Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 2, 243 – 254
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-2-7

Про існування розв'язків рівнянь Бельтрамі з умовами на обернені дилатації

Євген О. Севостьянов

(Представлена О. А. Довгошиєм)

Анотація. Знайдено одну з можливих умов, за яких рівняння Бельтрамі з виродженням еліптичності має неперервний розв'язок класу Соболєва. Вказаний розв'язок є неперервним за Гельдером в "слабкому" (логарифмічному) сенсі з показником $\alpha = 1/2$, більше того, має степінь гладкості $W^{1,2}_{\rm loc}$, а за певних додаткових вимог його також можна обрати гомеоморфним. Зауважимо, що існування розв'язків рівнянь Бельтрамі є предметом дослідження багатьох вітчизняних і закордонних вчених. Теореми про існування розв'язків без виродження еліптичності є класикою сучасного аналізу, і питання про їх існування досліджено в достатній мірі. Трохи інакше виглядає справа, коли рівняння Бельтрамі є виродженим, тобто, його комплексна дилатація по модулю може бути близькою до одиниці. Вироджені рівняння Бельтрамі можуть не мати гомеоморфних розв'язків, зокрема, інтегровність максимальної дилатації в будь-якій (завгодно великій) степені не тягне за собою їх наявність. На сьогодні відомо існування гомеоморфних розв'зків у випадку, коли максимальна дилатація експоненційно інтегровна, має обмежене і скінченне середнє коливання в кожній точці, задовольняє умову розбіжності інтегралу типу Лехто тощо. В даній статті ми розглядаємо випадок, коли задана вимірна за Лебегом функція μ визначає послідовність розв'язків рівнянь Бельтрамі, для яких максимальні дилатації відповідних обернених відображень обмежені деякою інтегровною функцією. Основний принцип і ідея статті – перехід до обернених відображень, які є так званими кільцевими гомеоморфізмами, локальна і межова поведінка котрих досліджувалася окремо. Основний обсяг статті займає одна лема збіжності, в якій з'ясовано зв'язок між властивостями деякої послідовності відображень та її границею. Подібні леми доводилися раніше різними авторами, але на відміну від відповідних попередніх її версій, тут ми також використовуємо умови на дилатації саме обернених відображень. Поєднання результатів про одностайну неперервність сімей та твердження вказаної леми дає нам бажану теорему існування. В цьому випадку, вихідне рівняння Бельтрамі має лише $W^{1,2}_{\rm loc}$-розв'язок, логарифмічно неперервний за Гельдером, але може не мати гомеоморфного розв'язку. В кінці статті наведено відповідний приклад рівняння, яке задовольняє всі умови, перелічені в формулюванні основного результату статті, але не має гомеоморфного соболівського розв'язку. Більше того, вказаний розв'язок не є ані відкритим, ані дискретним відображенням. Подібна ситуація тісно пов'язана з випадком, коли прямі відображення формують одностайно неперервні сім'ї, але обернені гомеоморфізми не є такими.

2010 MSC. 30C62, 30C65, 35J15.

Ключові слова та фрази. Рівняння еліптичного типу, квазіконформний аналіз, обернена нерівність Полецького.

1. Вступ

Останнім часом активно розвивалась тематика, пов'язана з існуванням розв'язків вироджених диференціальних рівнянь Бельтрамі, див, напр., [1–4] і [5]. Основні результати на цю тему зібрані у відносно недавній монографії [4], де є посилання на публікації цих і інших авторів. Одне з завдань, поставлених при дослідженні рівнянь Бельтрамі, полягає у пошуку умов на комплексний коефіцієнт, що забезпечують існування їх розв'язків. Цей пошук, як правило, здійснюється у класі ACL-гомеоморфізмів, хоча цілком коректно розглядати і просто неперервні ACL-розв'язки. У даній статті отримано ще один результат про існування розв'язків рівняння Бельтрамі з виродженням, який базується на переході до обернених відображень. У порівнянні з роботами [1, 2] і [3] ми послаблюємо умови на комплексний коефіцієнт, вимагаючи тільки його інтегровність, в той самий час, як обмеження більш спеціального виду тут не використовуються. Отриманий розв'язок рівняння може виявитись не гомеоморфним, однак, відносно попередніх результатів степінь його гладкості дещо вища і дорівнює $W_{\rm loc}^{1,2}$.

Перейдемо до означень. Скрізь далі відображення $f : D \to \mathbb{C}$ області $D \subset \mathbb{C}$ вважається таким, що *зберігає орієнтацію,* тобто, якщо f – гомеоморфізм і $z \in D$ – яка-небудь його точка диференційовності, то *якобіан* цього відображення в точці z невід'ємний. Для комплекснозначної функції $f : D \to \mathbb{C}$, заданої в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x + iy$, покладемо $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ і $f_z = (f_x - if_y)/2$. *Комплексною дилатацією* відображення f в точці z називається функція $\mu : D \to \mathbb{C}$, визначена рівністю $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, при $f_z \neq 0$ і $\mu(z) = 0$ в іншому випадку. *Максимальною дилатацією* відображення f в точці z називається наступна функція:

$$K_\mu(z) = K_{\mu_f}(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}\,. \tag{1.1}$$

Стаття надійшла в редакцію 09.12.2020

Якщо задана вимірна за Лебегом функція $\mu : D \to \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, то не прив'язуючись до якого-небудь відображення f будемо називати величину, що обчислюється за допомогою рівності (1.1), максимальною дилатацією відповідної функції μ. Зауважимо, що якобіан відображення f в точці $z \in D$ можна порахувати за допомогою рівності

$$J(z, f) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 .$$

Неважко бачити, що $K_{\mu_f}(z) = \frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}$ у всіх точках $z \in D$ для відображення f, що має частинні похідні в точці z, де якобіан $J(z, f)$ не дорівнює нулю. Нагадаємо, що відображення $f : D \to \mathbb{C}$ називається *квазіконформним*, якщо f – гомеоморфізм класу $W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ і, крім того, знайдеться стала $K \geqslant 1$ така, що $\|f'(z)\|^2 \leqslant K \cdot |J(z, f)|$, де $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$. *Рівнянням Бельтрамі* будемо називати диференціальне рівняння виду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \, , \tag{1.2}$$

в якому $\mu = \mu(z)$ – задана невідома функція. Для фіксованого натурального числа $k \geqslant 1$ позначимо

$$\mu_k(z) = \begin{cases} \mu(z), & K_\mu(z) \leqslant k, \\ 0 \, , & K_\mu(z) > k \, . \end{cases} \tag{1.3}$$

Нехай f_k – гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння $f_{\overline{z}} = \mu_k(z) \cdot f_z$, що відображує одиничний круг на себе та задовольняє умови нормування $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Вказаний розв'язок існує з огляду на [6, теорема 8.2]. Нехай g_k – обернене відображення до f_k. Тоді його комплексна дилатація μ_{g_k} обчислюється згідно зі співвідношенням $\mu_{g_k}(w) = -\mu_k(g_k(w)) = -\mu_k(f_k^{-1}(w))$, див. напр., [7, (4).C.I]. В цьому випадку, максимальна дилатація відображення g_k обчислюється за співвідношенням

$$K_{\mu_{g_k}}(w) = \frac{1 + |\mu_k(f_k^{-1}(w))|}{1 - |\mu_k(f_k^{-1}(w))|} \, . \tag{1.4}$$

Будемо говорити, що функція $\varphi : D \to \mathbb{R}$, що є локально інтегровною в деякому околі точки $x_0 \in D$, має *скінченне середнє коливання* в точці x_0 (пишемо: $\varphi \in FMO(x_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \, dm(x) \, < \, \infty \, , \tag{1.5}$$

де Ω_n – об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$, див., напр., [2, розд. 2]. Зауважимо, що за умови (1.5) можлива ситуація, коли $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Також будемо говорити, що $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функція скінченного середнього коливання в області D, пишемо $\varphi \in FMO(D)$, якщо φ має скінченне середнє коливання в кожній точці $x_0 \in D$. Виконується наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай $Q : \mathbb{D} \to [1,\infty]$ – інтегровна в $\mathbb{D}$ функція і нехай функція $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ вимірна за Лебегом. Припустимо, що для майже всіх $w \in \mathbb{D}$*

$$K_{\mu_{g_k}}(w) \leqslant Q(w)\,, \tag{1.6}$$

де $g_k = f_k^{-1}$ и f_k – гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння $f_{\overline{z}} = \mu_k(z) \cdot f_z$, що відображує одиничний круг на себе та задовольняє умови нормування $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$, крім того, $\mu_k(z)$ задається співвідношенням (1.3).

Тоді рівняння (1.2) *має неперервний $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{D})$-розв'язок $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, що задовольняє умову*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \frac{r_0}{|z-z_0|}\right)} \quad \forall\, z \in B(z_0, r_0) \tag{1.7}$$

в будь-якій точці $z_0 \in \mathbb{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма Q в $L^1(\mathbb{D})$, C – деяка стала і $0 < 2r_0 < {\rm dist}\,(z_0, \partial\mathbb{D})$ – довільне. Якщо додатково $Q(z) \in FMO(\mathbb{D})$, або

$$\int\limits_0^{\delta(w_0)} \frac{dt}{t q_{w_0}(t)} = \infty \tag{1.8}$$

для кожного $w_0 \in \mathbb{D}$ і деякого $\delta(w_0) > 0$, $q_{w_0}(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q(w_0 + re^{i\theta})\, d\theta$, то f можна обрати гомеоморфізмом у $\mathbb{D}$.

2. Основна лема про збіжність

Зв'язок між збіжністю відображень і поведінкою їх комплексних коефіцієнтів є важливим елементом, що використовується при доведенні основної теореми (див., напр., [4, гл. 2] або [8]). Що стосується випадку, що вивчається тут, маємо наступну лему.

Лема 2.1. *Нехай $Q \in L^1(D)$, $\mu : D \to \mathbb{D}$ – вимірна за Лебегом функція, і нехай f_k, $k = 1, 2, \ldots$ – послідовність гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію, області D на себе, які належать класу $W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ і мають комплексні коефіцієнти $\mu_k(z)$. Припустимо, що f_k збігається локально рівномірно в D до відображення $f : D \to \mathbb{C}$, а послідовність $\mu_k(z)$ збігається до μ при $k \to \infty$ при майже всіх $z \in D$. Нехай також обернені відображення $g_k := f_k^{-1}$ належать класу $W^{1,2}_{\rm loc}(D)$, при цьому, при майже всіх $w \in D$*

$$K_{\mu_{g_k}}(w) \quad = \quad \frac{1 + |\mu_k(f_k^{-1}(w))|}{1 - |\mu_k(f_k^{-1}(w))|} \leqslant Q(w)\,.$$

Тоді $f \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ і μ – комплексна характеристика відображення f, тобто, $f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z$ при майже всіх $z \in D$.

Доведення. Будемо в цілому дотримуватись схеми, викладеної при доведенні [8, теорема 3.1], див. також [4, теорема 2.1] і [9, лема III.3.5]. Позначимо $\partial f = f_z$ і $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}}$. Нехай C – довільний компакт в D. Оскільки за умовою відображення $g_k = f_k^{-1}$ належать класу $W^{1,2}_{\rm loc}$, то g_k мають N-властивість Лузіна, див., напр., [10, наслідок B]. Тоді якобіан $J(z, f_k)$ майже скрізь не дорівнює нулю, див, напр., [11, теорема 1], більше того, має місце заміна змінних в інтегралі, див, напр., [12, теорема 3.2.5]. У такому випадку, будемо мати:

$$\int\limits_C |\partial f_k(z)|^2\, dm(z) = \int\limits_C \left(|\partial f_k(z)|^2 - |\overline{\partial} f_k(z)|^2\right) \cdot \frac{|\partial f_k(z)|^2 dm(z)}{\left(|\partial f_k(z)|^2 - |\overline{\partial} f_k(z)|^2\right)}$$

$$= \quad \int\limits_C J(z, f_k) \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{\overline{\partial} f_k(z)}{\partial f_k(z)}\right|^2}\, dm(z) = \quad \int\limits_{f_k(C)} \frac{dm(w)}{1 - |\mu_k(f_k^{-1}(w))|^2}$$

$$\leqslant \quad \int\limits_D Q(w)\, dm(w) < \infty\,. \qquad (2.1)$$

З (2.1) випливає, що $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$, при цьому, ∂f_k і $\overline{\partial} f_k$ слабко збігаються в $L^1_{\rm loc}(D)$ до ∂f і $\overline{\partial} f$, відповідно (див. [8, теорема 3.1] і [9, лема III.3.5]).

Залишилось показати, що відображення f є розв'язком рівняння Бельтрамі $f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z$. Покладемо $\zeta(z) = \overline{\partial} f(z) - \mu(z) \partial f(z)$ і покажемо, що $\zeta(z) = 0$ майже скрізь. Нехай B – довільний круг, що лежить разом зі своїм замиканням в D. За нерівністю трикутника

$$\left|\int\limits_B \zeta(z)\, dm(z)\right| \leqslant I_1(k) + I_2(k)\,, \qquad (2.2)$$

де

$$I_1(k) = \left| \int\limits_B (\overline{\partial} f(z) - \overline{\partial} f_k(z))\, dm(z) \right| \tag{2.3}$$

і

$$I_2(k) = \left| \int\limits_B (\mu(z)\partial f(z) - \mu_k(z)\partial f_k(z))\, dm(z) \right| . \tag{2.4}$$

З огляду на доведене вище, $I_1(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Залишилось розібратися з виразом $I_2(k)$. Для цього зауважимо, що за нерівністю трикутника $I_2(k) \leqslant I_2'(k) + I_2''(k)$, де

$$I_2'(k) = \left| \int\limits_B \mu(z)(\partial f(z) - \partial f_k(z))\, dm(z) \right|$$

і

$$I_2''(k) = \left| \int\limits_B (\mu(z) - \mu_k(z))\partial f_k(z)\, dm(z) \right| .$$

З огляду на слабку збіжність $\partial f_k \to \partial f$ в $L^1_{\rm loc}(D)$ при $k \to \infty$, ми отримаємо, що $I_2'(k) \to 0$ при $k \to \infty$, оскільки $\mu \in L^\infty(D)$. Більше того, оскільки за доведеним вище відображення ∂f інтегровне з квадратом, має місце абсолютна неперервність в інтегралі $\int\limits_E |\partial f(z)|\, dm(z)$. Крім того, оскільки $\partial f_k \to \partial f$ слабко в $L^1_{\rm loc}(D)$, то для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\int\limits_E |\partial f_k(z)|\, dm(z)$$

$$\leqslant \int\limits_E |\partial f_k(z) - \partial f(z)|\, dm(z) + \int\limits_E |\partial f(z)|\, dm(z) < \varepsilon\,, \tag{2.5}$$

як тільки $m(E) < \delta$, $E \subset B$, і номера k є достатньо великими.

Остаточно, за теоремою Єгорова (див. [13, теорема III.6.12]) для кожного $\delta > 0$ знайдеться множина $S \subset B$ така, що $m(B \setminus S) < \delta$ і $\mu_k(z) \to \mu(z)$ рівномірно на S. Тоді $|\mu_k(z) - \mu(z)| < \varepsilon$ при всіх $k \geqslant k_0$, деякому $k_0 = k_0(\varepsilon)$ і всіх $z \in S$. З огляду на (2.5), а також з огляду на (2.1) і нерівність Гельдера, маємо, що

$$I_2''(k) \leqslant \varepsilon \int\limits_S |\partial f_k(z)|\, dm(z) + 2 \int\limits_{B\setminus S} |\partial f_k(z)|\, dm(z)$$

$$< \varepsilon \cdot \left\{ \left(\int\limits_D Q(w)\, dm(w) \right)^{1/2} \cdot (m(B))^{1/2} + 2 \right\} \qquad (2.6)$$

при тих же $k \geqslant k_0$. З (2.2), (2.3), (2.4) і (2.6) випливає, що $\int\limits_B \zeta(z) dm(z) = 0$ для всіх кругів B, компактно вкладених в D. На основі теореми Лебега про диференціювання невизначеного інтеграла (див. [13, IV(6.3)]), звідси випливає, що $\zeta(z) = 0$ майже всюди в D. Лема доведена. □

3. Доведення теореми 1.1

Нехай спочатку функція Q, задана за умовами теореми, просто інтегровна в $\mathbb{D}$. Розглянемо послідовність комплекснозначних функцій

$$\mu_k(z) = \begin{cases} \mu(z), & K_\mu(z) \leqslant k, \\ 0\ , & K_\mu(z) > k, \end{cases} \qquad (3.1)$$

де $K_\mu(z)$ визначається співвідношенням (1.1). Зауважимо, що $\mu_k(z) \leqslant \frac{k-1}{k+1} < 1$, тому рівняння (1.2), де замість μ справа взяли $\mu := \mu_k$, а μ_k визначається співвідношенням (3.1), має гомеоморфний $W_{\rm loc}^{1,2}(\mathbb{D})$-розв'язок $f_k : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ з нормуваннями $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$, яке є k-квазіконформним в $\mathbb{D}$ (див. [6, теорема 8.2]). З огляду на ту ж теорему, f_k відображають одиничний круг на себе, при цьому, $g_k = f_k^{-1}$ також є квазіконформними, зокрема, належать класу $W_{\rm loc}^{1,2}(\mathbb{D})$ (див. [14, теорема 9.1]). За [15, теорема 6.10] і з огляду на умову (1.6) для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$M(g_k(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mu_{g_k}}(w) \cdot \rho_*^2(w)\, dm(w) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} Q(w) \cdot \rho_*^2(w)\, dm(w) \qquad (3.2)$$

для довільної сім'ї кривих Γ в $\mathbb{D}$ і кожної функції $\rho_* \in {\rm adm}\,\Gamma$, де M – модуль сім'ї кривих (див., напр., [16, розд. 6]). За [17, теорема 1.1] сім'я відображень f_k одностайно неперервна в $\mathbb{D}$. Отже, з огляду на теорему Арцела–Асколі f_k є нормальною сім'єю (див. [16, теорема 20.4]), іншими словами, знайдеться підпослідовність f_{k_l} послідовності f_k, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. Зауважимо також, що $\mu_k(z) \to \mu(z)$ при $k \to \infty$ для майже всіх $z \in \mathbb{D}$, оскільки $|\mu(z)| < 1$ і, отже, $K_\mu(z)$ в (1.1) скінченна при всіх $z \in \mathbb{D}$. Тоді за лемою 2.1 відображення f належить класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного рівняння Бельтрамі (1.2).

За [18, теорема 1]

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \frac{r_0}{|z-z_0|}\right)} \quad \forall\, z \in B(z_0, r_0)$$

в довільній точці $z_0 \in \mathbb{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма Q в $L^1(\mathbb{D})$, C – деяка стала і $0 < 2r_0 < \mathrm{dist}\,(z_0, \partial\mathbb{D})$. Переходячи тут до границі при $k \to \infty$, маємо співвідношення (1.7). Перша частина твердження теореми 1.1 встановлена.

Припустимо тепер, що $Q \in FMO(\mathbb{D})$, або виконується співвідношення (1.8). Тоді послідовність g_k утворює одностайно неперервну сім'ю відображень (див. [19, теореми 6.1 і 6.5]). Отже, з огляду на теорему Арцела–Асколі g_k є нормальною сім'єю (див. [16, теорема 20.4]), іншими словами, знайдеться підпослідовність g_{k_l} послідовності g_k, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. В силу умови нормування $g_{k_l}(0) = 0$ і $g_{k_l}(1) = 1$ при всіх $l = 1, 2, \ldots$. Тоді в силу [20, теорема 4.1] відображення g є гомеоморфізмом в $\mathbb{D}$, крім того, за [20, лема 3.1] ми маємо також, що $f_{k_l} \to f = g^{-1}$ при $l \to \infty$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Далі застосуємо схему міркувань, що використовувалась вище до випадку інтегровної функції Q. Оскільки $\mu_k(z) \to \mu(z)$ при $k \to \infty$ і при майже всіх $z \in \mathbb{D}$, то за лемою 2.1 відображення f належить класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного рівняння Бельтрамі (1.2). Теорема доведена. $\square$

Приклад. Нехай $p \geqslant 1$ – довільне число і нехай $0 < \alpha < 2/p$. Як зазвичай, ми використовуємо запис $z = re^{i\theta}$, $r \geqslant 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Покладемо

$$\mu(z) = \begin{cases} e^{2i\theta}\frac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 0\,, & |z| \leqslant 1/2\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Використовуючи співвідношення

$$\mu_f(z) = \frac{\overline{\partial} f}{\partial f} = e^{2i\theta}\frac{rf_r + if_\theta}{rf_r - if_\theta}\,,$$

див. рівність (11.129) в [21], ми отримуємо, що відображення

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 0\,, & |z| \leqslant 1/2 \end{cases} \tag{3.4}$$

є розв'язком рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z)\cdot f_z$, де функція μ задається співвідношенням (3.3). Зауважимо, що існування розв'язку вказаного рівняння забезпечується теоремою 1.1 (для цього перевіримо виконання всіх умов цієї теореми). Дійсно, для заданої співвідношенням (3.3) функції μ відповідною їй максимальною дилатацією K_μ буде функція

$$K_\mu(z) = \begin{cases} \frac{2|z|}{\alpha(2|z|-1)}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 1\ , & |z| \leqslant 1/2 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Нехай $k > 1/\alpha$. Зауважимо, що $K_\mu(z) \leqslant k$ при $|z| \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{k\alpha}{k\alpha-1}$ і $K_\mu(z) > k$ в іншому випадку. Нехай, як і раніше,

$$\mu_k(z) = \begin{cases} \mu(z), & K_\mu(z) \leqslant k, \\ 0\ , & K_\mu(z) > k\,. \end{cases}$$

Відзначимо, що розв'язками рівняння $f_{\overline{z}} = \mu_k(z)\cdot f_z$ є відображення

$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & \frac{1}{2}\cdot\frac{k\alpha}{k\alpha-1} < |z| < 1, \\ \frac{z}{\frac{1}{2}\left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}\right)}\cdot\left(\frac{1}{k\alpha-1}\right)^{1/\alpha}, & |z| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{k\alpha}{k\alpha-1} \end{cases},$$

при цьому, обернені відображення $g_k(y) = f_k^{-1}(y)$ обчислюються за формулою

$$g_k(y) = \begin{cases} \frac{y(|y|^\alpha+1)}{2|y|}, & \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ \frac{y\cdot\frac{k\alpha}{2(k\alpha-1)}}{\left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha}}, & |y| \leqslant \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha} \end{cases}. \tag{3.6}$$

З (3.5) випливає, що

$$K_{\mu_k}(z) = \begin{cases} \frac{4|z|}{2\alpha(2|z|-1)}, & \frac{1}{2}\cdot\frac{k\alpha}{k\alpha-1} \leqslant |z| < 1, \\ 1\ , & |z| < \frac{1}{2}\cdot\frac{k\alpha}{k\alpha-1} \end{cases}. \tag{3.7}$$

Нам слід перевірити, чи виконується (1.6) для деякої інтегровної в $\mathbb{D}$ функції Q. Для цієї мети, підставимо відображення g_k з (3.6) у максимальну дилатацію K_{μ_k}, визначену рівністю (3.7). Тоді

$$K_{\mu_{g_k}}(y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha+1}{\alpha|y|^\alpha}, & \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha} \leqslant |y| < 1\,, \\ 1\ , & |y| < \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha} \end{cases}.$$

Зауважимо, що $K_{\mu_{g_k}}(y) \leqslant Q(y) := \frac{|y|^\alpha+1}{\alpha|y|^\alpha}$ при всіх $y\in\mathbb{D}$, при цьому, функція Q інтегровна в $\mathbb{D}$ навіть в степені p, а не тільки в степені 1 (див. міркування, використані при розгляді [21, пропозиція 6.3]). За побудовою $f_k(0) = 0$ і $f_k(1) = 1$. Тому всі умови теореми 1.1 виконуються, а у якості бажаного розв'язку рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z$ можна розглянути відображення $f = f(z)$, визначене рівністю (3.4). Більше того, з доведення цієї теореми випливає, що відображення f є вказаним там розв'язком, оскільки f є локально рівномірною границею послідовності f_k. Зауважимо, що відображення f не є гомеоморфним розв'язком, також воно не є ані відкритим, ані дискретним.

Покажемо, що для заданої функції μ гомеоморфного $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{D})$-розв'язку рівняння Бельтрамі (1.2) не існує. Справді, нехай $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – такий розв'язок. З огляду на теорему Рімана про відображення, ми можемо вважати, що g відображує одиничний круг на себе. Зауважимо, що при $1/2 < |z| < 1$ відображення f, а отже, і відображення g, є локально квазіконформним. Отже, з огляду на теорему єдиності (див. [4, пропозиція 5.5]), $g = \varphi \circ f$, де φ – деяке конформне відображення. Зауважимо, що φ визначене в проколотому крузі $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, оскільки $f(\{1/2 < |z| < 1\}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Звідси маємо, що $g \circ f^{-1} = \varphi$, і, оскільки φ є конформним у $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, відображення φ має неперервне продовження в точку 0. Однак, тоді й відображення $g \circ f^{-1}$ також має неперервне продовження в точку 0, що невірно, оскільки $f^{-1}(y) = \frac{y(|y|^{\alpha}+1)}{2|y|}$, а g – деякий автоморфізм одиничного круга. Отримане протиріччя спростовує припущення про існування відповідного гомеоморфного розв'язку g.

Література

[1] Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equations. *J. d'Anal. Math., 96*, 117–150.

[2] Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2006). Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel Math. J., 153*, 247–266.

[3] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *Ukr. Mat. Bull., 12*(1), 27–66; transl. in (2015). *J. Math. Sci., 210*(1), 22–51.

[4] Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26.* New York: Springer.

[5] Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2020). On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation. *Ukr. Mat. Bull., 17*(1), 77–94; transl. in (2020). *J. Math. Sci., 248*(3), 203—216.

[6] Боярский, Б. В. (1957). Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. *Матем. сб., 43(85)*(4), 451–503.

[7] Альфорс, Л. (1969). *Лекции по квазиконформным отображениям.* М.: Мир.

[8] Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2008). On convergence theory for Beltrami equations. *Укр. мат. вісник, 5*(4), 524–535; transl. (2008). *Ukr. Math. Bull., 5*(4), 517–528.

[9] Решетняк, Ю.Г. (1982). *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск: Наука.

[10] Maly, J., Martio, O. (1995). Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$. *J. Reine Angew. Math., 458*, 19–36.

[11] Пономарёв, С.П. (1995). N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина. *Матем. заметки, 58*, 411–418.

[12] Федерер, Г. (1987). *Геометрическая теория меры.* М.: Наука.

[13] Сакс, С. (1949). *Теория интеграла.* М.: ИЛ.

[14] Bojarski, B., Iwaniec, T. (1983). Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math., 8*(2), 257–324.

[15] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math., 93*, 215–236.

[16] Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math., 229. Berlin etc.: Springer–Verlag.

[17] Севостьянов, Е.А., Скворцов, С.А. (2018). О локальном поведении одного класса обратных отображений. *Укр. мат. вісник, 15*(3), 399–417; transl. in (2020). *J. Math. Sci., 241*(1), 77–89.

[18] Севостьянов, Є.О., Скворцов, С.О., Довгопятий, О.П. (2020). Про негомеоморфні відображеня з оберненою нерівністю Полецького. *Укр. мат. вісник, 17*(3), 414–436.

[19] Ryazanov, V., Sevost'yanov, E. (2008). Toward the theory of ring Q-homeomorphisms. *Israel J. Math., 168*, 101–118.

[20] Ryazanov, V., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2013). On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms. *Siberian Advances in Mathematics, 23*(4), 263–293.

[21] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* New York: Springer Science + Business Media, LLC.

Відомості про авторів

Євген Олександрович Севостьянов

Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com