamma}' = ({\gamma'}_1, \dots, {\gamma'}_d)$ такі, що ${\gamma'}_j = \gamma_j = 1$, при $j = \overline{1, \nu}$ і $1 < {\gamma'}_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$.

Лема A [9, с. 11]. Має місце оцінка

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq l} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha l} l^{\nu-1}, \quad \alpha > 0.$$

3. Оцінки апроксимаційних характеристик

Справедливе твердження.

Теорема 3.1. *Нехай* $d \geq 1, \;\; 1 < p < \infty, \;\; 1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $r_1 > \frac{1}{p}$ *мають місце співвідношення*

$$d_M^{\perp}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1}) \asymp d_M^{B}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.1}$$

Доведення. Зважаючи на нерівність (2.11), для доведення співвідношення (3.1) достатньо встановити оцінку знизу для величини $d_M^{B}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1})$ і зверху для ортопоперечника $d_M^{\perp}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1})$. Стосовно оцінки знизу величини $d_M^{B}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1})$ зауважимо, що вона є наслідком теореми A, врахувавши, що $\|f\|_{\infty} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}$ для $f \in L_{\infty}$.

Відповідна оцінка зверху ортопоперечника $d_M^{\perp}(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}, B_{\infty,1})$ випливає із теореми B, бо якщо натуральні числа M та n пов'язати співвідношенням $C_1 2^n n^{\nu-1} \leq M \leq C_2 2^n n^{\nu-1}$, де C_1, C_2 — додатні дійсні числа $(C_1 \leq C_2)$, то для певних значень C_1 і C_2

$$d^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{\infty,1}) \ll \mathcal{E}^{\gamma}_n(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 3.1 доведена. □

Умовою теореми 3.1 не охоплені випадки $p=1$ і $p=\infty$. При таких значеннях p знайдено лише порядкові значення величин $d^B_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{\infty,1})$.

Теорема 3.2. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $r_1 > 1$. Тоді справедливе співвідношення*

$$d^B_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.2}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (3.2) оцінку зверху. З цією метою за заданим натуральним числом M підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення

$$C_3 2^n n^{\nu-1} \leq M \leq C_4 2^n n^{\nu-1}, \tag{3.3}$$

де C_3, C_4 — будь-які додатні дійсні числа ($C_3 \leq C_4$), і для функції $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ в якості агрегату наближення розглянемо поліном

$$t_n(f)(\boldsymbol{x}) = t_n(f;\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

де $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$. Зрозуміло, що для певних значень C_3, C_4 у співвідношенні (3.3), оператор G, який функції f ставить у відповідність поліном такого вигляду, належить до $L_M(1)_2$.

Отже, спочатку нехай $\theta \in [1,\infty)$. У відповідності до означення норми у просторі $B_{\infty,1}$, покладаючи $\gamma(d) := \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$, можна записати

$$\|f - t_n(f)\|_{B_{\infty,1}} = \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Bigg\|_{B_{\infty,1}}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d:\,(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma}')\geq n} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \Bigg\|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-\gamma(d)} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \Bigg\|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_\infty \times \Bigg\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \Bigg\|_1 =: J_1. \tag{3.4}$$

Далі, використовуючи співвідношення

$$\|A_s\|_p \asymp 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty \tag{3.5}$$

(див., наприклад, [9], гл.2, §5), продовжимо оцінку величини J_1:

$$J_1 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},1)} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \|A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\|_1$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},1)} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1 \, 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} =: J_2. \tag{3.6}$$

Якщо $\theta > 1$, то застосувавши до виразу J_2 нерівність Гельдера для числових послідовностей, взявши до уваги лему А, маємо при $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$

$$J_2 \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\times \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \tag{3.7}$$

При $\theta = 1$, застосувавши до J_2 у відповідності до співвідношення $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$ (тоді $\theta' = \infty$) звичну у такому випадку модифікацію нерівності Гельдера, аналогічним чином отримаємо

$$J_2 \ll 2^{-n(r_1-1)}. \tag{3.8}$$

У такий же спосіб, у випадку $\theta = \infty$ для $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}$ маємо

$$\|f - t_n(f)\|_{B_{\infty,1}} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},1)} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_1$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')(r_1-1)} \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{\nu-1}. \tag{3.9}$$

Тепер, поєднавши (3.4), (3.6)-(3.9) зі співвідношенням (3.3), яке пов'язує натуральні числа M та n, приходимо до шуканої оцінки зверху в (3.2).

Оцінка знизу в (3.2) випливає з теореми А при $p = 1$, якщо взяти до уваги нерівність (2.8).

Теорема 3.2 доведена. □

Вносячи очевидні корективи у доведення теореми 3.2, приходимо до аналогічного їй твердження у випадку функцій однієї змінної, тобто при $d = 1$.

Теорема 3.2′. *Нехай* $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді справедливе співвідношення*

$$d_M^B(\mathbb{B}^{r_1}_{1,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+1}.$$

Наступне твердження стосується порядкових значень величин $d_M^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1})$.

Теорема 3.3. *Нехай* $d \ge 1$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді справедливе співвідношення*

$$d_M^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.10}$$

Доведення. Діємо за схемою доведення теорем 3.2 та 3.2′. Оцінка зверху є результатом наближення функцій $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ за допомогою тригонометричних поліномів вигляду

$$t_n(f)(\boldsymbol{x}) = t_n(f;\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

(належним чином модифікованими відповідно до випадку $d = 1$), де число $n \in \mathbb{N}$ пов'язане із заданим натуральним числом M співвідношенням $C_5 2^n n^{\nu-1} \le M \le C_6 2^n n^{\nu-1}$, де C_5, C_6 — вільні у виборі додатні дійсні числа ($C_5 \le C_6$).

Якщо $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, то, як показано в [3],

$$\|f - t_n(f)\|_{B_{\infty,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

внаслідок чого

$$d_M^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Відповідна оцінка знизу в (3.10) є наслідком теореми А.

Теорема 3.3 доведена. □

Тепер розглянемо класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Теорема 3.4. *Нехай $d \geq 2$, $2 \leq p < \infty$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{p}$ справджується співвідношення*

$$d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp d^B_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{2}{p}}.$$

Доведення. Оцінка зверху для обох величин, беручи до уваги вкладення $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}$, $2 \leq p < \infty$, випливає із теореми 3.1 при $\theta = p$, а оцінка знизу для величини $d^B_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$ (а, зважаючи на співвідношення (2.11), також для $d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$) є наслідком теореми Б.

Теорема 3.4 доведена. $\square$

У випадку функцій однієї змінної порядкові значення величин $d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$ і $d^B_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$ знайдено вже при $1 < p < \infty$.

Теорема $3.4'$**.** *Нехай $d = 1$, $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{p}$ справедливі оцінки*

$$d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1}) \asymp d^B_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Зважаючи на співвідношення (2.11), достатньо встановити необхідну оцінку зверху для ортопоперечника $d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$ і таку ж оцінку знизу для величини $d^B_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$.

Оцінка зверху для $d^{\perp}_M(W^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$ випливає із співвідношення

$$\mathcal{E}_n(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha})_{B_{\infty,1}} := \sup_{f \in \mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}} \|f - S_n(f)\|_{B_{\infty,1}}$$

$$= \sup_{f \in \mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}} \Big\| f(\cdot) - \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f, \cdot) \Big\|_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}. \tag{3.11}$$

(див. теорему В при $d = 1$), бо якщо натуральні числа M і n пов'язати співвідношенням $2^n \leq M \leq 2^{n+1}$, то

$$d^{\perp}_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1}) \ll \mathcal{E}_n(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}.$$

Оцінка знизу для величини $d^B_M(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}, B_{\infty,1})$ випливає з теореми Б.

Теорема $3.4'$ доведена. $\square$

Наступна теорема — твердження щодо порядкових значень величин $d^B_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$.

Теорема 3.5. *Нехай $d \geq 1$. Тоді при $r_1 > 0$ справедливе співвідношення*

$$d_M^B(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1}. \qquad (3.12)$$

Доведення. Оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow H^{\boldsymbol{r}}_{\infty}$, то оцінка зверху випливає з теореми 3.1 при $\theta = \infty$. Оцінка знизу в (3.12) — наслідок теореми Б.

Теорема 3.5 доведена. □

Надамо коментар щодо теорем 3.3 і 3.5. Так, зіставивши теорему 3.3 з оцінками колмогоровського $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1})$ і лінійного $\lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1})$ поперечників, які встановлені в [3], приходимо до такого висновку: якщо $d \geq 1$, то при $1 \leq \theta \leq \infty$ справджуються співвідношення

$$d_M^B(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}),$$

зокрема, при $\theta = \infty$

$$d_M^B(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}, B_{\infty,1}) \asymp \lambda_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}, B_{\infty,1}).$$

Стосовно класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}$ висновки дещо інші. Так, в [3] доведені такі твердження.

Теорема Г. *Нехай $d = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді при $r_1 > 0$*

$$d_M(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}. \qquad (3.13)$$

Теорема Д. *Нехай $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > \frac{1}{2}$ і $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$. Тоді*

$$d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \qquad (3.14)$$

Зіставивши теорему 3.5 відповідно з теоремами Г і Д бачимо, що у одновимірному випадку, тобто при $d = 1$, величини $d_M(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha}, B_{\infty,1})$ і $d_M^B(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha}, B_{\infty,1})$ одного порядку, а у випадку $d = 2$ за умов теореми Д значення цих величин різні за порядком. Окрім того, зауважимо таке: з теорем 3.3 і 3.5 випливає, що при $d \geq 1$ справедливе співвідношення

$$d_M^B(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp d_M^B(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}, B_{\infty,1}).$$

Зауваження 3.1. *Питання щодо порядкових значень колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$ при $d > 2$ залишається відкритим.*

4. Норми лінійних операторів, що реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ множинами тригонометричних поліномів

При $d \geq 2$ та $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $Q_n \subset \mathbb{Z}^d$

$$Q_n := \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \leq n} \rho(\boldsymbol{s}), \quad (\boldsymbol{s}, 1) := s_1 + \ldots + s_d,$$

де $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, і через $T(Q_n)$ позначимо множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з Q_n, тобто

$$T(Q_n) = \{t: \ t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} c_{\boldsymbol{k}} \, e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \ \ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\}.$$

Визначимо величину $E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}$ найкращого наближення функцій з класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою елементів множини $T(Q_n)$:

$$E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} := \sup_{f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_{B_{\infty,1}}$$

У роботі [3] доведено, зокрема, таке твердження.

Теорема Е. *Нехай* $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 0$. *Тоді справедлива оцінка*

$$E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{4.1}$$

Зазначимо, що оцінка (4.1) досягається за наближення агрегатом, сформованим на базі лінійного методу наближення, який у даному випадку визначається послідовністю лінійних операторів $\{\mathbb{V}_{Q_n}\}_{n=1}^{\infty}$, кожний з яких функції $f \in L_1(\pi_d)$ ставить у відповідність тригонометричний поліном $V_{Q_n}(f, \cdot)$ вигляду

$$\mathbb{V}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = V_{Q_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \leq n} A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = (f * V_{Q_n})(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $V_{Q_n}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{(\boldsymbol{s},1) \leq n} A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})$.

Послідовність операторів $\{\mathbb{V}_{Q_n}\}_{n=1}^{\infty}$ має одну особливість: при кожному $n \in \mathbb{N}$ норма оператора $\mathbb{V}_{Q_n}$, як оператора, що діє з L_∞ в L_∞ дорівнює $\|V_{Q_n}\|_1$ і, як відомо (див. [9], наслідок з теореми 1.2.1), $\|V_{Q_n}\|_1 \gg n^{d-1}$. Іншими словами, при $d \geq 2$ послідовність норм $\|\mathbb{V}_{Q_n}\|_{\infty \to \infty}$, $n \in \mathbb{N}$ лінійних операторів $\{\mathbb{V}_{Q_n}\}_{n=1}^{\infty}$, за допомогою яких реалізуються порядкові значення величин $E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}$ — необмежена.

Зважаючи на таку обставину, логічною є задача про відшукання послідовності лінійних операторів $\mathbb{L}_{Q_n} : L_\infty \to T(Q_n)$, які, з одного боку, були б у певному розумінні оптимальними стосовно задачі про наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$, а з іншого — задовольняли б умову $\|\mathbb{L}_{Q_n}\|_{\infty\to\infty} < \infty$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Відповідь на питання щодо існування такої послідовності знайдемо у двох наступних твердженнях. Перше з них стосується багатовимірного випадку ($d \geq 2$), а друге — випадку $d = 1$.

У подальшому, якщо оператор $\mathbb{A} : L_\infty \to L_\infty$, то для норми $\|\mathbb{A}\|_{\infty\to\infty}$ вживаємо скорочене позначення $\|\mathbb{A}\|$.

Теорема 4.1. *Нехай $d \geq 2$ і $\{\mathbb{L}_{Q_n}\}_{n=1}^\infty$ — послідовність обмежених лінійних операторів $\mathbb{L}_{Q_n} : L_\infty \to L_\infty$, кожний з яких функції $f \in L^0_\infty(\pi_d)$ ставить у відповідність такий тригонометричний поліном $\mathbb{L}_{Q_n} f \in T(Q_n)$, що для функції $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, де $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $r_1 > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$, має місце нерівність*

$$\|f - \mathbb{L}_{Q_n} f\|_{B_{\infty,1}} \ll E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

Доведення. Нехай $f \in L^0_\infty(\pi_d)$ і $\mathbb{I}_\tau$ — оператор зсуву аргументів функції f на вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d$, тобто $\mathbb{I}_\tau f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau})$. Услід за Марцинкевичем, розглянемо лінійний обмежений оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$, який діє на функцію f згідно з формулою

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} (\mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}}\, \mathbb{L}_{Q_n}\, \mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}}\, f)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Беручи до уваги властивість інваріантності норми у просторах $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, відносно зсуву аргументів їхніх елементів, можна стверджувати, що

$$\|\mathbb{T}_{Q_n}\| \leq \|\, \mathbb{L}_{Q_n}\|. \tag{4.2}$$

Окрім того, легко переконатися, якщо $e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) := e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, то

$$\mathbb{T}_{Q_n} e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C_{n,\boldsymbol{k}}\, e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{k} \in Q_n, \\ 0, & \boldsymbol{k} \notin Q_n, \end{cases}$$

де $C_{n,\boldsymbol{k}}$ — деякі комплексні числа (див. [30]). А отже оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$ діє на функцію f, як оператор згортки, тобто

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (f * T_{Q_n})(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.3}$$

де $T_{Q_n}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in Q_n} C_{n,\boldsymbol{k}}\, e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Нехай $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, де $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+,\ r_1 > 0$. Тоді $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, і згідно з умовою теореми

$$\|\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)\|_{B_{\infty,1}} \ll E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}. \tag{4.4}$$

Далі, якщо $\mathbb{I}$ позначає одиничний оператор, що діє з L_∞ в L_∞, то спираючись на (4.4), можна записати

$$\|f - \mathbb{T}_{Q_n} f\|_{B_{\infty,1}} = (2\pi)^{-d} \left\| \int\limits_{\pi_d} (\mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}}(\mathbb{I} - \mathbb{L}_{Q_n}))(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) d\boldsymbol{\tau} \right\|_{B_{\infty,1}}$$

$$\le (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \|\mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f))\|_{B_{\infty,1}} d\boldsymbol{\tau}$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \|\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)\|_{B_{\infty,1}} d\boldsymbol{\tau} \ll E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}. \tag{4.5}$$

Співвідношення (4.2) і (4.5) дають підстави стверджувати, що для доведення теореми 4.1, досить обмежитись розглядом операторів $\mathbb{L}_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$ типу операторів згортки $\mathbb{T}_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, які визначені формулою (4.3).

Отже, нехай $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ і

$$\mathbb{L}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) := \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in Q_n} C_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Зазначимо, що у такому випадку, — $\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}\|_1$.

Подальші міркування потребують використання такого допоміжного твердження.

Лема 4.1. *Існує $\delta > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |C_{n,\boldsymbol{k}}| \ge \delta |Q_n|. \tag{4.6}$$

Доведення. Доведення ведемо методом від супротивного. Отже припустимо, що для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |C_{n,\boldsymbol{k}}| < \delta |Q_n|.$$

Позначимо через S множину векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $(\boldsymbol{s}, 1) \leq n$ $\rho(\boldsymbol{s}) \in Q_n$, таких, що для деякого вектора $\boldsymbol{k^s} = (k_1^s, \dots, k_d^s) \in \rho(\boldsymbol{s})$ має місце нерівність $|C_{n,\boldsymbol{k^s}}| \leq \frac{1}{2}$. Тоді, як показано в [30], для $|S|$ — числа елементів множини S, справедлива оцінка

$$|S| \gg n^{d-1} \log_2 \frac{1}{\delta}. \qquad (4.7)$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_7\, |S|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\prod_{j=1}^{d} \boldsymbol{k}_j^s \right)^{-r_1} e^{i(\boldsymbol{k^s}, x)}, \quad C_7 > 0, \qquad (4.8)$$

і покажемо, що за певного значення сталої C_7 ця функція належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, де $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d,\ r_1 > 0$.

Справді, оскільки функція

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\prod_{j=1}^{d} \boldsymbol{k}_j^s \right)^{-r_1} e^{i(\boldsymbol{k^s}, x)}$$

належить класу $H^{\boldsymbol{r}}_{\infty},\ \boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d,\ r_1 > 0$ (див. [9, гл. 2, § 5, лема 5.1]), то

$$\|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_\infty \ll 2^{-r_1(\boldsymbol{s},1)}, \quad \boldsymbol{s} \in S.$$

Спираючись на таку оцінку, можна записати

$$\|f_1\|_{\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} \asymp |S|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in S} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(g)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll |S|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in S} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1. \qquad (4.9)$$

Співвідношенням (4.9) утверджується належність функції f_1 з деякою сталою $C_7 > 0$ до класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$.

Далі, згідно з умовою теореми 4.1 для функції f_1 справджується співвідношення

$$\|f_1 - \mathbb{L}_{Q_n} f_1\|_{B_{\infty,1}} \ll E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}. \qquad (4.10)$$

У свою чергу, в [3] показано, що

$$E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (4.11)$$

Тому, поєднавши (4.10) і (4.11), отримаємо при $1 \le \theta \le \infty$

$$\|f_1 - \mathbb{L}_{Q_n} f_1\|_{B_{\infty,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (4.12)$$

Тепер встановимо оцінку знизу виразу у лівій частині (4.12). Маємо

$$\|f_1 - \mathbb{L}_{Q_n} f_1\|_{B_{\infty,1}} \ge \|f_1 - \mathbb{L}_{Q_n} f_1\|_\infty \ge |f_1(0) - \mathbb{L}_{Q_n} f_1(0)|$$

$$= C_7 \sum_{\boldsymbol{s}\in S} (1 - C_{n,\boldsymbol{k}^s}) \Big(\prod_{j=1}^d \boldsymbol{k}_j^s \Big)^{-r_1} |S|^{-\frac{1}{\theta}} \gg \sum_{\boldsymbol{s}\in S} \Big(\prod_{j=1}^d \boldsymbol{k}_j^s \Big)^{-r_1} |S|^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\gg 2^{-nr_1} |S| \, |S|^{-\frac{1}{\theta}} = 2^{-nr_1} |S|^{1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (4.13)$$

З (4.12) і (4.13) випливає співвідношення

$$2^{-nr_1} |S|^{1-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

наслідком якого є нерівність

$$|S| \ll n^{d-1}. \qquad (4.14)$$

Співставивши (4.7) і (4.14), маємо

$$n^{d-1} \log_2 \frac{1}{\delta} \ll n^{d-1},$$

звідки

$$\log_2 \frac{1}{\delta} \le C, \qquad (4.15)$$

де $C > 0$ — деяка абсолютна стала. Легко бачити, що для певних $\delta > 0$, нерівність (4.15) є хибною.

Лема 4.1 доведена. □

Продовжимо доведення теореми 4.1, і на його завершальному етапі використаємо таке відоме твердження.

Лема Б. [31]. *Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $\eta > 0$ знайдеться така стала $C(\eta) > 0$, що для довільного полінома $t \in T(Q_n)$ справджується нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |\widehat{t}(\boldsymbol{k})| \le C(\eta)\, n^\eta \, 2^n \|t\|_1. \qquad (4.16)$$

Отже, якщо додатне число δ задовольняє умову леми 4.1, то поклавши в теоремі 4.1 $\eta = \delta$, та записавши (4.16) у вигляді

$$\|t\|_1 \ge C(\delta)\, n^{-\delta}\, 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |\widehat{t}(\boldsymbol{k})|,$$

на підставі леми 4.1, маємо

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}\|_1 \gg n^{-\delta}\, 2^{-n}\, |Q_n| \asymp n^{(d-1)(1-\frac{\delta}{d-1})}. \qquad (4.17)$$

Нарешті, з (4.17), поклавши $\varepsilon = \frac{\delta}{d-1}$, отримаємо оцінку знизу для $\|\mathbb{L}_{Q_n}\|$, про яку стверджується у теоремі 4.1.

Теорема 4.1 доведена. □

В описовій формі теорема 4.1 допускає таке трактування: при $d \geq 2$ послідовність норм $\|\mathbb{L}_{Q_n}\|_{\infty\to\infty}$, $n \in \mathbb{N}$ лінійних операторів $\{\mathbb{L}_{Q_n}\}_{n=1}^{\infty}$, за допомогою яких реалізуються порядкові значення величин $E_{Q_n}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}$ — найкращих наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ за допомогою множини тригонометричних поліномів $T(Q_n)$ у просторі $B_{\infty,1}$ — необмежена.

Чи має місце подібний висновок у випадку функцій однієї змінної, тобто при $d = 1$? Відповідь на це питання грунтується на доведеній нижче теоремі 4.2.

Отже, нехай $n \in \mathbb{N}$ і $T(2^n)$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) := \{t : t(x) = \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} c_k e^{ikx} \ \ c_k \in \mathbb{C}, \ \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Покладемо

$$E_n(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} := \sup_{f\in\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta}} \inf_{t\in T(2^n)} \|f - t\|_{B_{\infty,1}}$$

— величина найкращого наближення класу $\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta}$ множиною $T(2^n)$ у просторі $B_{\infty,1}$.

Теорема 4.2. *Нехай $d = 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$E_n(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1}. \qquad (4.18)$$

Доведення. Спочатку доведемо оцінку зверху. Зазначимо, що зважаючи на вкладення $B^{r_1}_{\infty,\theta} \hookrightarrow H^{r_1}_{\infty}$, $1 \leq \theta < \infty$, її достатньо встановити при $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{r_1}_{\infty}$.

Отже, нехай $f \in \mathbb{H}^{r_1}_{\infty}$. Розглянемо наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів $\tau_n(f)$ вигляду

$$\tau_n(f)(x) = \tau_n(f, x) = \sum_{s=1}^{n} A_s(f, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Маємо

$$\|f-\tau_n(f)\|_{B_{\infty,1}} = \Big\|\sum_{s>n} A_s(f,\cdot)\Big\|_{B_{\infty,1}}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}} \Big\| A_s(\cdot) * \sum_{s'>n} A_{s'}(f,\cdot)\Big\|_\infty \le \sum_{s\ge n} \Big\| A_s(\cdot) * \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f,\cdot)\Big\|_\infty$$

$$\le \sum_{s\ge n} \|A_s\|_1 \Big\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f,\cdot)\Big\|_\infty =: J_3. \tag{4.19}$$

У подальшій оцінці величини J_3 використаємо співвідношення (3.5), а також відому нерівність

$$\|A_s(f,\cdot)\|_\infty \ll 2^{-sr_1}, \quad f \in \mathbb{H}^{r_1}_\infty.$$

Тоді

$$J_3 \le \sum_{s\ge n} \|A_s\|_1 \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|A_{s'}(f,\cdot)\|_\infty \ll \sum_{s\ge n-1} 2^{-sr_1} \ll 2^{-nr_1}. \tag{4.20}$$

Поєднавши (4.19) і (4.20), приходимо до оцінки зверху в теоремі 4.2.

Щодо оцінки знизу в (4.18) досить лише зауважити, що вона є наслідком співвідношення (див., наприклад, [11, теорема 1.6.6])

$$E_n(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_\infty \asymp 2^{-nr_1},$$

де $E_n(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_\infty := \sup\limits_{f\in\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta}} \inf\limits_{t\in T(2^n)} \|f-t\|_\infty$.

Теорема 4.2 доведена. □

Стосовно теореми 4.2 зазначимо таке: порядкові значення величин $E_n(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}}$ досягаються, як видно з доведення цієї теореми, за наближення функцій $f \in \mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta}$ поліномами $\tau_n(f,x) = \sum\limits_{s=1}^{n} A_s(f,x)$, $x \in \mathbb{R}$. Такі поліноми породжуються операторами $\mathbb{A}_n$, які діють за формулою $\mathbb{A}_n f(x) = \tau_n(f,x)$, $\quad x \in \mathbb{R}$, причому послідовність норм $\{\|\mathbb{A}_n\|\}_{n=1}^\infty$ операторів $\mathbb{A}_n$ — обмежена. Справді, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbb{A}_n\| = \|\sum_{s=1}^{n} A_s\|_1 \le 2\|V_{2^n}(\cdot) - V_{2^0}(\cdot)\|_1 \le 2(\|V_{2^n}\|_1 + \|V_{2^0}\|_1) \le C,$$

де C — деяка додатна стала, що не залежить від n.

Література

[1] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 71*,(8), 1102–1115.

[2] Belinsky, E.S. (1998). Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for clasess of functions with bounded mixed derivative. *J. Approx. Theory., 93*, 114–127.

[3] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Укр. мат. журн., 71*(2), 271–282.

[4] Hembarskyi, M.V., Hembarska, S.B., Solich, K.V. (2019). The best approximations and widths of the classes of periodical functions of one and several variables in the space $B_{\infty,1}$. *Mat. Stud, 51*(1), 74–85.

[5] Лизоркин, П.И., Никольский, С.М. (1989). Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 187*, 143–161.

[6] Бесов, О.В. (1961). Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 60*, 42–61.

[7] Никольский, С.М. (1951). Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 38*, 244–278.

[8] Аманов, Т.И. (1965). Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ и $\overset{(r)}{\underset{p,\theta}{\overset{*}{S}}}B$, $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 77*, 5–34.

[9] Темляков, В.Н. (1986). Приближение функций с ограниченной смешанной производной. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 178*, 1–112.

[10] Temlyakov, V.N. (1993). *Approximation of periodic functions.* New York: Nova Sci. Publ. Inc.

[11] Романюк, А.С. (2012). Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. *Пр. Ін-ту математики НАН України., 93*, 353.

[12] Dinh Dung, Temlyakov, V., Ullrich, T. (2018). *Hyperbolic Cross Approximation.* Birkhauser.

[13] Темляков, В.Н. (1982). Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. *Докл. АН СССР., 267*(2), 314–317.

[14] Динь Зунг. (1986). Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами. *Мат. сб., 131(173)*(2), 251–271.

[15] Галеев, Э.М. (1988). Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных. *Мат. заметки, 43*(2), 197–211.

[16] Темляков, В.Н. (1989). Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 189*, 138–168.

[17] Галеев, Э.М. (1990). Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами. *Мат. заметки, 47*(3), 32–41.

[18] Андрианов, А.В., Темляков, В.Н. (1997). О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение. *Тр. Мат. ин-та РАН, 219*, 32–43.

[19] Романюк, А.С. (2001). Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q, I. *Укр. мат. журн., 53*(9), 1224–1231.

[20] Романюк, А.С. (2001). Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q, II. *Укр. мат. журн., 53*(10), 1402–1408.

[21] Стасюк, С.А., Федуник, О.В. (2006). Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 58*(5), 692–704.

[22] Пустовойтов, Н.Н. (2008). Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители. *Anal. Math., 34*(3), 187–224.

[23] Акишев, Г.А. (2009). Об ортопоперечниках классов Никольского и Бесова в пространствах Лоренца. *Изв. вузов. Математика, 2*, 25–33.

[24] Романюк, А.С. (2011). Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Anal. Math., 37,* 181–213.

[25] Базарханов, Д.Б. (2010). Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля периодических функций многих переменных. *Мат. заметки, 87*(2), 305–308.

[26] Базарханов, Д.Б. (2012). Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных, II. *Anal. Math., 38*(4), 249–289.

[27] Bekmaganbetov, K.A., Tolengazy, Ye. (2016). Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii-Besov classes in the anisotropic Lorentz space. *Eurasian Math. J., 7*(3), 8–16.

[28] Балгимбаева, Ш.А., Смирнов, Т.И. (2018). Оценки поперечников Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой модуля гладкости. *Сиб. мат. журн., 59*(2), 277–292.

[29] Fedunyk-Yaremchuk, O.V., Hembars'ka, S.B. (2019). Estimates of approximative characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables with given majorant of mixed moduli of continuity in the space L_q. *Carpathian Math. Publ., 11*(2), 281–295.

[30] Романюк, А.С. (2004). Приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения. *Мат. сб., 195*(2), 91–116.

[31] Темляков, В.Н. (1985). Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов. *Изв. АН СССР. Сер. матем., 49*(5), 986–1030.

Відомості про авторів

Анатолій Сергійович Романюк
Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Віктор Сергійович Романюк
Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: mlromanuk@gmail.com