Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 1, 104 – 139
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-1-7

Про неперервність розв'язків рівнянь пористого середовища та швидкої дифузії з вагою та сингулярними молодшими членами

Євген С. Зозуля

(Представлена І. І. Скрипніком)

Анотація. Щодо вагового параболічного рівняння

$$v\,(x)\,u_t - div(\omega(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\;,\; u \geq 0\;,\; m \neq 1$$

доводимо неперервність та нерівність Гарнака для узагальнених розв'язків з точки зору зваженого потенціалу Рісса правої частини рівняння.

2010 MSC. 35B09, 35B40, 35K59, 35K65, 35K67.

Ключові слова та фрази. Квазілінійне параболічне рівняння, вагове рівняння пористого середовища, потенціал Рісса, гельдерова неперервність, нерівність Гарнака.

1. Введення

Метою даної роботи є вивчення локальних властивостей розв'язків параболічних рівнянь з вагою, одним із прикладів яких є

$$v\,(x)\,u_t - div(\omega(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\;,\; u \geq 0\;,\; m \neq 1 \tag{1.1}$$

у $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, де $v(x)$, $w(x)$ належать до відповідних класів Маккенхаупта, Ω обмежена область у R^n, $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$, та $f \in L^1(\Omega_T)$.

У неваговому випадку, тобто коли $v(x) \equiv w(x) = const$, цей клас рівнянь має численні застосування та привертає увагу вже кілька десятиліть (див. монографії [4, 28, 54, 55, 81] та посилання на них).

Більш узагальнено ми маємо справу з параболічними рівняннями типу

$$v\,(x)\,u_t - divA(x,t,u,\nabla u) = f(x,t) \quad \text{у}\;\; \Omega_T\;, \tag{1.2}$$

Стаття надійшла в редакцію 24.01.2021

де векторне поле $A = (a_1, a_2, ..., a_n) : \Omega_T \times R^1 \times R^n \to R^n$ є вимірюваним за Лебегом стосовно $(x,t) \in \Omega_T$ для всіх $(u,\xi) \in R^1 \times R^n$, та неперервним щодо (u,ξ) для майже всіх $(x,t) \in \Omega_T$. Ми також припускаємо, що наступні структурні умови задовольняються деякими додатними константами K_1, K_2

$$\begin{aligned} A(x,t,u,\xi)\xi \geq K_1 w(x) u^{m-1} |\xi|^2 \,,\ u \geq 0 \\ |A(x,t,u,\xi)| \leq K_2 w(x) u^{m-1} |\xi| \,,\ m \neq 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для функції $f(x,t)$ будемо вважати, що $f \in L^1(\Omega_T)$, а вагові коефіцієнти $v(x), w(x) \geq 0$ належать до відповідних класів $v(x) \in A_\infty$ $w(x) \in A_2$. Нагадаємо тут, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, якщо

$$sup \frac{w(B)}{|B|} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\, dx \right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty \,,\ w(B) = \int_B w dx \,,$$

де супремум береться за всіма кулями $B \subset R^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v(x) \in A_{p_0}$.

Безпосереднім наслідком означення класу A_p є

$$\frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \leq K_{p,w} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{np}$$

для всіх куль $B_r(y) \subset B_\rho(y)$.

Більше того (див [47] для деталей), існують константи $K_3 > 0$, $0 < \xi_1 \leq 1$, $0 < \xi_2 < p$ залежні тільки від $n, p, K_{p,w}$ такі, що

$$K_3^{-1} \left(\frac{|B_\rho(y)|}{|E|} \right)^{\xi_1} \leq \frac{w(B_\rho(y))}{w(E)} \leq K_3 \left(\frac{|B_\rho(y)|}{|E|} \right)^{\xi_2}$$

для будь-якої кулі $B_\rho(y)$ та $E \subset B_\rho(y)$

Далі будемо вважати, що

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu_1} \leq \frac{v(B_\rho(y))}{v(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu} \tag{1.4}$$

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu_1} \leq \frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu} , \tag{1.5}$$

з деякими додатними $K_4, \nu_1, \mu_1, \nu, \mu$ і для куль $B_r(y) \subset B_\rho(y)$. Наступне наше припущення - це співвідношення між v та w. Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо $\psi_y(r) := r^2 \frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}$, $0 < r \leq R$.

Припускаємо, що $\psi_y(r)$ зростає для $r \in (0, R]$ і існують дві додатні константи α, K_5 такі, що

$$\frac{\psi_y(r)}{\psi_y(\rho)} \le K_5 \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\alpha} \tag{1.6}$$

Можна легко перевірити, що з (1.4) випливає умова (1.6)

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \left(\frac{v(B_r(y))}{v(B_\rho(y))}\right)^{\frac{2}{q}} \frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \le K_6,\ 0 < r < R,\ q = \frac{2n\nu}{n\nu - \alpha} \tag{1.7}$$

з $K_6 = K_4^{1-\frac{2}{q}} K_5$ і, навпаки, з нерівністі (1.7) з деякою $q > 2$ випливає (1.6) з $\alpha = n\nu_1(1 - \frac{2}{q})$.

Зауважимо, що умова (1.7), по суті, є необхідною і достатньою, щоб мати нерівність Соболєва-Пуанкаре (для уточнення деталей відсилаємо читача до [16]).

Зауваження 1.1. Здається, що умови на $\psi_y(r)$ досить природні. У частинному випадку, коли $v = w$, вони очевидні. У випадку $v \equiv 1$, слідуючи [24] вводимо функцію $\tilde{\psi}_y(r) := \left(\int_{B_r(y)} w^{-\frac{n}{2}} dx\right)^{\frac{2}{n}} \asymp \psi_y(r)$, де символ $\asymp$ означає, що існує $c > 0$ така, що $c^{-1}\psi_y(r) \le \tilde{\psi}_y(r) \le c\psi_y(r)$. І попередні припущення будуть виконані для функції $\tilde{\psi}_y(r)$. Також зазначимо, що умова (1.6) є очевидним наслідком (1.4), (1.5) якщо $\mu < \nu_1 + \frac{2}{n}$, тоді $\alpha = 2 + n(\nu_1 - \mu) > 0$. Для формулювання наших результатів нам також потрібно визначення вагового параболічного потенціалу Рісса. Для $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ для будь-яких $\rho, \theta > 0$ визначимо $Q_{\rho,\theta}(x_0, t_0) := B_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta, t_0)$, $Q_{R,\theta}(x_0, t_0) \Subset \Omega_T$. Встановлюємо

$$I_{v,w,f}(x_0, t_0, R, \theta) := \int_0^R \frac{1}{v(B_\rho(x_0))} \iint_{Q_{\rho,\theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0,t_0)} |f(x,t)| dxdt \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.8}$$

У випадку $v \equiv w \equiv 1$ та $\theta = 1$ потенціал $I_{1,1,f}(x_0, t_0, R, 1)$ зводиться до стандартного зрізаного параболічного потенціалу Рісса

$$I_f(x_0, t_0, R) := \int_0^R \rho^{-n} \iint_{Q_{\rho,\rho^2}(x_0,t_0)} |f(x,t)| dxdt \frac{d\rho}{\rho}.$$

У випадку, коли f залежить лише від просторової змінної та $\theta = 1$ потенціал $I_{v,w,f}(x_0, R, 1)$ зводиться до еліптичного вагового потенціалу Рісса

$$I_{w,f}(x_0, R) := \int_0^R \frac{\rho^2}{w(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} |f(x)| dx \frac{d\rho}{\rho},$$

що збігається з ваговим потенціалом Вольфа $W^f_{w,2}(x_0, R)$, де $W^f_{w,p}(x_0, R) = \int_0^R \left(\frac{\rho^p}{w(B_\rho(x_0))}\int_{B_\rho(x_0)} |f|dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{d\rho}{\rho}$ щодо деталей, відсилаємо читача до [47].

Коротко нагадаємо означення вагового простору Соболєва для $v \in A_\infty$ та $w \in A_2$. Через $L^p(\Omega, v)$ позначимо набір вимірюваних функцій $u : \Omega \to R^1$ таких, що $\left(\int_\Omega v|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Через $W^{1,2}(\Omega, v, w)$ позначимо простір $\left\{u \in L^2(\Omega, v) \cap W^{1,1}(\Omega) : | \bigtriangledown u| \in L^2(\Omega, w)\right\}$, наділений нормою $||u||_{L^2(\Omega,v)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega,w)}$. Простір $W^{1,2}_0(\Omega, v, w)$ є замкненням $C^\infty_0(\Omega)$ у $W^{1,2}(\Omega, v, w)$.

Перш ніж сформулювати основні результати, згадаємо означення слабкого рішення рівняння (1.2). Нехай $m^- = \min(1, m)$, $m^+ = \max(1, m)$. Тоді говоримо, що u є невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1.2), якщо $0 \le u \in C_{loc}(0, T; L^{1+m^-}_{loc}(\Omega, v))$ та $u^{\frac{m+m^-}{2}-1}|\nabla u| \in L^2_{loc}(0, T; W^{1,2}_{loc}(\Omega, v, w))$ і для кожної компактної множини $E \subset \Omega$ та для кожного підінтервалу $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ наступна тотожність

$$\int\limits_E vu\varphi dx\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_2}^{t_1}\int\limits_E (-vu\varphi_t + A(x, t, u, \nabla u)\nabla\varphi)\, dxdt = \int\limits_{t_2}^{t_1}\int\limits_E f\varphi dxdt \tag{1.9}$$

слушна для будь-якої тестової функції $\varphi \in L^2(0, T; W^{1,2}_0(E, v, w))$, $\varphi, \varphi_t \in L^\infty(E \times (0, T))$.

Константи m, n, $K_{2,w}$, $K_{p_0,v}$, $K_1, ..., K_6$ надалі називаються даними. У наступному γ позначає константу, залежну лише від даних, які можуть змінюватись від рядка до рядка.

Відзначимо наступні дві теореми, які були доведені в [85] і з яких випливає обмеженість слабких розв'язків рівняння (1.2).

Теорема 1.1. *Нехай u – невід'ємний слабкий розв'язок рівняння* (1.2), *нехай виконуються умови* (1.3)–(1.6) *та нехай $m > 1$. Тоді існують додатні константи $\lambda_0 \in (0, 1)$, c_1, залежні лише від даних, такі, що для всіх $\lambda \in (0, \lambda_0)$, майже для всіх $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ і будь-якого циліндра $Q_{R,\theta}(x_0, t_0) \subset \Omega_T$ наступна нерівність має місце*

$$u(x_0,t_0) \le c_1 \left(\frac{1}{v(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)} \iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} v u^{m+\lambda} dxdt \right)^{\frac{1}{1+\lambda}}$$

$$+ c_1 \left(\frac{1}{w(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)} \iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} w u^{m+\lambda} dxdt \right)^{\frac{1}{1+\lambda}}$$

$$+ c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{1}{m-1}} + c_1 I_{v,w,f} \left(x_0, t_0, c_1 R, \frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)} \right). \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Нехай u – невід'ємний слабкий розв'язок рівняння* (1.2), *нехай виконуються умови* (1.3)–(1.6) *та нехай*

$$0 < 1 - \frac{\alpha}{n} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu} \right) < m < 1. \tag{1.11}$$

Тоді існують додатні константи $\lambda_0 \in (0,1)$, c_1, залежні лише від даних, такі, що для всіх $\lambda \in (0,\lambda_0)$, майже для всіх $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ і будь-якого циліндра $Q_{R,\theta}(x_0,t_0) \subset \Omega_T$ наступна нерівність має місце

$$u(x_0,t_0) \le c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{n\nu}{\alpha+(m-1)n\nu+\alpha\lambda}}$$

$$\times \left(\frac{1}{v(B_R(x_0))\theta} \iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} v u^{1+\lambda} dxdt \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+(m-1)n\nu+\alpha\lambda}}$$

$$+ c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{n\mu}{\alpha+(m-1)n\mu+\alpha\lambda}}$$

$$\times \left(\frac{1}{w(B_R(x_0))\theta} \iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} w u^{1+\lambda} dxdt \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+(m-1)n\mu+\alpha\lambda}} + c_1 \left(\frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

$$+ c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{n\nu}{\alpha+(m-1)n\nu}} I_{v,w,f} \left(x_0, t_0, c_1 R, \frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+(m-1)n\nu}} \tag{1.12}$$

Основними результатами даної статті є

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови* (1.3)–(1.6) *та* (1.10). *Нехай* u *– обмежений слабкий розв'язок рівняння* (1.2). *Припустимо також, що*

$$\lim_{R\to 0} \sup_{(x,t)\in\Omega_T} I_{v,w,f}\,(x,t,R) = 0 \tag{1.13}$$

Тоді u *є локально неперервною, тобто* $u \in C_{loc}(\Omega_T)$.

Наступний результат – нерівність Гарнака для невід'ємних розв'язків рівняння (1.2).

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови* (1.3)–(1.6), (1.10) *та* $m > 1$. *Нехай* u *– обмежений слабкий розв'язок рівняння* (1.2). *Тоді існують константи* $c_2, c_3 > 0$ *залежні лише від даних, таких, що для всіх внутрішніх циліндрів* $Q_{8R,8\psi_{x_0}(R)\theta}(x_0,t_0) \subset \Omega_T$ *або*

$$u(x_0,t_0) \le c_2 \sup_{(x,t)\in\Omega_T} I_{v,w,f}(x,t,R,c_2 u(x_0,t_0)^{1-m}) \tag{1.14}$$

або

$$u(x_0,t_0) \le c_2 \inf_{B_R(x_0)} u(x, t_0 + \theta\psi_{x_0}(R)),\ \theta := \left(\frac{c_3}{u(x_0,t_0)}\right)^{m-1} \tag{1.15}$$

Перш ніж описати метод доведення, кілька слів, що стосуються історії проблеми. Основні якісні властивості розв'язків однорідних лінійних еліптичних рівнянь дивергентного типу другого порядку з вимірюваними коефіцієнтами без членів нижчого порядку, такі як локальна обмеженість, неперервність за Гельдером та нерівність Гарнака, відомі ще з результатів Де Джорджі [27], Неша [64] та Мозера [61, 62]. Ці результати було розширено Серріном [68], Ладиженською та Уральцевою [54, 55], Аронсоном та Серріном [3], та Трудінгером [79] до широкого класу еліптичних та параболічних рівнянь ($m = 1$) з членами нижчого порядку з відповідних класів L^q-класів. Аналогічні результати для рівнянь пористого середовища або еволюційних рівнянь з p-Лапласіаном з'явилися набагато пізніше. Щодо неперервності розв'язків рівнянь пористого середовища, ми посилаємо читача до відомих робіт Каффареллі, Фрідмана [14], Каффареллі, Еванса [13] та Ді Бенедетто, Фрідмана [31]. Ді Бенедетто розробив інноваційний метод внутрішнього масштабування (див. [28] та посилання на тамтешні оригінальні документи) та довів Гельдерову неперервність слабких розв'язків еволюційних рівнянь з p-Лапласіаном з членами нижчого порядку з L^q-класів.

Що стосується еліптичних та параболічних рівнянь із сингулярними членами нижчого порядку, ми відсилаємо читача на піонерську статтю Айзенмана та Саймона [2], де неперервність та нерівність Гарнака слабких розв'язків рівняння $-\Delta u + V(x)u = 0$ були доведені за умови класу Като на потенціал V. Крім того, вони показали, що умова типу Като на потенціал V необхідна для обгрунтованості нерівності Гарнака. Цей результат поширили на лінійні еліптичні та параболічні рівняння з членами нижчого порядку Чіаренца, Фабес та Гарофало [20], Курата [52] та Чжан [83, 84]. Першого істотного переходу до рівняння з p-Лапласіаном з мірою досягли Кілпелайнен і Малий [50], де були встановлені точкові оцінки для розв'язків рівнянь такого типу з точки зору нелінійного потенціалу Вольфа $W^{\mu}_{1,p}(x,r)$ міри μ : $W^{\mu}_{\beta,p}(x,r) := \int_0^r \left(\frac{\mu(B_\rho(x))}{\rho^{n-\beta p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{d\rho}{\rho}$. Ці результати згодом були поширені Трудіндером та Вангом [80] та Лабутіним [53] на нелінійні та субеліптичні квазілінійні рівняння. Для параболічних рівнянь відповідні результати були нещодавно отримані Ліскевичем В. та Скрипніком І. І. [56, 57] для еволюційних рівнянь з p-Лапласіаном, також для рівнянь пористого середовища [5–7, 12, 57, 76]. Нерівномірно еліптичні та неоднорідні параболічні рівняння без / або з сингулярними молодшими членами. Перші результати в цьому напрямку отримали Фабс, Keніг і Сепаріоні [35] і Гутієррес [42] для зваженого лінійного еліптичного рівняння з вагою, що є представником A_2 класа Маккенхаупта. Відсилаємо читача до [1, 8–11, 15–26, 34–49, 59, 63, 65–67, 77, 78, 83] для перегляду результатів. Здається, що питання нерівності Гарнака для розв'язків рівнянь пористого середовища та рівнянь швидкої дифузії з сингулярними молодшими членами досі залишається відкритим. У цій роботі ми зробимо першу спробу вивчити нерівність Гарнака для розв'язків вироджених рівнянь пористої середовища та швидкої дифузії, збурених сингулярністю молодшого члена. Зазначимо, що в неваговому випадку ми відновлюємо результат щодо неперервності Богелейн, Дюзара та Чианацца [5–7]. Також зазначимо, що ми відновлюємо результат Бонфорте та Симонова [11], де нерівність Гарнака була доведена для рівняння $|x|^{\alpha_1} u_t - div\left(|x|^{\alpha_2} u^{m-1} \nabla u\right) = 0,\ m < 1$, для натуральних значень α_1 та α_2.

Зауважимо також, що зважений потенціал Рісса $I_{v,w,f}$ відіграє таку ж роль, як і лінійний потенціал Рісса I_f у лінійному та квазілінійному випадках, ми посилаємо читача до [47].

Труднощі, що виникають тут, пов'язані не лише з наявністю функції $f \in L^1_{loc}(\Omega_T)$ але також з наявністю вагових функцій v та w. Наша стратегія доведення схожа на стратегію [28]. Однак через структурні умови будови ітерацію типу Де Джорджі використовувати не можна. Натомість ми адаптуємо ітераційний метод Кілпелайнен–

Малий [50], який було розвинуто [56,57] та [5–7, 12, 57, 76] для рівнянь пористого середовища та еволюційних рівнянь з p-Лапласіаном.

2. Допоміжний матеріал та інтегральні оцінки розв'язків

2.1. Допоміжні пропозиції

Наступні леми будуть використані у подальшому. Перша – вагова нерівність Соболєва–Пуанкаре (див. [16]).

Лема 2.1. *Нехай $p > 1$, $w_1 \in A_p$, $w_2 \in A_\infty$ та нехай*

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^p \left(\frac{w_2(B_r(y))}{w_2(B_\rho(y))}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{w_1(B_\rho(y))}{w_1(B_r(y))} \le c \tag{2.1}$$

для кожної кулі $B_r(y) \subset B_\rho(y)$, існують деякі $c > 0$ та деякі $q > p$. Тоді існує $\gamma > 0$, що залежить тільки від даних, q і c така, що

$$\left(\frac{1}{w_2(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{B_R(\overline{x})} w_2 |\varphi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \gamma R \left(\frac{1}{w_1(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{B_R(\overline{x})} w_1 |\nabla\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

для кожної кулі $B_R(\overline{x})$ та кожної $\varphi \in C_0^\infty(B_R(\overline{x}))$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{w_2(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{B_R(\overline{x})} w_2 |\varphi - \varphi_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \gamma R \left(\frac{1}{w_1(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{B_R(\overline{x})} w_1 |\nabla\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

для кожної кулі $B_R(\overline{x})$ та кожної $\varphi \in C^\infty(B_R(\overline{x}))$. Тут

$$\varphi_R = \frac{1}{w_2(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{B_R(\overline{x})} w_2 \varphi dx \ \text{ та } \ \varphi_R = \frac{1}{|B_R(\overline{x})|} \int\limits_{B_R(\overline{x})} \varphi dx.$$

Наступна лема – параболічна версія теореми Соболєва (див. [22, 25]).

Лема 2.2. *Нехай $w \in A_2, v \in A_\infty$ і нехай слушна нерівність* (2.1) *для $w_2 = v$, $w_1 = w$, $p = 2$ та деякої $q > 2$. Тоді існують h, $\gamma > 0$, що залежать тільки від даних, такі, що*

$$\iint\limits_{Q_{R,\tau}(\overline{x},\overline{t})} w|\varphi|^{2+p_1h}dxdt \le \gamma \left(\frac{1}{v(B_R(\overline{x}))} \sup_{\overline{t}-\tau<t<\overline{t}} \int\limits_{B_R(\overline{x})} v|\varphi|^{p_1}dx \right)^h \times R^2 \iint\limits_{Q_{R,\tau}(\overline{x},\overline{t})} w|\nabla\varphi|^2 dxdt, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{v(B_R(\overline{x}))} \iint\limits_{Q_{R,\tau}(\overline{x},\overline{t})} v|\varphi|^{2+p_1h}dxdt$$
$$\le \gamma \left(\frac{1}{v(B_R(\overline{x}))} \sup_{\overline{t}-\tau<t<\overline{t}} \int\limits_{B_R(\overline{x})} v|\varphi|^{p_1}dx \right)^h \frac{R^2}{w(B_R(\overline{x}))} \iint\limits_{Q_{R,\tau}(\overline{x},\overline{t})} w|\nabla\varphi|^2 dxdt, \tag{2.5}$$

для кожного циліндра $Q_{R,\tau}(\overline{x},\overline{t})$ та кожної

$$\varphi \in C\left(\overline{t}-\tau,\overline{t}; L^{p_1}(B_R(\overline{x}),v)\right) \cap L^2(\overline{t}-\tau,\overline{t}; W_0^{1,2}(B_R(\overline{x}),v,w)).$$

Наступна лема – ваговий аналог відомої лемми Де Джорджі–Пуанкаре.

Лема 2.3. *Let $p > 1$, $w \in A_p$, $v \in A_\infty$ і нехай слушна нерівність* (2.1) *для $w_1 = v$, та нехай k і l дійсні числа такі, що $l > k$. Тоді існує додатна константа γ, що залежить тільки від даних, така, що*

$$(l-k)^p v(A_{k,R})(v(B_R(\overline{x})) - v(A_{l,R}))$$
$$\le \gamma R^p \frac{v^2(B_R(\overline{x}))}{w(B_R(\overline{x}))} \int\limits_{A_{l,R}\setminus A_{k,R}} w|\nabla\varphi|^p dx \tag{2.6}$$

для кожної кулі $B_R(\overline{x})$ та кожної $u \in C^\infty(B_R(\overline{x}))$. Тут позначили $A_{k,R} = \{x \in B_R(\overline{x}) : u(x) < k\}$, $v(A_{k,R}) = \int_{A_{k,R}} vdx$.

Доведення. Використовуємо нерівність (2.3) для функції $\varphi = (l - \max(u,k))_+$ та $\varphi_R = \frac{1}{v(B_R(\overline{x}))}\int_{B_R(\overline{x})} v\varphi dx$. Тоді

$\varphi_R \le (l-k)\frac{v(A_{l,R})}{v(B_R(\overline{x}))} \le l-k$ і за допомогою нерівності Гельдера, отримаємо

$$(l-k)^p \frac{v(A_{l,R})}{v(B_R(\overline{x}))}\left(1-\frac{v(A_{l,R})}{v(B_R(\overline{x}))}\right) \le \frac{1}{v(B_R(\overline{x}))}\int\limits_{A_{k,R}} v(\varphi-\varphi_R)^p dx$$

$$\le \left(\frac{1}{v(B_R(\overline{x}))}\int\limits_{B_R(\overline{x}))} v|\varphi-\varphi_R|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} \le \gamma \frac{R^p}{w(B_R(\overline{x}))}\int\limits_{A_{l,R}\setminus A_{k,R}} w|\nabla u|^p dx,$$

що доводить лему. □

2.2. Локальні енергетичні оцінки

Лема 2.4. *Нехай u – обмежений невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1.2) у Ω_T. Тоді існує константа $\gamma > 0$, що залежить тільки від даних, така, що для кожного циліндра $Q_{\rho,\tau}(\overline{x},\overline{t}) \subset \Omega_T$, будь-яких $l>0$, $k \ge 2$ та будь-якої гладкої $\zeta(x,t)$, що дорівнює нулю при $(x,t) \in \partial B_\rho(\overline{x}) \times (\overline{t}-\tau,\overline{t})$ що виконується*

$$\sup_{\overline{t}-\tau<t<\overline{t}} \int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v\int\limits_l^u (s^{m^-}-l^{m^-})ds\zeta^k dx + + \iint\limits_L wu^{m+m^--2}|\nabla u|^2\zeta^k dxdt$$

$$\begin{aligned}\le \int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v\int\limits_l^u (s^{m^-}-l^{m^-})ds\zeta^k(x,\overline{t}-\tau)dx \\ +\gamma\iint\limits_L vu^{m^-}(u-l)|\zeta_t|\zeta^{k-1}dxdt \\ +\gamma\iint\limits_L wu^{m-m^-}(u^{m^-}-l^{m^-})^2|\nabla\zeta|^2\zeta^{k-2}dxdt \\ +\gamma\iint\limits_L |f|(u^{m^-}-l^{m^-})\zeta^k dxdt,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\sup_{\overline{t}-\tau<t<\overline{t}} \int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v\int\limits_u^l (l^{m^-}-s^{m^-})ds\zeta^k dx$$

$$+\iint\limits_{\tilde{L}} wu^{m+m^--2}|\nabla u|^2\zeta^k dxdt$$

$$\leq \int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v \int\limits_u^l (l^{m^-} - s^{m^-}) ds \zeta^k(x, \overline{t} - \tau) dx + \gamma l^{m^-} \iint\limits_{\tilde{L}} v(l-u)|\zeta_t|\zeta^{k-1} dxdt$$

$$+\gamma \iint\limits_{\tilde{L}} w u^{m-m^-} (l^{m^-} - u^{m^-})^2 |\nabla\zeta|^2 \zeta^{k-2} dxdt$$
$$+\gamma \iint\limits_{\tilde{L}} |f|(l^{m^-} - u^{m^-})\zeta^k dxdt, \tag{2.8}$$

де $L = Q_{\rho,\tau}(\overline{x}, \overline{t}) \cap \{u > l\}$, $\tilde{L} = Q_{\rho,\tau}(\overline{x}, \overline{t}) \cap \{u < l\}$.

Доведення. Підставляючи у інтегральну тотожність (1.9) тестову функцію $\varphi = (u^{m^-} - l^{m^-})_\pm \zeta^k$, використовуючи умови (1.3) та нерівність Юнга отримаємо (2.7). □

Лема 2.5. *Нехай u невід'ємний слабкий розв'язок* (1.2) *у* Ω_T. *Тоді існує* $\gamma > 0$ *що залежить тільки від даних, така, що для кожного циліндра* $Q_{\rho,\tau}(\overline{x}, \overline{t}) \subset \Omega_T$, *будь-яких* $\lambda \in (0,1)$, $a, l, \delta > 0$, $k \geq 2$ *і будь-якої гладкої* $\zeta(x,t)$ *який дорівнює нулю на параболічній межі* $Q_{\rho,\tau}(\overline{x}, \overline{t})$ *маємо*

$$\frac{1}{\delta} \sup_{\overline{t}-\tau<t<\overline{t}} \int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v \int\limits_l^u \left(1 - \left(1 + a\frac{s^{m^-} - l^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{-\lambda}\right) ds \zeta^k dx$$
$$+\frac{a}{\delta^{m^-+1}} \iint\limits_L \frac{w u^{m-m^-} |\nabla u^{m^-}|^2 \zeta^k}{\left(1 + a\frac{u^{m^-} - l^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{1+\lambda}} dxdt$$
$$\leq \gamma \iint\limits_L v \frac{u-l}{\delta} |\zeta_t| \zeta^{k-1} dxdt \tag{2.9}$$
$$+\gamma \frac{\delta^{m^- - 1}}{a} \iint\limits_L w u^{m-m^-} \left(a\frac{u^{m^-} - l^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{1+\lambda} |\nabla\zeta|^2 \zeta^{k-2} dxdt$$
$$+ \frac{\gamma}{\delta} \iint\limits_{Q_{\rho,\tau}(\overline{x},\overline{t})} |f| dxdt,$$

$$\frac{1}{\delta}\sup_{\bar t-\tau<t<\bar t}\int\limits_{B_\rho(\overline{x})} v\int\limits_u^l \left(1-\left(1+a\frac{l^{m^-}-s^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{-\lambda}\right) ds\zeta^k dx +$$
$$+\frac{a}{\delta^{m^-+1}}\iint\limits_{\tilde L}\frac{wu^{m-m^-}|\nabla u^{m^-}|^2\zeta^k}{\left(1+a\frac{l^{m^-}-u^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{1+\lambda}}dxdt \le \gamma\iint\limits_{\tilde L} v\frac{l-u}{\delta}|\zeta_t|\zeta^{k-1}dxdt +$$
$$+\gamma l^{m-m^-}\frac{\delta^{m^--1}}{a}\iint\limits_{\tilde L} wu^{m-m^-}\left(a\frac{l^{m^-}-u^{m^-}}{\delta^{m^-}}\right)^{1+\lambda}|\nabla\zeta|^2\zeta^{k-2}dxdt +$$
$$+\frac{\gamma}{\delta}\iint\limits_{Q_{\rho,\tau}(\overline{x},\bar t)}|f|dxdt, \tag{2.10}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$1-(1+u)^{-\lambda}\asymp\frac{u}{1+u}=1-(1+u)^{-1},\ \ u>0. \tag{2.11}$$

Тестуючи (1.9) за допомогою функції

$$\varphi=\left(1-\left(1+a\frac{(u^{m^-}-l^{m^-})_+}{\delta^{m^-}}\right)^{-\lambda}\right)\zeta^k,$$

використовуючи умови (1.3), (2.11) та нерівність Юнга, приходимо до (2.9).

Тестуючи (1.9) за допомогою функції

$$\varphi=\left(1-\left(1+a\frac{(l^{m^-}-u^{m^-})_+}{\delta^{m^-}}\right)^{-\lambda}\right)\zeta^k,$$

використовуючи умови (1.3), (2.11) та нерівність Юнга, приходимо до (2.10). □

3. Лема типу Де Джорджі

Нагадаємо, що наша стратегія доведення неперервності та нерівності Гарнака є такою, як у [28]. Наш головний результат цього розділу – лема типу Де Джорджі (див. [27]). Однак через різні умови структури ітерацію типу Де Джорджі використовувати не можна.

Замість цього ми адаптуємо Кілпелайнен—Малий–ітерацію [50] в поєднанні з ідеями [29], де методика Кілпелайнен–Малий була адаптована до невагових параболічних p- Лапласа рівнянь та рівнянь пористих середовищ. Позначимо через $\mu_\pm, \omega$ невід'ємні числа такі, що $\mu_+ \geq \sup\limits_{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})} u$, $\mu_- \leq \inf\limits_{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})} u$, $\omega = \mu_+ - \mu_-$ і ми встановлюємо

$$I_f(\rho,\theta) = \sup_{(x,t)\in\Omega_T} I_{v,w,f}(x,t,\rho,\theta).$$

Теорема 3.1. *Нехай будуть виконані умови теореми 1.3. Фіксуємо* $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, $\eta \in (0,1)$, *тоді існують* $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ *залежні лише від відомих параметрів,* ξ, η, θ *та* ω *такі, що якщо*

$$v\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \leq \xi\omega\right\}\right) \leq \eta_1 v(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})), \tag{3.1}$$

та

$$w\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \leq \xi\omega\right\}\right) \leq \eta_1 w(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})), \tag{3.2}$$

тоді або

$$\xi\omega \leq \eta_2^{-1} I_f(\rho,\theta) \tag{3.3}$$

або

$$u(x,t) \geq \eta\xi\omega, \text{ для майже всіх } (x,t) \in Q_{\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{2}\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}). \tag{3.4}$$

Так само, якщо $\mu_+ \leq \frac{13}{12}\omega$,

$$v\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \geq \mu_+ - \xi\omega\right\}\right) \leq \eta_1 v(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})), \tag{3.5}$$

та

$$w\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \geq \mu_+ - \xi\omega\right\}\right) \leq \eta_1 w(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t})), \tag{3.6}$$

тоді або (3.3) *маємо, або*

$$u(x,t) \leq \mu_+ - \eta\xi\omega, \text{ майже для всіх } (x,t) \in Q_{\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{2}\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}), \tag{3.7}$$

тут для множини $E \subset R^{n+1}$ *визначаємо* $v(E) = \iint_E v\,dxdt$ *та* $w(E) = \iint_E w\,dxdt$. *Далі будемо вважати, що* (3.2) *порушено, тобто*

$$\xi\omega \geq \eta_2^{-1} I_f(\rho,\theta). \tag{3.8}$$

Доведення. Доведемо (3.1)–(3.4). Фіксуємо точку $(x_1,t_1)\in Q_{\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{2}}(\overline{x},\overline{t})$ та обираємо $\sigma\in(0,1)$ з умови $K_4\sigma^{\frac{1}{2+n\nu_1}}=\frac{1}{2}$. Для $j=-1,0,1,...$ визначаємо послідовності $\rho_j:=\psi_{x_1}^{-1}(\sigma^{j+1}\psi_{x_1}(\rho))$, $\theta_j:=\sigma^{j+1}\theta\psi_{x_1}(\rho)$, $B_j:=B_{\rho_j}(x_1)$, $Q_j:=B_j\times(t_1-\theta_j,t_1)$, $L_j:=Q_j\cap\{u<l_j\}$, $f_j:=\sum\limits_{i=j+1}^{\infty}\frac{1}{v(B_i)}\iint_{Q_i}|f|dxdt$.

І нехай $\zeta_j\in C^\infty(Q_j)$ будуть такими, що $0\le\zeta_j\le1$, $\zeta_j=1$ у $B_{\frac{1}{2}\rho_j}(x_1)\times\left(t_1-\frac{1}{2}\theta_j,t_1\right)$ $\zeta_j=0$ для $t\le t_1-\theta_j$, $\zeta_j=0$ для $|x-x_1|>\rho_j$, $0\le\zeta_j\le1$ and $|\nabla\zeta_j|\le\frac{2}{\rho_j}$, $\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}\right|\le\frac{2}{\theta_j}$.

Почнемо з вибору послідовностей $\{l_j\}_{j\in N}$ та $\{\delta_j\}_{j\in N}$. Нехай $\tau=\tau(\theta,\omega):=\frac{(\xi\omega)^{1-m}}{\theta}$ та нехай

$$A_j(l):=\max\left(\frac{1}{\tau},\tau^{\frac{1}{h}}\right)\iint\limits_{L_j}\left(\frac{v}{v(Q_j)}+\frac{w}{w(Q_j)}\right)\left(\frac{l_j-u}{l_j-l}\right)^{1+\lambda}\zeta_j^{k-2}dxdt,\tag{3.9}$$

де $\lambda\in(0,1)$ та $k\ge2$ залежні від відомих параметрів і будуть визначені пізніше та $h>0$ було визначено у Лемі 2.2. Зауважимо, що у (1.4), (1.5)

$$\psi_{x_1}(\rho)\le K_4^2 2^{n(\nu+\mu)}\psi_{\overline{x}}(\rho)\le K_4^2 2^{2n(\nu+\mu)}\psi_{x_1}(\rho)$$

і на наш вибір σ маємо $Q_{j+1}\subset Q_j\subset...\subset Q_0\subset Q_{\rho,\theta}(\overline{x},\overline{t})$, $j=0,1,2,...$ та $\{\zeta_{j+1}\ne0\}\subset\{\zeta_j=1\}$, $j=0,1,2,...,$. Більше того, за нашим вибором ρ_j та θ_j маємо

$$f_i\le\gamma\sum_{i=j+1}^{\infty}\int_{\rho_i}^{\rho_{i-1}}\frac{1}{v(B_r(x_1))}\iint\limits_{Q_{r,\psi_{x_1}(r)\theta}(x_1,t_1)}|f|dxdt$$

$$\le\gamma\int_0^{\rho_j}\frac{1}{v(B_r(x_1))}\iint\limits_{Q_{r,\psi_{x_1}(r)\theta}(x_1,t_1)}|f|dxdt\le\gamma I_{v,w,f}(x_1,t_1,\rho,\theta),$$

$j=-1,0,1,...,$

Нехай $l_0=\xi\omega$ та нехай $\overline{l}=\frac{l_0}{2}(1+\frac{1}{2}\eta)+\frac{1}{4}\eta_2^{-1}f_0=\frac{\eta\xi\omega}{4}+\frac{l_0}{2}+\frac{1}{4}\eta_2^{-1}f_0\ge$ $\ge\frac{\eta\xi\omega}{2}+\frac{1}{2}\eta_2^{-1}f_0$. За (3.1), (3.2) отримаємо

$$A_0(\overline{l}):=\max\left(\frac{1}{\tau},\tau^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\times\iint\limits_{L_0}\left(\frac{v}{v(Q_0)}+\frac{w}{w(Q_0)}\right)\left(\frac{l_0-u}{l_0-\overline{l}}\right)^{1+\lambda}\zeta_0^{k-2}dxdt\le\frac{\gamma}{\tau}(1+\tau)^{\frac{1}{h}+1}$$

$$\times\left\{\frac{v(\{Q_0 : u \le \xi\omega\})}{v(Q_0)}+\frac{w(\{Q_0 : u \le \xi\omega\})}{w(Q_0)}\right\} \le \frac{\gamma}{\tau}(1+\tau)^{\frac{1}{h}+1}$$

$$\times\left\{\frac{v(\{Q_{\rho,\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \le \xi\omega\})}{v(Q_{\rho,\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}))}+\frac{w(\{Q_{\rho,\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}) : u \le \xi\omega\})}{w(Q_{\rho,\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x},\overline{t}))}\right\}$$

$$\le \frac{\gamma}{\tau}(1+\tau)^{\frac{1}{h}+1}\eta_1.$$

Фіксуємо число $\kappa \in (0,1)$, яке залежить тільки від даних та обираємо η_1 виходячи з умови

$$\gamma\theta(\xi\omega)^{m-1}\left(1+\frac{(\xi\omega)^{m-1}}{\theta}\right)^{\frac{1}{h}+1}\eta_1 \le \frac{\kappa}{2}, \tag{3.10}$$

тоді отримаємо $A_0(\bar{l}) \le \frac{\kappa}{2}$. $A_0(l)$ є зростаючою і неперервною функцією при $A_0(l) \to \infty$ та $l \to l_0$, нерівність $A_0(\bar{l}) \le \frac{\kappa}{2}$ забезпечує існування $\tilde{l} \in (\bar{l}, l_0)$ такого, що $A_0(\tilde{l}) = \kappa$. Якщо $\tilde{l} < l_0 - \frac{1}{4}(f_{-1}-f_0)$ покладемо $l_1 = \tilde{l}$ і якщо $\tilde{l} \ge l_0 - \frac{1}{4}(f_{-1}-f_0)$ тоді встановлюємо $l_1 = l_0 - \frac{1}{4}(f_{-1}-f_0)$ і в обох випадках $\delta_0 = l_0 - l_1$. □

Лема 3.1. *Припустимо, вже обрали $l_1, ..., l_j$ таке, що*

$$\frac{\eta\xi\omega}{4}+\frac{l_{i-1}}{2}+\frac{\eta_2^{-1}}{4}f_{i-1} < l_i \le l_{i-1}-\frac{1}{4}(f_{i-1}-f_i),\ i=1,2,...,j, \tag{3.11}$$

$$l_i \ge \frac{\eta\xi\omega}{2}+\frac{\eta_2^{-1}}{2}f_{i-1},\ i=1,2,...,j, \tag{3.12}$$

$$A_{i-1}(l_i) \le \kappa,\ i=1,2,...,j, \tag{3.13}$$

тоді

$$A_j(\bar{l}) \le \frac{\kappa}{2},\ \ \bar{l} = \frac{\eta}{4}\xi\omega+\frac{l_i}{2}+\frac{\eta_2^{-1}}{4}f_j. \tag{3.14}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що в (3.11) та (3.12) маємо

$$\begin{aligned} l_j-\bar{l} &= \frac{l_j}{2}-\frac{\eta}{4}\xi\omega+\frac{\eta_2^{-1}}{4}f_j \ge \frac{l_{j-1}}{4}-\frac{\eta}{8}\xi\omega+\frac{\eta_2^{-1}}{8}f_{j-1}-\frac{\eta_2^{-1}}{4}f_j \\ &= \frac{1}{4}(l_{j-1}-l_j)+\frac{1}{4}l_j-\frac{\eta}{8}\xi\omega+\frac{\eta_2^{-1}}{8}f_{j-1}-\frac{\eta_2^{-1}}{4}f_j \ge \frac{1}{4}(l_{j-1}-l_j) \\ &\quad +\frac{\eta_2^{-1}}{4}(f_{j-1}-f_j). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Нехай $\tilde{u} = \max\left(u, \frac{\eta}{4}\xi\omega\right)$, тоді $L_j = Q_j \cap \{\tilde{u} < l_j\}$ та

$$(l_j-u)_+ \le 2(l_j-\tilde{u})_+ \le 2l_j^{1-m^-}\int\limits_{\tilde{u}}^{l_j} s^{m^- -1}ds = \frac{2}{m^-}l_j^{1-m^-}(l_j^{m^-}-\tilde{u}^{m^-})_+$$

$$\leq \frac{2}{m^-} l_j^{1-m^-} (l_j^{m^-} - u^{m^-})_+ \leq \frac{2}{m^-} l_j^{1-m^-} (l_j - u)_+,$$

отже з (3.10) для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$ отримаємо

$$A_j(\bar l) = \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right) \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right) \left(\frac{l_j - u}{l_j - \bar l}\right)^{1+\lambda} \zeta_j^{k-2} dxdt$$
$$\leq \gamma \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)$$
$$\times \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right) \left(\left(\frac{l_j}{l_j - \bar l}\right)^{1-m^-} \frac{l_j^{m^-} - \tilde u^{m^-}}{(l_j - \bar l)^{m^-}}\right)^{1+\lambda} \zeta_j^{k-2} dxdt$$
$$\leq \varepsilon^{1+\lambda} \gamma \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right) \left(\frac{v(L_j)}{v(Q_j)} + \frac{w(L_j)}{w(Q_j)}\right) + \gamma(\varepsilon) \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)$$
$$\iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right) G^{\frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}} \left(\left(\frac{l_j - \bar l}{l_j}\right)^{m^- -1} \frac{l_j^{m^-} - \tilde u^{m^-}}{(l_j - \bar l)^{m^-}}\right) \zeta_j^{k-2} dxdt \tag{3.16}$$

Перепишемо нерівність (2.10) за допомогою $a = a_j := \left(\frac{l_j}{l_j - \bar l}\right)^{1-m^-}$ та $\delta = \delta_j(\bar l) := l_j - \bar l$ у термінах функцій $\tilde u$, G та F. Тоді $\tilde u \geq \frac{n\xi\omega}{4}$ та $\frac{n\xi\omega}{2} \leq l_j \leq \xi\omega$ і маємо

$$\sup_{t_1-\theta_j<t<t_1} \int\limits_{B_j} vF_j(a_j)\zeta_j^k dx + (\xi\omega)^{m-1} \int\limits_{L_j} w|\nabla G_j(a_j)|^2 \zeta_j^k dxdt$$
$$\frac{\gamma}{\theta_j} \int\limits_{L_j} v \frac{l_j - u}{\delta_j(\bar l)} \zeta_j^{k-2} dxdt + \frac{\gamma(\xi\omega)^{m-1}}{\rho_j^2} \int\limits_{L_j} w \left(\frac{l_j - u}{l_j - \bar l}\right)^{1+\lambda} \zeta_j^{k-2} dxdt \tag{3.17}$$
$$+ \frac{\gamma}{\delta_j(\bar l)} \iint_{Q_j} |f| dxdt,$$

тут ми позначили $F_j(a_j) = F(\tilde u, a_j)$, $G_j(a_j) = G\left(a_j \frac{l_j^{m^-} - \tilde u^{m^-}}{\delta_j^{m^-}(\bar l)}\right)$. Якщо $\tau \leq 1$, виходячи з Леми 2.2, (3.12), оберемо λ, k з умов $0 < \lambda < \frac{h}{h+2}$, $k_2 \frac{2\lambda}{(1-\lambda)h} = 1$, $k_2 = \frac{k-2}{2 + \frac{4\lambda}{1-\lambda}}$, використовуючи той факт, що

$$\frac{\rho_j^2}{w(B_j)} = \frac{\psi_{x_1}(\rho_j)}{v(B_j)}, \ \frac{\psi_{x_1}(\rho_j)}{\theta_j} = \frac{\psi_{x_1}(\rho)}{\theta} \asymp \frac{\psi_{\overline{x}}(\rho)}{\theta},$$

та

$$I_1 = \frac{1}{v(Q_j)} \iint\limits_{L_j} v \frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} dxdt + \frac{1}{\tau} \frac{1}{w(Q_j)} \iint_{L_j} v \left(\frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} \right)^{1+\lambda} dxdt$$

$$+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{w(Q_j)} \iint\limits_{L_j} v \left(\frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} \right)^{1-\lambda} dxdt + \frac{1}{\delta_j(\bar{l})} \frac{1}{v(B_j)} \iint\limits_{Q_j} |f| dxdt,$$

отримаємо для будь-яких $\varepsilon, \varepsilon_1 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma(\varepsilon)}{\tau} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)} \right) G_j^{\frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}}(a_j) \zeta_j^{k-2} dxdt \\ &\leq \gamma(\varepsilon) \left(\varepsilon_1 + \frac{\gamma(\varepsilon_1)}{v(B_j)} \sup_{t_1 - \theta_j < t < t_1} \int_{B_j} v F_j(a_j) \zeta_j^{\frac{4k_2\lambda}{(1-\lambda)h}} dx \right)^h \\ &\times \frac{(\xi\omega)^{m-1}}{v(B_j)} \iint\limits_{L_j} w |\nabla (G_j(a_j) \zeta_j^{\frac{k}{2}})|^2 dxdt \leq \varepsilon_1^h \gamma(\varepsilon) I_1 + \gamma(\varepsilon, \varepsilon_1) I_1^{1+h}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Якщо $\tau \geq 1$ представимо L_j як $L_j'' = L_j' \cup L_j''$, $L_j' = L_j \cap \left\{ a_j \frac{l_j^{m^-} - u^{m^-}}{\delta_j^{m^-}(\bar{l})} < \varepsilon_1 \right\}$, $L_j'' = L_j \setminus L_j'$, використовуючи нерівність $a_j \frac{l_j^{m^-} - u^{m^-}}{\delta_j^{m^-}(\bar{l})} \leq \frac{\gamma(\varepsilon_1)}{\delta_j(\bar{l})} F(u, a_j)$ на L_j'', (див. доведення (3.12)), та покладене

$$I_2 = \frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{v(Q_j)} \iint\limits_{L_j} v \frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} dxdt + \frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{w(Q_j)} \iint\limits_{L_j} w \left(\frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} \right)^{1+\lambda} dxdt$$

$$+ \frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{w(Q_j)} \iint\limits_{L_j} w \left(\frac{l_j - u}{\delta_j(\bar{l})} \right)^{1-\lambda} dxdt + \frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{v(B_j)} \frac{1}{\delta_j(\bar{l})} \iint\limits_{Q_j} |f| dxdt,$$

отримаємо для будь-яких $\varepsilon, \varepsilon_1 \in (0,1)$

$$\gamma(\varepsilon)\tau^{\frac{1}{h}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right) G_j^{\frac{2(1+\lambda)}{1-\lambda}}(a_j)\zeta_j^{k-2}dxdt$$

$$\leq \varepsilon_1\gamma(\varepsilon)\tau^{\frac{1}{h}}\left(\frac{v(L_j')}{v(Q_j)} + \frac{w(L_j')}{w(Q_j)}\right)$$

$$+\gamma(\varepsilon,\varepsilon_1)\left(\frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{v(B_j)}\sup_{t_1-\theta_j<t<t_1}\iint\limits_{L_j''(t)} vF_j(a_j)\zeta_j^{\frac{4k_2\lambda}{(1-\lambda)h}}dx\right)^h \tag{3.19}$$

$$\times\frac{\tau^{\frac{1}{h}}}{v(B_j)}(\xi\omega)^{m-1}\iint\limits_{L_j} w|\nabla(G_j(a_j)\zeta_j^{\frac{k}{2}})|^2dxdt$$

$$\leq \varepsilon_1\gamma(\varepsilon)\tau^{\frac{1}{h}}\left(\frac{v(L_j)}{v(Q_j)} + \frac{w(L_j)}{w(Q_j)}\right) + \gamma(\varepsilon,\varepsilon_1)I_2^{1+h}.$$

Збираючи оцінки (3.16), (3.18) та (3.19) приходимо до

$$A_j(\bar{l}) \leq \left(\varepsilon^{1+\lambda} + \varepsilon_1\gamma(\varepsilon)\right)\max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)\left(\frac{v(L_j)}{v(Q_j)} + \frac{w(L_j)}{w(Q_j)}\right)$$

$$+\varepsilon_1\gamma(\varepsilon)I_1 + \varepsilon_1\gamma(\varepsilon,\varepsilon_1)(I_1+I_2)^{1+h}. \tag{3.20}$$

Оцінимо члени у правій частині (3.20). З (3.13) маємо

$$\frac{v(L_j)}{v(Q_j)} + \frac{w(L_j)}{w(Q_j)} = \iint\limits_{L_j}\left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right)\left(\frac{l_{j-1}-l_j}{l_{j-1}-l_j}\right)^{1+\lambda}\zeta_{j-1}^{k-2}dxdt$$

$$\leq \iint\limits_{L_j}\left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right)\left(\frac{l_{j-1}-u}{l_{j-1}-l_j}\right)^{1+\lambda}\zeta_{j-1}^{k-2}dxdt$$

$$\leq \gamma\iint\limits_{L_{j-1}}\left(\frac{v}{v(Q_{j-1})} + \frac{w}{w(Q_{j-1})}\right)\left(\frac{l_{j-1}-u}{l_{j-1}-l_j}\right)^{1+\lambda}\zeta_{j-1}^{k-2}dxdt$$

$$= \frac{A_{j-1}(l_j)}{\max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)} \leq \frac{\gamma\kappa}{\max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)}. \tag{3.21}$$

Тоді $\frac{l_{j-1}-u}{l_{j-1}-l_j} = 1 + \frac{l_j - u}{l_{j-1}-l_j} \geq 1$ у L_j, з (3.15) отримаємо

$$\frac{\frac{1}{\tau}+\tau^{\frac{1}{h}}}{v(Q_j)} \iint\limits_{L_j} v \frac{l_j-u}{\delta_j(\bar{l})} dxdt + \frac{\frac{1}{\tau}+\tau^{\frac{1}{h}}}{w(Q_j)} \iint\limits_{L_j} w \left(\frac{l_j-u}{\delta_j(\bar{l})}\right)^{1+\lambda} dxdt$$
$$+ \frac{\frac{1}{\tau}+\tau^{\frac{1}{h}}}{w(Q_j)} \iint\limits_{L_j} w \left(\frac{l_j-u}{\delta_j(\bar{l})}\right)^{1-\lambda} dxdt$$
$$\leq \gamma \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right) \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_j)} + \frac{w}{w(Q_j)}\right) \left(\frac{l_{j-1}-u}{l_{j-1}-l_j}\right)^{1+\lambda} dxdt$$
$$\leq \gamma \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right) \iint\limits_{L_j} \left(\frac{v}{v(Q_{j-1})} + \frac{w}{w(Q_{j-1})}\right) \left(\frac{l_{j-1}-u}{l_{j-1}-l_j}\right)^{1+\lambda} \zeta_{j-1}^{k-2} dxdt$$
$$\leq \gamma A_{j-1}(l_j) \leq \gamma\kappa, \tag{3.22}$$

та

$$\frac{1+\tau^{\frac{1}{h}}}{v(B_j)\delta_j(\bar{l})} \iint\limits_{Q_j} |f| dxdt \leq \gamma \left(1+\tau^{\frac{1}{h}}\right) \eta_2. \tag{3.23}$$

Тому з (3.20)–(3.23) випливає нерівність

$$A_j(\bar{l}) \leq \left(\varepsilon^{1+\lambda}\gamma + \varepsilon_1\gamma(\varepsilon)\kappa + \gamma(\varepsilon,\varepsilon_1)(\kappa + \tau^{\frac{1}{h}}\eta_2)\right)^{1+h}.$$

Обираємо ε з умови $\varepsilon^{1+\lambda}\gamma = \frac{1}{16}$, далі обираємо ε_1 з умови $\varepsilon_1\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{16}$, фіксуємо κ за умови $\gamma(\varepsilon,\varepsilon_1)\kappa^h = \frac{1}{16}$ та обираємо η_2 достатньо малим, щоб виконувалась нерівність

$$\eta_2 \leq \kappa(\theta\omega^{m-1})^{\frac{1}{h}}, \tag{3.24}$$

Робимо висновок, що

$$A_j(\bar{l}) \leq \frac{\kappa}{2},$$

це завершує доказ Леми 3.1. □

Далі, оскільки $A_j(l)$ є зростаючою і неперервною функцією при $A_j(l) \to \infty$ та $l \to l_j$, нерівність (3.14) забезпечує існування $\tilde{l} \in (\bar{l}, l_j)$ таку, що $A_j(\tilde{l}) = \kappa$. Якщо $\tilde{l} < l_j - \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_j)$ покладемо $l_{j+1} = \tilde{l}$ та якщо $\tilde{l} \geq l_j - \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_j)$, тоді покладемо $l_{j+1} = l_j - \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_j)$ і в обох випадках матимемо $\delta_j = l_j - l_{j+1}$.

Лема 3.2. *Для будь-якого $j \geq 1$ виконуеться наступна нерівність*

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\delta_{j-1} + \gamma(1+\tau^{\frac{1}{h}})\frac{1}{v(B_j)}\iint\limits_{Q_{j-1}} |f| dxdt. \tag{3.25}$$

Доказ леми повністю аналогічний (3.14). Ми припускаємо, що $\delta_j > \frac{1}{2}\delta_{j-1}$, бо в іншому випадку (3.25) очевидно. Ця нерівність передбачає, що $A_j(l_{j+1}) = \kappa$. Оцінюємо $A_j(l_{j+1})$ аналогічно (3.16), (3.18)–(3.22), тоді отримаємо

$$\kappa \leq (\varepsilon^{1+\lambda}\gamma + \varepsilon_1\gamma(\varepsilon))\kappa + \gamma(\varepsilon, \varepsilon_1)\left(\kappa + \frac{1+\tau^{\frac{1}{h}}}{\delta_j v(B_j)}\iint_{Q_j} |f| dxdt\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Спочатку обираємо ε, потім ε_1 і наприкінці κ достатньо малим, отримуємо при цьому

$$\frac{1+\tau^{\frac{1}{h}}}{\delta_j v(B_j)}\iint\limits_{Q_j} |f| dxdt \geq \gamma,$$

що доводить лему.

Сумувавши нерівність (3.25) по $j = 1, 2, ..., J-1$, приходимо до

$$l_1 - \delta_0 \leq l_J + \gamma(1+\tau^{\frac{1}{h}})I_f(\rho, \theta). \tag{3.26}$$

Якщо $l_1 = l_0 - \frac{1}{4}(f_{-1} - f_0)$, то $\delta_0 = \frac{1}{4}(f_{-1} - f_0)$ і з (3.26) маємо

$$\xi\omega \leq l_J + \gamma(1+\tau^{\frac{1}{h}})I_f(\rho, \theta). \tag{3.27}$$

Якщо $l_1 < l_0 - \frac{1}{4}(f_{-1} - f_0)$, то $A_0(l_1) = \kappa$ і отримаємо

$$\kappa = A_0(l_1) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{\tau}, \tau^{\frac{1}{h}}\right)\iint\limits_{Q_0}\left(\frac{v}{v(Q_0)} + \frac{w}{w(Q_0)}\right)\left(\frac{l_0 - u}{\delta_0}\right)^{1+\lambda}\zeta_0^{k-2} dxdt$$

$$\leq \gamma\eta_1\frac{1}{\tau}(1+\tau)^{\frac{1}{h}+1}\left(\frac{\xi\omega}{\delta_0}\right)^{1+\lambda},$$

тоді, при $l_1 = l_0 - \delta_0$, з (3.26) получимо

$$\xi\omega \leq \gamma\eta_1^{\frac{1}{1+\lambda}}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}}(1+\tau)^{\frac{1+h}{h(1+\lambda)}}\xi\omega + l_J + \gamma(1+\tau^{\frac{1}{h}})I_f(\rho, \theta). \tag{3.28}$$

Наприкінці, збираючи (3.27) та (3.28), використовуючи (3.8) та переходячи до границі при $J \to \infty$, отримуємо

$$\xi\omega \le \lim_{j\to\infty} l_j + \gamma\eta_1^{\frac{1}{1+\lambda}} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{1+\lambda}} (1+\tau)^{\frac{1+h}{h(1+\lambda)}} \xi\omega + \gamma(1+\tau^{\frac{1}{h}})\eta_2\xi\omega.$$

Обираємо η_1 та η_2 з умов

$$\eta_1 \le \gamma^{-1} \frac{(\xi\omega)^{1-m}}{\theta} \left(1 + \frac{(\xi\omega)^{1-m}}{\theta}\right)^{-1-\frac{1}{h}} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1+\lambda}, \tag{3.29}$$

$$\eta_2 \le \gamma^{-1} \frac{(\xi\omega)^{1-m}}{\theta} \left(1 + \frac{(\xi\omega)^{1-m}}{\theta}\right)^{-1-\frac{1}{h}} \frac{\eta}{2}, \tag{3.30}$$

тут (x_1, t_1) є довільною точкою у $Q_{\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{2}}(\overline{x}, \overline{t})$ з (3.28) приходимо до (3.4).

Доведення (3.5)–(3.7) повністю схоже на доведення Лем 3.1, 3.2. Ми опускаємо деталі і залишаємо їх читачеві. Це завершує доведення теореми 3.1. □

У подальшому нам також потрібен наступний варіант леми типу Де Джорджі, що включає вихідні дані.

Теорема 3.2. *Нехай будуть виконані умови Теореми 1.3. Фіксуємо $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, $\eta \in (0,1)$, тоді існують $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ залежні тільки від відомих параметрів, ξ, η, θ та ω таке, що якщо*

$$u(x, \overline{t} - \theta\psi_{\overline{x}}(\rho)) \ge \xi\omega \quad \text{для} \quad x \in B_\rho(\overline{x}), \tag{3.31}$$

і

$$v\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x}, \overline{t}) : u \le \xi\omega\right\}\right) \le \eta_1 v\left(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x}, \overline{t})\right), \tag{3.32}$$

$$w\left(\left\{Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x}, \overline{t}) : u \le \mu_- + \xi\omega\right\}\right) \le \eta_1 w\left(Q_{\rho,\theta\psi_{\overline{x}}(\rho)}(\overline{x}, \overline{t})\right), \tag{3.33}$$

то або

$$\xi\omega \le \eta_2^{-1} I_f(\rho, \theta), \tag{3.34}$$

або

$$u(x,t) \ge \eta\xi\omega, \quad \text{для майже всіх} \quad x \in B_{\frac{\rho}{2}}(\overline{x}), \tag{3.35}$$

для всіх $t \in (\overline{t} - \theta\psi_{\overline{x}}(\rho), \overline{t})$.

Доведення. Доведення подібне доведенню Теореми 3.1. Взявши зрізку ζ незалежною від t, використовуючи Лему 2.5 і приводячи ті ж аргументи, що й в попередньому доведенні, ми доводимо Теорему 3.2. □

4. Розширення позитивності

Наш головний результат цього розділу

Theorem 4.1. *Нехай умови* (1.3)–(1.6) *та* (1.10) *виконуються. Нехай u обмежений невід'ємний слабкий розв'язок* (1.2). *Припустимо також, що*

$$v\left(\{B_r(y) : u(\cdot, s) \leq N\}\right) \leq (1-\beta)v(B_r(y)), \tag{4.1}$$

для деяких $\beta \in (0,1)$, $N > 0$, $r > 0$ *та деяких* $(y,s) \in \Omega_T$. *Тоді існують числа* $\eta_0, \eta_2 \in (0,1)$, $c_6 > 0$, $0 < b_1 < b_2$ *залежні тільки від відомих параметрів, такі, що або*

$$N \leq \eta_2^{-1} I_f(8r, c_6 N^{1-m}), \tag{4.2}$$

або

$$u(x,t) \geq \eta_0 N, \text{ для майже всіх } x \in B_{2r}(y), \tag{4.3}$$

для усіх $s + b_1\psi_y(r)N^{1-m} \leq t \leq s + b_2\psi_y(r)N^{1-m}$.

Доведення. При доведенні Теореми 4.1 ми слідуємо [29]. Далі ми припускаємо, що

$$N \geq \eta_2^{-1} I_f(8r, c_6 N^{1-m}). \tag{4.4}$$

□

Лема 4.1. *Припустимо, що для деяких* $(y,s) \in \Omega_T$, *деякої* $\beta \in (0,1)$, $N > 0$, *та* $r > 0$ *нерівність* (4.1) *виконується. Тоді існують числа* $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ *залежні тільки від даних* β *такі, що*

$$v\left(\{B_r(y) : u(\cdot, t) \leq \varepsilon N\}\right) \leq \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) v(B_r(y)), \tag{4.5}$$

для всіх $t \in (s, s+\theta)$, $\theta = \delta N^{1-m}\psi_y(r)$.

Доведення. Використаємо Лему 2.4 з $l = N$ у циліндрі $Q_{r,\theta}(y, s+\theta)$ та $\zeta = \zeta(x) \in C_0^\infty(B_r(y))$, $\zeta = 1$ у $(B_{r(1-\sigma)}(y))$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $|\nabla\zeta| \leq \frac{1}{\sigma r}$. При цьому оцінка (2.8) з Леми 2.4 набуває форми

$$\sup_{s<t<s+\theta} \int\limits_{B_{r(1-\sigma)}(y)} v \int\limits_u^N (N^{m^-} - s^{m^-}) ds dx \leq \int\limits_{B_r(y)\times\{s\}} v \int\limits_u^N (N^{m^-} - s^{m^-}) ds dx$$

$$+ \frac{\gamma}{(\sigma r)^2} \iint Q_{r,\theta}(y, s+\theta) u^{m-m^-} \left(N^{m^-} - s^{m^-}\right)_+^2 dx dt$$

$$+\gamma \iint\limits_{Q_{r,\theta}(y,s+\theta)} \left(N^{m^-} - s^{m^-}\right)_+ |f| dx dt \leq N^{m^-+1} v(B_r(y)) \times$$

$$\times \left((1-\beta) \frac{m^-}{1+m^-} + \sigma^{-2}\gamma\delta + \gamma \frac{N^{-1}}{v(B_r(y))} \iint\limits_{Q_{r,\theta}(y,s+\theta)} |f| dx dt \right).$$

Звідси, використовуючи нерівності

$$\int_u^N (N^{m^-} - s^{m^-}) ds \geq \frac{m^-}{1+m^-} N^{m^-+1} \left(1 - \varepsilon \frac{m^-+1}{m^-}\right), \text{ якщо } u \leq \varepsilon N,$$

$$\frac{N^{-1}}{v(B_r(y))} \iint_{Q_{r,\theta}(y,s+\theta)} |f| dx dt \leq \gamma N^{-1} I_f(2r, N^{1-m}) \leq \gamma \eta_2$$

і використовуючи той факт, що

$$\frac{v(B_r(y) \setminus B_{r(1-\sigma)}(y))}{v(B_r(y))} \leq \left(\frac{|B_r(y) \setminus B_{r(1-\sigma)}(y)|}{|B_r(y)|}\right)^{\xi_1} \leq K_3 (n\sigma)^{\xi_1},$$

отримаємо для кожного $s < t < s+\theta$

$$v\left(\{B_r(y) : u(\cdot,t) \leq \varepsilon N\}\right)$$

$$\leq v(B_r(y)) \left(K_3(n\sigma)^{\xi_1} + \frac{1-\beta}{1-\varepsilon \frac{m^-+1}{m^-}} + \sigma^{-2}\gamma\delta + \gamma\eta_2 \right).$$

Спочатку обираємо σ та η_2 такі, що $K_3(n\sigma)^{\xi_1} + \gamma\eta_2 \leq \frac{1}{4}\beta^2$, потім ε таке, що $\frac{1}{1-\varepsilon\frac{m^-+1}{m^-}} \leq 1+\beta$ і наприкінці, обираємо δ з умови $\sigma^{-2}\gamma\delta \leq \frac{1}{4}\beta^2$ Таким чином, приходимо до необхідного (4.5). □

Далі ми виокремимо два випадки: $m > 1$ та $m < 1$. Спершу розглянемо випадок $m > 1$. Замінивши у нерівності Леми 4.1 N на $e^{-\tau}N$, отримаємо

$$v\left(\left\{B_{4r}(y) : u(\cdot,t) \leq \varepsilon e^{-\tau} N\right\}\right) \leq \left(1 - \frac{2^{-1}\beta^2}{K_4 4^{n\nu}}\right) v(B_{4r}(y)), \tag{4.6}$$

для всіх $\tau > 0$ та всіх $s < t \leq s+\theta$, $\theta = \delta\psi_y(r)\left(e^{\tau}N^{-1}\right)^{m-1}$. Вводимо заміну змінних і нову невідому функцію $t = s + \delta\psi_y(r)\left(e^{\tau}N^{-1}\right)^{m-1}$, $\Phi(x,\tau) = \frac{e^{\tau}\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}}{N} u(x,t)$. Нерівність (4.6) виглядає для Φ як

$$v\left(\{B_{4r}(y) : \Phi(\cdot,\tau) \leq k_0\}\right) \leq \left(1 - \frac{2^{-1}\beta^2}{K_4 4^{n\nu}}\right) v(B_{4r}(y)), \tag{4.7}$$

для всіх $\tau > 0$, тут $k_0 = \varepsilon\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}$. Тому що $\Phi \geq 0$, формальне диференціювання дає

$$v\Phi_\tau = v\Phi + (m-1)\delta v\left(\frac{e^\tau\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}}{N}\right)^m u_t \geq div\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi) + \tilde{f},$$

де $\tilde{A}$, $\tilde{f}$ задовольняють умовам

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi)\nabla\Phi &\geq (m-1)\delta K_1 w(x)\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|^2\\ |\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi)\nabla\Phi| &\leq (m-1)\delta K_2 w(x)\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|,\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\tilde{f}(x,\tau) = (m-1)\delta\left(\frac{e^\tau\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}}{N}\right)^m f(x, s+\delta\psi_y(r)(e^\tau N^{-1})^{m-1}).$$

Лема 4.2. *Для кожного $\eta_1 \in (0,1)$ існує $j_* \geq 1$, що залежить тільки від даних β, δ та η_1 таке, що*

$$v\left(\left\{Q^* : \Phi \leq k_0 2^{-j_*-1}\right\}\right) \leq \eta_1 v(Q^*), \tag{4.9}$$

тут $Q^* = B_{4r}(y)\times(\frac{1}{2}\tau_*, \tau_*)$, $\tau_* = \left(\frac{2^{j_*}}{\varepsilon}\right)^{m-1}$.

Доведення. Використовуємо Лему 2.3 з $k = k_0 2^{-j-1}$, $l = k_0 2^{-j}$, з урахуванням (4.7) та $w \in A_p$ з деяким $p < 2$, та отримуємо для кожного $1 \leq j \leq j_*$

$$\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^p v(A_{j+1}(\tau)) \leq \gamma r^p\frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}\int_{A_j(\tau)\setminus A_{j+1}(\tau)} w|\nabla\Phi|^p dx,$$

$A_j(\tau) = \left\{B_{4r}(y) : \Phi(\cdot,\tau) \leq \frac{k_0}{2^j}\right\}$, для всіх $\tau > 0$. Інтегрування цієї нерівності по τ, $\tau \in \left(\frac{\tau_*}{2}, \tau_*\right)$ та використання нерівності Гельдера приводить до

$$\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{\frac{2p}{2-p}} v(A_j(\tau))^{\frac{2}{2-p}} \leq \gamma\left(r^p\frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}\right)^{\frac{2}{2-p}}\times$$
$$\times\left(\iint\limits_{A_j} w\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|^2 dx d\tau\right)^{\frac{p}{2-p}}\left(\frac{2^j}{k_0}\right)^{(1-m)\frac{p}{2-p}} w(A_j(\tau)\setminus A_{j+1}(\tau)), \tag{4.10}$$

де $A_j = Q^* \cap \left\{\Phi < \frac{k_0}{2^j}\right\}$.

Для оцінки першого доданка правої частини попередньої нерівності ми використовуємо Лему 2.4 з $l = \frac{k_0}{2^j}$ та $\zeta \in C_0^{\infty}(\tilde{Q}^*)$, $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 1$, у $\tilde{Q}^*$, з $|\nabla\zeta| \le \gamma r^{-1}$, $|\zeta_\tau| \le \gamma\tau_*^{-1}$, $\tilde{Q}^* = B_{8r}(y) \times \left(\frac{1}{4}\tau_*, 2\tau_*\right)$

$$\iint\limits_{A_j} w\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|^2 dxd\tau \le \gamma\frac{k_0}{2^j}\iint_{\tilde{Q}^*} v\left(\frac{k_0}{2^j} - \Phi\right)_+ |\zeta_\tau| dxd\tau$$

$$+\gamma\iint\limits_{\tilde{Q}^*} w\Phi^{m-1}\left(\frac{k_0}{2^j} - \Phi\right)_+^2 |\nabla\zeta|^2 dxd\tau + \gamma\iint\limits_{\tilde{Q}^*} |\tilde{f}|\left(\frac{k_0}{2^j} - \Phi\right)_+ dxd\tau$$

$$\le \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{2^{s_*}}\right)^{m-1} v(\tilde{Q}^*) + \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{m+1}\frac{w(\tilde{Q}^*)}{r^2}$$

$$+\gamma\frac{k_0}{2^j}\iint\limits_{\tilde{Q}^*}|\tilde{f}|dxd\tau \le \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{m+1}$$

$$\times\frac{w(\tilde{Q}^*)}{r^2}\left(1 + \left(\frac{2^j}{k_0}\right)^m \frac{r^2}{w(\tilde{Q}^*)}\iint\limits_{\tilde{Q}^*}|\tilde{f}|dxd\tau\right) \le \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{m+1}\frac{w(\tilde{Q}^*)}{r^2}$$

$$\times\left(1 + \frac{e^{2\tau_*}}{Nv(B_r(y))}\iint\limits_{Q_{4r,\left(\frac{e^{2\tau_*}}{N}\right)^{m-1}\psi_y(r)}\left(y,\left(\frac{e^{2\tau_*}}{N}\right)^{m-1}\psi_y(r)\right)} |f|dxdt\right)$$

$$\le \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{m+1}\frac{w(\tilde{Q}^*)}{r^2}\left(1 + \frac{e^{2\tau_*}}{N} I_f\left(4r, \left(\frac{e^{2\tau_*}}{N}\right)^{m-1}\right)\right),$$

обираючи η_2 з умови $\eta_2 \le e^{-2\tau_*}$, та c_6 з умови $e^{2\tau_*(m-1)} \le c_6$, отримаємо

$$\iint\limits_{A_j} w\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|^2 dxdt \le \gamma\left(\frac{k_0}{2^j}\right)^{m+1} r^{-2} w(Q^*). \tag{4.11}$$

Збираючи оцінки (4.10), (4.11) прийдемо до

$$v(A_{j+1})^{\frac{p}{2-p}} \le \gamma\frac{v(B_r(y))^{\frac{p}{2-p}}}{w(B_r(y))} w(A_j \setminus A_{j+1}).$$

Сумуючи останню нерівність по $1 \le j \le j_*$ робимо висновок, що $(j_* - 1)v(A_{j_*+1})^{\frac{p}{2-p}} \le \gamma v(B_{4r}(y))^{\frac{p}{2-p}}$, обираємо j_* з умови $\gamma(j_* - 1)^{-\frac{2-p}{p}} \le \eta_1$, отримаємо (4.9), що доводить лему. □

За Теоремою 3.1 з

$$\eta = \frac{1}{2},\ \xi\omega = \frac{k_0}{2^{j_*+1}} = \frac{\varepsilon\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}}{2^{j_*+1}},\ \theta = \left(\frac{2^{j_*}}{\varepsilon\psi_y(r)^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{m-1}$$

та використовуючи той факт, що $\frac{w(E)}{w(Q)} \le \gamma\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\xi_1} \le \gamma\left(\frac{v(E)}{v(Q)}\right)^{\frac{\xi_1}{\xi_2}}$ для кожної $E \subset Q \subset R^{n+1}$, з Леми 4.2 отримаємо $\Phi(x,\tau) \ge \frac{k_0}{2^{j_*+2}}$, для майже всіх $x \in B_{2r}(y)$, та для всіх $\tau \in \left(\frac{5}{8}\tau_*, \frac{7}{8}\tau_*\right)$. Ця нерівність перетворюється для u при $u(x,t) \ge \frac{\varepsilon N}{2^{j_*+2}}e^{-\tau_*}$, для майже всіх $x \in B_{2r}(y)$ та для всіх $s + b_1\psi_y(r)N^{1-m} \le t \le s + b_2\psi_y(r)N^{1-m}$, де $b_1 = \delta e^{\frac{5}{8}\tau_*(m-1)}$, $b_2 = \delta e^{\frac{7}{8}\tau_*(m-1)}$, $\tau_* = \left(\frac{2^{j_*}}{\varepsilon}\right)^{m-1}$. Це доводить (4.3) у випадку, коли $m > 1$. □

Тепер розглянемо випадок $m < 1$. Нерівність (4.1) разом з Лемою 4.1 дає

$$v\left(\{B_r(y) : u(\cdot,t) \le \varepsilon N\}\right) \le \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) v(B_r(y)), \tag{4.12}$$

для всіх $s < t < s + \theta$, $\theta = \delta N^{1-m}\psi_y(r)$.

Вводимо заміну змінних і нову невідому функцію $t = s + \delta\psi_y(r)N^{1-m}(1 - e^{-\tau(1-m)})$, $\Phi(x,\tau) = \frac{e^\tau}{N}\psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}$, $\tau > 0$. Тоді $\Phi \ge 0$, і формальним диференціюванням отримаємо

$$v\Phi_\tau = v\Phi + (1-m)\delta\left(\frac{e^\tau}{N}\psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}\right)^m u_t \ge div\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi) + \tilde{f}$$

де $\tilde{A}$, $\tilde{f}$ задовольняє

$$\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi)\nabla\Phi \ge (1-m)\delta K_1 w(x)\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|^2,$$

$$|\tilde{A}(x,\tau,\Phi,\nabla\Phi)\nabla\Phi| \le (1-m)\delta K_2 w(x)\Phi^{m-1}|\nabla\Phi|,$$

$$\tilde{f} = (1-m)\delta\left(\frac{e^\tau}{N}\psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}\right)^m f(x, s + \delta\psi_y(r)N^{1-m}(1 - e^{-\tau(1-m)})).$$

У цьому випадку нерівність (4.12) може бути переписана у формі

$$v\left(\left\{B_r(y) : \Phi(\cdot,\tau) \le \varepsilon e^{\tau_0} N\psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}\right\}\right) \le \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) v(B_r(y)),$$

для всіх $\tau \geq \tau_0$ та $\tau_0 > 0$.

Звідси, використовуючи (1.4) ми отримаємо

$$v\left(\left\{B_{8r}(y) : \Phi(\cdot,\tau) \leq \varepsilon e^{\tau_0} N \psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}\right\}\right) \leq \left(1 - \frac{2^{-1}\beta^2}{k_4 8^{n\nu}}\right) v(B_{8r}(y)), \tag{4.13}$$

для всіх $\tau \geq \tau_0$. Нехай $k_0 = \varepsilon e^{\tau_0} N \psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}$ та $k_j = \frac{k_0}{2^j}$, $j = 1, 2, ...j_*$.

Нерівність (4.13) дає

$$v\left(\{B_{8r}(y) : \Phi(\cdot,\tau) \leq k_j\}\right) \leq \left(1 - \frac{2^{-1}\beta^2}{K_4 8^{n\nu}}\right) v(B_{8r}(y)), \tag{4.14}$$

для всіх $\tau \geq \tau_0$ та всіх $1 \leq j \leq j_*$. Нехай $Q_0 := B_{8r}(y) \times (\tau_0 + k_0^{1-m}\psi_y(r)), \tau_0 + 2k_0^{1-m}\psi_y(r))$, $Q_0' = B_{16r}(y) \times (\tau_0, \tau_0 + 4k_0^{1-m}\psi_y(r))$ та нехай $\zeta \in C_0^\infty(Q_0')$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ у Q_0 та $|\nabla\zeta| \leq \gamma r^{-1}$, $|\nabla\zeta_\tau| \leq \gamma \frac{k_0^{m-1}}{\psi_y(r)}$. Використовуючи Лему 2.4, аналогічно (4.11), отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0} w|\nabla(k_j^m - \Phi^m)_+|^2 dxdt \leq \gamma k_j^m \iint\limits_{Q_0'} v(k_j - \Phi)_+ |\zeta_\tau| dxd\tau$$

$$+\gamma \iint\limits_{Q_0'} w(k_j^m - \Phi^m)_+^2 |\nabla\zeta|^2 dxd\tau + \iint\limits_{Q_0'} |f|(k_j^m - \Phi^m)_+ dxdt$$

$$\leq \gamma k_j^{2m} r^{-2} w(Q_0').$$

Обираючи j_* досить великим, аналогічно Лемі 4.2, приходимо до

Лема 4.3. *Для будь-якого $\eta_1 \in (0,1)$ існує $j_* \geq 1$, що залежить тільки від даних β, δ та η_1, таких, що*

$$v\left(\{Q_0 : \Phi \leq k_{j_*}\}\right) \leq \eta_1 v(Q_0). \tag{4.15}$$

Розкладаємо Q_0 на $2^{j_*(1-m)}$ циліндри, встановлюючи $Q_0 = \cup\, Q_i$, $i = 0,\ 1,\ 2, ..., 2^{j_*(1-m)}$, $Q_i = B_{8r}(y) \times (\tau_0 + k_0^{1-m}\psi_y(r) + ik_{j_*}^{1-m}\psi_y(r)),$ $\tau_0 + k_0^{1-m}\psi_y(r) + (i+1)k_{j_*}^{1-m}\psi_y(r))$. Принаймні для одного з Q_i, нехай це Q_{i_0}, виконується

$$v\left(\{Q_{i_0} : \Phi \leq k_{j_*}\}\right) \leq \eta_1 v(Q_{i_0}).$$

За Теоремою 3.1 з $\eta = 1$, $\xi\omega = k_{j_*}$, $\theta = k_{j_*}^{1-m}$ разом з попередньою нерівністю, яку ми отримуємо $\Phi(x,\tau_1) \geq \frac{\varepsilon e^{\tau_0}}{2^{j_*+1}} \psi_y(r)^{-\frac{1}{1-m}}$ для майже всіх $x \in B_{4r}(y)$ та для часового рівня $\tau_0 + k_0^{1-m}\psi_y(r) < \tau_1 < \tau_0 + 2k_0^{1-m}\psi_y(r)$. Ця нерівність для u означає, що

$$u(x,t_1) \geq \frac{\varepsilon N}{2^{j_*+1}} e^{-(\tau_1-\tau_0)} = N_1 \ \text{ в } \ B_{4r}(y), \tag{4.16}$$

де $t_1 = s + \delta\psi_y(r)N^{1-m}(1-e^{-\tau_1(1-m)})$.

Використовуючи Теорему 3.2 та (4.16) маємо

$$u(x,t) \geq \frac{N_1}{2} = \frac{\varepsilon N}{2^{j_*+2}} e^{-(\tau_1-\tau_0)} \ \text{ в } \ B_{2r}(y), \tag{4.17}$$

для всіх значень часу з проміжку $t_1 \leq t \leq t_1 + \eta_0\gamma^{-1}\psi_y(r)N_1^{1-m}$.

Обираємо τ_0 таким, що $t_1 \leq t \leq t_1 + \eta_0\gamma^{-1}\psi_y(r)N_1^{1-m} = s + \delta\psi_y(r)N_1^{1-m}$, де маємо на увазі $e^{\tau_0(1-m)} = \frac{\delta\gamma}{\eta_0\varepsilon}2^{j_*+2}$. Звідси отримаємо (4.3) з $b_1 = \delta - \eta_0\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2^{j_*+2}}e^{-(\tau_1-\tau_0)}\right)^{1-m}$ та $b_2 = \delta$. Це завершує доведення теореми 4.1 для випадку $m < 1$. □

5. Неперервність розв'язків. Нерівність Гарнака. Доведення Теорем 1.3, 1.4

Після того, як доведено теореми 3.1 та 4.1, решта аргументів не відрізняються від [10]. Надаємо тут короткий ескіз.

5.1. Неперервність розв'язків

Нехай (x_0, t_0) є довільною точкою в Ω_T та фіксуємо $\varepsilon, R \in (0,1)$ таке, що $\varepsilon \max(m^+ - m, m^+ - 1) < 1$ та $Q_{8R}^{(\varepsilon)} \subset \Omega_T$, де $Q_R^{(\varepsilon)} := Q_{\rho,\tau}(x_0,t_0)$. Якщо $\rho = \psi_{x_0}^{-1}\left(\psi_{x_0}^{1-\varepsilon(m^+-m)}(R)\right)$, $\tau = \psi_{x_0}^{1-\varepsilon(m^+-1)}(R)$. Покладемо $\mu_+ = \sup\limits_{Q_{8R}^{(\varepsilon)}} u$, $\mu_- = \inf\limits_{Q_{8R}^{(\varepsilon)}} u$, $\omega_0 = \mu_+ - \mu_-$. Тут $\omega \geq CR^\varepsilon$, де $C = b_2^{\frac{1}{m-1}}$ коли $m > 1$, $C = 1$ коли $m < 1$ та b_2 є числом, визначеним у Теоремі 5.1, тоді циліндр $Q(R,\omega_0) = Q_{r,\theta}(x_0,t_0)$ міститься в $Q_R^{(\varepsilon)}$, де $r = \psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\omega_0^{m^+-m}}\right)$, $\theta = b_2\frac{\psi_{x_0}(R)}{\omega_0^{m^+-1}}$. Припускаємо спочатку, що $\mu^+ \leq \dfrac{13}{12}\omega$. Можливі наступні два альтернативних випадки:

$$v\left(\left\{B_r(x_0) : u(\cdot, t_0 - b_2\theta) \geq \mu_+ - \frac{\omega_0}{2}\right\}\right) \leq \frac{1}{2}v(B_r(x_0)), \tag{5.1}$$

або

$$v\left(\left\{B_r(x_0) : u(\cdot, t_0 - b_2\theta) \leq \frac{\omega_0}{2}\right\}\right) \leq \frac{1}{2}v(B_r(x_0)). \tag{5.2}$$

З (5.1), (5.2) Теореми 4.1 з $\eta = \frac{1}{2}$ робимо висновок, що

$$osc_{Q_{\frac{r}{2},(b_2-b_1\theta)}(x_0,t_0)}\ u \le \max\left((1-\eta_0)\omega_0, 2\eta_2^{-1} I_f(8r, c_6\omega_0^{1-m})\right).$$

Якщо $\delta = 1-\eta_0$, $\sigma = \min\left((2K_4)^{-2-n\nu_1}\delta^{(m^+-m)(2+n\nu_1)}, \frac{b_2-b_1}{b_2}\delta^{m^+-1}\right)$, $r_1 := \psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\sigma\psi_{x_0}(R)}{\omega_1^{m^+-m}}\right)$, $\omega_1 := \max\left(\delta\omega_0, 2\eta_2^{-1} I_f(8r, c_6\omega_0^{1-m})\right)$, $\theta_1 := b_2\frac{\sigma\psi_{x_0}(R)}{\omega_1^{m^+-1}}$, $Q_1 := Q_{r_1,\theta_1}(x_0,t_0)$, тоді з попереднього отримуємо

$$osc_{Q_1}\ u \le \omega_1.$$

Покладаючи $r_l := \psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\sigma^l\psi_{x_0}(R)}{\omega_l^{m^+-m}}\right)$, $\theta_l := b_2\frac{\sigma^l\psi_{x_0}(R)}{\omega_l^{m^+-1}}$, $Q_l := Q_{r_l,\theta_l}(x_0,t_0)$, $\omega_l := \max\left(\delta\omega_{l-1}, 2\eta_2^{-1} I_f(8r_{l-1}, c_6\omega_{l-1}^{1-m})\right)$, $l = 1,2,...$ та повторюючи попередню операцію, отримуємо

$$osc_{Q_l}\ u \le \omega_l,\ l = 1,2,... \tag{5.3}$$

З (5.3) за стандартною ітерацією (для прикладу див. [5—7]), для будь-яких $\rho \in (0,R)$ та $\lambda \in (0,1)$ отримаємо

$$\begin{aligned} osc_{Q_{\tilde r,\tilde\theta}(x_0,t_0)} u &\le \gamma\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta(1-\lambda)}\left(\omega_0 + \frac{2\eta_2^{-1}}{1-\delta} I_f(8r_0, c_6\omega_0^{1-m})\right) \\ &+ \gamma I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\psi_{x_0}\left(R\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda}\right)\omega_0^{m-m^+}\right),\ c_6\omega_0^{1-m}\right), \end{aligned} \tag{5.4}$$

з деякими $\beta \in (0,1)$, що залежить лише від відомих параметрів та $\tilde r = \psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\omega_0^{m^+-m}}\right)$, $\tilde\theta = b_2\frac{\psi_{x_0}(\rho)}{\omega_0^{m^+-1}}$. Оцінимо доданки правої частини (5.4). Якщо $m>1$ та $\omega_0>1$ тоді для всіх $\overline{R} \in (0,R)$ маємо

$$I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}\left(\overline{R}\right)}{\omega_0^{m^+-m}}\right),\ c_6\omega_0^{1-m}\right) = I_f\left(\gamma\overline{R},\ c_6\omega_0^{1-m}\right) \le \gamma I_f\left(\gamma\overline{R}, 1\right).$$

Якщо $\mu_+ \ge \dfrac{13}{12}\omega$, то $\mu_- \le \dfrac{1}{12}\mu_+$ і з цієї нерівності випливає, що u рівномірно обмежена від нуля і рівняння (1.2) не є виродженим в $Q_{r,\theta}(x_0,t_0)$ і має лінійне зростання. Подальші міркування аналогічні параграфам 2-4 з урахуванням лінійного росту рівняння. Це доводить неперервність розв'язків u.

Якщо $m<1$ та $\omega_0<1$ тоді

$$I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}\left(\overline{R}\right)}{\omega_0^{m^+-m}}\right),\ c_6\omega_0^{1-m}\right) \le \gamma I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}\left(\overline{R}\right)}{\omega_0^{1-m}}\right), 1\right).$$

З іншого боку, якщо $m > 1$ та $\omega_0 < 1$, тоді

$$I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}\left(\overline{R}\right)}{\omega_0^{m^+-m}}\right),\ c_6\omega_0^{1-m}\right) = I_f\left(\gamma\overline{R},\ c_6\omega_0^{1-m}\right)$$

$$\leq \gamma\omega_0^{-\frac{n\nu}{\alpha}(m-1)}I_f\left(\gamma\frac{\overline{R}}{\omega_0^{\frac{m-1}{\alpha}}}, 1\right),$$

аналогічно, якщо $m < 1$ та $\omega_0 > 1$, отримаємо

$$I_f\left(\gamma\psi_{x_0}^{-1}\left(\frac{\psi_{x_0}\left(\overline{R}\right)}{\omega_0^{m^+-m}}\right),\ c_6\omega_0^{1-m}\right) = I_f\left(\gamma\overline{R},\ c_6\omega_0^{1-m}\right)$$

$$\leq \gamma\omega_0^{\frac{n\nu}{\alpha}(1-m)}I_f\left(\gamma\frac{\overline{R}}{\omega_0^{\frac{1-m}{\alpha}}}, 1\right),$$

У будь-якому разі, отримаємо, що $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_T} I_{v,w,f}(x,t,R,1) = I_f(R,1)$, тобто $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_T} I_{v,w,f}(x,t,\rho,1)$ це лінійний ваговий потенціал Рісса. Це доводить неперервність u у випадку $\mu_+ \leq \dfrac{13}{12}\omega$.

5.2. Нерівність Гарнака

Розглянемо циліндр $Q_\tau := B_{\tau R} \times \left(t_0 - \tau\frac{\psi_{x_0}(R)}{u_0^{m-1}}, t_0\right), u_0 = u(x_0, t_0)$. Слідуючи за Криловим і Сафоновим [51] розглянемо рівняння

$$\max_{Q_\tau} u = u_0(1-\tau)^{-\beta},$$

де $\beta > 1$ залежить лише від даних. Нехай τ_0 буде максимальним коренем наведеного рівняння і $u(y,s) = \max\limits_{Q_{\tau_0}} u = u_0(1-\tau_0)^{-\beta}$.

Нехай $\rho = (K_5^{-1}K_4^{-2}2^{-n(\nu+\mu)})^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1-\tau_0}{2}\right)^{\max\left(1,\frac{1}{\alpha}\right)}$ та $\tilde{Q} := B_\rho(y) \times (s - \psi_\rho(y)(u_0(1-\tau_0)^{-\beta})^{1-m}, s)$. Оскільки $\tilde{Q} \subset Q_{\frac{1+\tau_0}{2}}$, то маємо, що

$$\max_{\tilde{Q}} u \leq \max Q_{\frac{1+\tau_0}{2}} u \leq 2^\beta(1-\tau_0)^{-\beta}u_0.$$

Твердження. Існує додатне число $\eta_1(\beta)$ таке, що

$$v\left(\left\{\tilde{Q} : u \geq \frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right\}\right) \geq \eta_1(\beta)v(\tilde{Q}).$$

Дійсно, у оберненому випадку ми застосовуємо теорему 4.1 з виборами $\mu_+ = 2^\beta(1-\tau_0)^{-\beta}u_0$, $\xi\omega = (2^\beta - \frac{1}{2})(1-\tau_0)^{-\beta}u_0$, $\eta = \frac{2^\beta - \frac{3}{4}}{2^\beta - \frac{1}{2}}$. Умова $u_0 \geq \eta_2^{-1} I_f\left(\rho, (\xi\omega)^{1-m}\right)$. Тому можна зробити висновок, що $u(y,s) \leq \frac{3}{4}(1-\tau_0)^{-\beta}$ й досягнуто суперечності, яка підтверджує істинність твердження.

Застосування теореми 4.1 приводить до того, що, якщо $\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta} \geq \eta_2^{-1} I_f\left(8\rho, c_6\left(\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m}\right)$, то $u(x,t) \geq$ $\geq \eta_0 \frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}$ для $|x-y| \leq 2\rho$, $s + b_1\psi_y(\rho)\left(\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m} \leq$ $\leq t \leq s + b_2\psi_y(\rho)\left(\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m}$. Після ітерації для $j = 1, 2, 3, ...$ маємо $\eta_0^{j-1}\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta} \leq \eta_2^{-1} I_f\left(2^{j+3}\rho, c_6\left(\eta_0^{j-1}\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m}\right)$, або $u \geq \eta_0^j \frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}$ для $|x-y| \leq 2^j\rho$, $s + b_1\left(\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m} \times$ $\times \sum\limits_{i=0}^{j-1} \eta_0^{i(1-m)}\psi_y(2^i\rho) \leq t \leq s + b_2\left(\frac{u_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}\right)^{1-m} \sum\limits_{i=0}^{j-1} \eta_0^{i(1-m)}\psi_y(2\rho)$.

Оскільки $\sum_{i=0}^{j-1} \eta_0^{i(1-m)}\psi_y(2^i\rho) \asymp \eta_0^{j(1-m)}\psi_y(2^j\rho)$, то обираючи j таким, що $2^j\rho = 2$ та β з умови $2^\beta\eta_0 = 1$ ми завершуємо доведення (див. [39, Частина 8] щодо деталей).

Література

[1] Abdellaoui, B., Peral Alonso, I. (2004). Hölder reqularity and Harnack inequality for degenerate parabolic equations related to Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. *Nonl. Anal., 57*(7–8), 971–1003.

[2] Aizerman, M., Simon, B. (1982). Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math. 35*, 209–273.

[3] Aronson, D.G., Serrin, J. (1967). Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Rational Mech. Anal., 25*, 81–122.

[4] Aronson, D.G. (1986). The porous medium equations. In: *Nonl. Diffusion Problems. Lecture Notes in Math.* Springer, Verlag, New York, 1–46.

[5] Bögelein, V., Duzaar, F., Gianazza, U. (2014). Continuity estimates for porous medium type equations with measure data. *J. Funct. Anal., 267*, 3351–3396.

[6] Bögelein,V., Duzaar, F., Gianazza, U. (2013). Porous medium type equations with measure data and potential estimates. *SIAM J. Math. Anal., 45*(6), 3283–3330.

[7] Bögelein, V., Duzaar, F., Gianazza, U. (2016). Sharp boundedness and continuity results for the singular porous medium equation. *Israel J. Math., 214*, 259–314.

[8] Bonafede, S., Skrypnik, I.I. (1999). On Hölder continuity of solutions of doubly nonlinear parabolic equations with weight. *Ukr. Math. Zh., 51*(7), 890–903; transl. in (2000). U*kr. Math. J., 51*(7), 996–1012.

[9] Bonforte, M., Dolbeanlt, J., Muratori, M., Nazaret, B. (2017). Weighted fast diffusion equations (Part I): Sharp asymptotic rates without symmetry breaking in Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Kinetic and Related Models 10*(1), 33–59.

[10] Bonforte, M., Dolbeanlt, J., Muratori, M., Nazaret, B. (2017). Weighted fast diffusion equations (Part II): Sharp asymptotic rates of convergence in relative error by entropy metods. *Kinetic and Related Models 10*(1), 61–91.

[11] Bonforte, M., Simonov, N. (2018). Quantitative a priori estimates for fast diffusion equations with Cafferelli–Kohn–Nirenberg weights. Harnack inequalities and Hölder continuity: ar Xiv: 1804. 03537.2018.

[12] Buryachenko, K.O., Skrypnik, I.I. (2019). Riesz potentials and pointwaise estimates of solutions to anisotropic porous medium equation. *Nonl. Analysis, 178*, 56–85.

[13] Cafarelli, L.A., Evans, C.L. (1983). Continuity of the temperature in the two phase Stefan problem. *ARMA, 81*, 199–220.

[14] Cafarelli, L.A., Friedman, A. (1980). Regularity of the free boundary of a fas flow in an n-dimensional porous medium. *Indiana Univ. J., 29*, 361–391.

[15] Chanillo, S., Wheeden, R.L. (1986). Harnack's inequality and mean-value inequalities for solution of degenerate elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations, 11*(10), 1111–1134.

[16] Chanillo, S., Wheeden R.L. (1985). Weighted Poincaré and Sobolev enequalities and estimates for weighted Peano maximal functions. *Amer. J. Math. 107*(5), 1191–1226.

[17] Chiado Piat, V., Serra Cassano, F. (1994). Relaxation of degenerate variational integrals. *Nonl. Analysis, 22*(4), 409–424.

[18] Chiado Piat, V., Serra Cassano, F. (1994). Some remarks about the density of smooth function in weighted Sobolev spase. *J. Convex Anal. 2*, 135–142.

[19] Chiarenza, F.M., Frasca, M. (1985). A note on a weighted Sobolev inequality. *Proc Amer. Soc., 93*(4), 703–704.

[20] Chiarenza, F., Fabes, E., Garofalo, N. (1986). Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions. *Proc. Amer. Math. Soc., 98*, 415–425.

[21] Chiarenza, F.M., Frasca, M. (1984). Boundedness for the solutions of a degenerate parabolic equations. *Appl. Anal., 17*, 243–261.

[22] Chiarenza, F.M., Separioni, R.P. (1984). A Harnack inequality for degenerate parabolic equations. *Communications in Partial Differential Equations, 9*(8), 719–749.

[23] Chiarenza, F.M., Separioni, R.P. (1985). A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, 73*, 179–190.

[24] Chiarenza, F.M., Separioni, R.P. (1984). Degenerate parabolic equations and Harnack inecuality. *Ann. Mat. Pura Appl., 137*(IV), 139–162.

[25] Chiarenza, F.M., Separioni, R.P. (1987). Pointwise estimates for degenerate parabolic equations. *Appl. Anal., 23*(4), 287–299.

[26] Dall'Aglio, A., Giachetti, D., Peral, I. (2004/2005). Results on parabolic equations related to some Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. *SIAM J. Math. Anal., 36*(3), 691–716.

[27] De Giorgi, E. (1957). Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolary. *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 3*, 25–43.

[28] Di Benedetto, E. (1993). *Degenerate Parabolic Equations.* Springer-Verlag, New York, 288.

[29] Di Benedetto, E., Gianazza, U., Vespri, V. (2012). Harnack inecuality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.

[30] Di Benedetto, E., Herrero, M.A. (1990). Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$. *Arch. Rational Mech. Anal., 111*(3), 225–290.

[31] Di Benedetto, E., Urbano, J.M., Vespri, V. Current issues on singular and degenerate evolution equations. In: Evolutionary Equations. In: Handb. Differ. Equ., Vol. 1. North-Holland, Amsterdam, 169–286.

[32] Di Benedetto, E., Friedman, A. (1985). Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems. *J. Reine Angew. Math., 357*, 1–22.

[33] Di Benedetto, E. (1986). On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 13*(3), 487–535.

[34] Di Fazio, G., Stella Fanciullo, M., Zamboni, P. (2010). Harnack inequality and regularity for degenerate quasilinear elliptic equations. *Math. Zeitschrist, 264*(3), 679–695.

[35] Fabes, E.B., Kening, C.E., Serapioni, R.P. (1982). The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. *Comm. PDE, 7*(1), 77–116.

[36] Fernandes, J.C., Franchi, B. (1996). Existence and properties of the Green function for a class of degenerate parabolic equations. *Revista Mat. Iberoamecanica, 12*(2), 491–524.

[37] Fernandes, J.C. (1991). Mean value and Harnack inequalities for a certain class of degenerate parabolic equations. *Rev. Mat. Iberoamecanica, 7*(3), 247–286.

[38] Ferrari, F. (2006). Harnack inecuality for two-weight subelliptic p-Laplace operator. *Math. Nachr., 279*(8), 815–830.

[39] Garcia Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L. (1985). Weighted norm inequalities and related topics. In: *North-Holland Matematics Studies, vol. 116.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[40] Grillo, G., Muratori, M., Porzio, M.M. (2013). Porous media equations with two weights: smoothing and decay properties of energy solutions via Pioncare inequalities. *Discrete Contin. Dyn. Syst., 33*, 3599–3640.

[41] Gutierrez, C.E. (1989). Harnack's inequality for degenerate Schrödinger operators. *Trans. Amer. Math. Soc., 312*, 403–419.

[42] Gutierrez, C., Nelson, F. (1988). Bounds for the fundamental solution of degenerate parabolic equations. *Comm Partial Diff. Equations, 13*, 635–649.

[43] Gutierrez, C., Wheeden, L. (1992). Bounds for the fundamental solution of degenerate parabolic equations. *Comm Partial Diff. Equations, 17*, 1287–1307.

[44] Gutierrez, C.E., Wheeden, R.L. (1991). Harnack's inequalities for degenerate parabolic equations. *Comm. PDE, 16(485)*, 745–770.

[45] Gutierrez, C.E., Wheeden, R.L. (1990). Mean value and Harnack inequalities for degenerate parabolic equations. *Collog. Math. 60/61*(1), 157–194.

[46] Gutierrez, C.E., Wheeden, R.L. (1991). Sobolev interpolation inequalities with weights. *Trans. Amer. Math. Soc., 323*, 263–281.

[47] Heinonen, J., Kilpeläinen, T., Martio, O. (1993). Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. In: Oxford Matematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Nev York, Oxford Science Publications.

[48] Kamin, S., Rosenau, P. (1982). Nonlinear diffusion in a finite mass medium. *Comm. Pure Appl. Math., 35*(1), 113–127.

[49] Kamin, S., Rosenau, P. (1981). Propagatio of termal waves in an inhomogeneous medium. *Comm. Pure Appl. Math., 34*(6), 831–852.

[50] Kilpeläinen, T., Malý, J. (1992). The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math., 172*, 137–161.

[51] Krylov, N.V., Safonov, M.V. (1981). A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients. *Math. USSR Izv. 16*(1), 151–164.

[52] Kurata, K. (1994). Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order. *Indiana Univ. Math. Journal, 43*, 411–440.

[53] Labutin, D. (2002). Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J., III*, 1–49.

[54] Ladyzhenskaya, O.A., Uraltceva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York, London.

[55] Ladyzhenskaya, O.A, Solonnikov, V.A., Uraltceva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Amer. Math. Soc.

[56] Liskevich, V., Skrypnik, I.I. (2009). Harnack's inequality and continuity of solutions to quasi-linear degenerate parabolic equations with coefficients fron Kato-type classes. *J. Differential Equations, 247*(10), 2740–2777.

[57] Liskevich, V., Skrypnik, I.I. (2013). Pointwise estimates for solutions to the porous medium equation with measure as a forsing term. *Israel J. Math., 194*, 259–275.

[58] Mohammed, A. (2002). Boundary behavior of blow-up solutions to some weighted non-linear differential equations. *Electron. J. Diff. Eqns., 2002*(78), 1–15.

[59] Mohammed, A. (2002). Harnack's inequalities for solutions of some degenerate elliptic equations. *Rew. Mat. Iberoamecanica, 18*, 325–354.

[60] Mohammed, A. (2004). Integrability of blow-up solutions to some non-linear differential equations.*Electron. J. Diff. Eqns., 2004*(33), 1–8.

[61] Moser, J. (1964). A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math., 17*, 101–134.

[62] Moser, J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl Math., 14*, 577–591.

[63] Muratori, M. (2015). Weighted functional inequalities and nonlinear diffusions of porous medium type. Ph. D. thesis, Politec di Melano and Univ. Paris.

[64] Nash, J. (1958). Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math., 80*, 931–954.

[65] Paronetto, F. (2016). A Harnack's inequalities for mixed type evolution equations. *J. Diff. Equat.*, 5259–5355.

[66] Paronetto, F. (2011). A time regularity result for forward- backward parabolic equations. *Boll. Union Math. Ital., 4*(9), 69–77.

[67] Paronetto, F. (2017). Local boundednss for forvard- backward parabolic De Giorgi classes with coefficients depending on time. *Nonl. Analysis, 158*, 168–198.

[68] Serrin, J. (1964). Local behaviour of solutions of quasilinear equations. *Acta Math., 111*, 302–347.

[69] Skrypnik, I.I. (2004). A necessary condition for the regularity of a boundary point for degenerating parabolic equations with measurable coefficients. *Ukr. Math. J., 56*(6), 973–995.

[70] Skrypnik, I.I. (2016). Continuity of solutions to singular parabolic equations with coefficients from Kato-type classes. *Annali di Mat. Pura ed Appl., 195*, 1158–1176.

[71] Skrypnik, I.I. (1998). Nonnegative solutions of degenerate quasilinear parabolic equations with measurable coefficients. *Dokl. Akad. Nauk, 362*(2), 165–167.

[72] Skrypnik, I.I. (2000). Regularity of a boundary point for degenerate parabolic equations with measurable coefficients. *Ukr. Math. J., 52*(11), 1768–1786.

[73] Skrypnik, I.I. (2004). Regularity of a boundary point for singular parabolic equations with measurable coefficients. *Ukr. Math. J., 56*(4), 614–627.

[74] Skrypnik, I.I. (1996). Regularity of solutions of Degenerate Quasilinear Parabolic Equations (weighted case). *Ukr. Math. J., 48*(7), 1099–1118.

[75] Skrypnik, I.I. (1998). The Harnack inequality for nonlinear degenerate parabolic equations with measurable coefficients. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, (1), 57–59.

[76] Sturm, S. (2015). Pointwise estimates for porous medium type equations with low order terms and measure data. *Electron J. Differetial Equations, 2015*(101), 1–25.

[77] Surnachev, M. (2010). A Harnack inequality for weighted degenerate parabolic equations. *J. Diff. Equat., 248*, 2092–2129.

[78] Surnachev, M. (2014). Regularity of solutions of parabolic equations with a double nonlinearity and a weight. *Trans. Moscou Math. Soc.*, 259–280.

[79] Trudinger, N. (1968). Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl Math., 21*, 205–226.

[80] Trudinger, N., Wang, X.-J. (2002). On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory. *Amer. J. Math., 124*, 369–410.

[81] Vazquez, J.L. (2007). *The porous medium equation.* Oxford Math. monogr., Oxford Univ. Prees, Oxford.

[82] Wang, Y., Nin, P., Cui, X. (2011). Harnack estimates for a quasi-linear parabolic equations with a singular weight. *Nonl. Anal., 74*(17), 6265–6286.

[83] Zhang, Q. (1996). A Harnak's inequality for the equation $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$ when $|b| \in K_{n+1}$. *Manuscr. Math., 89*, 61–77.

[84] Zhang, Q. (1996). On a parabolic equation with a singular lower order term. *Trans. Amer. Math. Soc., 348*, 2811–2844.

[85] Zozulia, Y. (2020). Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials. *Ukr. Mat. Bull, 17*(1), 116–144.

Відомості про авторів

Євген Сергійович Зозуля

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: `albelgen27@gmail.com`