Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 3, 303 – 318
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-3-2

Диференціально-алгебраїчні крайові задачі у випадку матриці при похідній змінного рангу

Сергій М. Чуйко

(Представлена І. І. Скрипніком)

Присвячено 80-річчю члена-кореспондента НАН України В.Я. Гутлянського

Анотація. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків лінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у випадку матриці при похідній змінного рангу

2010 MSC. 34B15.

Ключові слова та фрази. Диференціально-алгебраїчні системи, лінійні крайові задачі, матриця при похідній змінного рангу.

1. Постановка задачі

Досліджено задачу про побудову розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [1–3]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha. \tag{1}$$

Тут $A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ – неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ – неперервний вектор; $\ell z(\cdot)$ – лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^q.$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою. Дослідженню диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і

Стаття надійшла в редакцію 06.05.2021

ISSN 1810 – 3200.

досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії [1–3]. Достатні умови звідності диференціально-алгебраїчної лінійної системи до центральної канонічної форми були отримані А. М. Самойленком і В. П. Яковцем [4]. У статтях [5, 6] запропоновано достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць.

Ключовою вимогою до диференціально-алгебраїчної системи (1) в усіх перерахованих вище публікаціях була умова сталості рангу матриці при похідній $A(t)$. Тому метою даної статті буде знаходження конструктивних умов розв'язності та схеми побудови розв'язків лінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач у випадку матриці $A(t)$ змінного рангу.

2. Умови гладкості псевдооберненої матриці

Умови гладкості псевдооберненої матриці у випадку квадратної $(m = n)$ матриці $A(t)$ були отримані у монографії В. Ф. Чистякова [7, с. 41].

Лема 1. [В. Ф. Чистяков, 1996]. *Припустимо, що* $(n \times n)$ *– вимірна матриця*

$$A(t) \in \mathbb{C}^q[a, b]$$

має сталий ранг

$$\operatorname{rank} A(t) := \sigma, \quad t \in [a, b].$$

Тоді існує гладка псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця

$$A^+(t) \in \mathbb{C}^q[a, b].$$

Зокрема, гладкість псевдооберненої матриці $A^+(t) = A^{-1}(t)$ гарантована для довільної невиродженої $(n \times n)$ – вимірної матриці $A(t)$. Узагальненням леми 1 є наступне твердження.

Лема 2. *Для прямокутної* $(m \times n)$ *– вимірної матриці*

$$A(t) \in \mathbb{C}^q[a, b]$$

повного рангу

$$\operatorname{rank} A(t) := \sigma := \min(m, n), \quad t \in [a, b]$$

існує гладка псевдообернена матриця

$$A^+(t) \in \mathbb{C}^q[a,b].$$

Дійсно, припустимо, що $m \le n$. При цьому, не втрачаючи загальності, прямокутна $(m \times n)$ – вимірна матриця $A(t)$ зображується у вигляді

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) & A_1(t) \end{pmatrix}, \quad \det A_0(t) \neq 0;$$

тут $A_0(t)$ – квадратна невироджена матриця. Таким чином, знаходимо стандартний розклад [5]

$$A(t) = R(t) \cdot J_\sigma \cdot S(t), \quad R(t) = A_0(t), \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix},$$

де

$$S(t) = \begin{pmatrix} I_m & A_0^{-1}(t)A_1(t) \\ O & I_{n-m} \end{pmatrix}, \quad \det S(t) = 1$$

– невироджена матриця [8, с. 53]. Аналогічно знаходимо кістяковий розклад

$$A(t) = B(t)C(t),$$

де

$$B(t) = A_0(t), \quad C(t) = \begin{pmatrix} I_m & A_0^{-1}(t)A_1(t) \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\operatorname{rank} B(t) = \operatorname{rank} C(t) = m \le n.$$

Гладкість матриць

$$B(t), C(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$$

забезпечує гладкість псевдооберненої матриці

$$A^+(t) = C^+(t)B^+(t) = C^*(t)(C(t)C^*(t))^{-1}(B^*(t)B(t))^{-1}B^*(t).$$

Припустимо далі, що $n \le m$. При цьому, не втрачаючи загальності, прямокутна $(m \times n)$ – вимірна матриця повного рангу

$$A(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$$

зображується у вигляді

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) \\ A_1(t) \end{pmatrix}, \quad \det A_0(t) \neq 0;$$

тут $A_0(t)$ – квадратна невироджена матриця. Таким чином, знаходимо стандартний розклад

$$A(t) = R(t) \cdot J_\sigma \cdot S(t), \quad S(t) = A_0(t), \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix}^*,$$

де

$$R(t) = \begin{pmatrix} I_n & O \\ A_1(t)A_0^{-1}(t) & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

– невироджена матриця [8, с. 53]

$$\det R(t) = 1.$$

Аналогічно знаходимо кістяковий розклад

$$A(t) = B(t)C(t),$$

де

$$C(t) = A_0(t), \quad B(t) = \begin{pmatrix} I_n \\ A_1(t)A_0^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\operatorname{rank} B(t) = \operatorname{rank} C(t) = n \leq m.$$

Гладкість матриць

$$B(t), C(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$$

забезпечує гладкість псевдооберненої матриці

$$A^+(t) \in \mathbb{C}^q[a,b].$$

Приклад 1. *Неперервність матриці повного рангу*

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

забезпечує гладкість псевдооберненої матриці $A^+(t) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Матриця повного рангу $A(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ зображується у вигляді

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) & A_1(t) \end{pmatrix}, \quad \det A_0(t) \neq 0;$$

тут $A_0(t)$ – квадратна невироджена матриця. Таким чином, знаходимо стандартне розвинення

$$A(t) = R(t) \cdot J_\sigma \cdot S(t), \quad R(t) = A_0(t), \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} I_2 & O \end{pmatrix},$$

де

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– невироджена матриця. Аналогічно знаходимо кістякове розвинення

$$A(t) = B(t)C(t),$$

де

$$B(t) = A_0(t), \quad C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\operatorname{rank} B(t) = \operatorname{rank} C(t) = 2.$$

Гладкість матриць

$$B(t), C(t) \in \mathbb{C}[a, b]$$

забезпечує гладкість псевдооберненої матриці

$$A^+(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ 2\sin t & 2\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Результат леми 2 очевидно [9] переноситься на простір $\mathbb{L}^p[a, b]$, а також на простір обмежених послідовностей [10].

Наслідок 1. *Для гладкої прямокутної* $(m \times n)$ *– вимірної матриці*

$$A(t) \in \mathbb{C}^q[a, b]$$

сталого рангу

$$\text{rank } A(t) := \sigma, \quad t \in [a, b]$$

кістяковий розклад

$$A(t) = B(t)C(t), \quad \text{rank } B(t) := \sigma, \quad \text{rank } C(t) := \sigma$$

утворюють гладкі матриці повного рангу

$$B(t), C(t) \in \mathbb{C}^q[a, b].$$

Дійсно, в якості матриці $B(t) \in \mathbb{C}^q[a, b]$ можуть бути обрані будь-які σ стовпців вихідної матриці $A(t) \in \mathbb{C}^q[a, b]$, або лінійна комбінація цих стовпців. Матриця $C(t)$ може бути знайдена з рівняння

$$A(t) = B(t)C(t),$$

розв'язного, оскільки

$$P_{B^*}(t)A(t) = 0;$$

остання рівність випливає з рівнозначного виразу

$$(P_{B^*}(t)A(t))^* = C^*(t)\,(B^*(t)P_{B^*}(t)) = 0.$$

Таким чином, однозначно $(P_B(t) = 0)$ знаходимо

$$C(t) = B^+(t)A(t).$$

Однозначність випливає з повноти рангу матриці $B(t)$; тут

$$P_B(t) : \mathbb{R}^\sigma \to \mathbb{N}(B(t)), \quad P_{B^*}(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(B^*(t))$$

– матриці-ортопроектори. Оскільки

$$B^+(t), A(t) \in \mathbb{C}^q[a,b],$$

то

$$C(t) \in \mathbb{C}^q_{\sigma\times n}[a,b].$$

Лема 3. *Припустимо, що $(m \times n)$ – вимірна матриця*

$$A(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$$

має сталий ранг

$$\mathrm{rank}\ A(t) := \sigma \le \min(\mathrm{m},\mathrm{n}), \quad t \in [a,b].$$

Тоді існує гладка псевдообернена матриця

$$A^+(t) \in \mathbb{C}^q[a,b].$$

Гладкість псевдооберненої матриці $A^+(t)$ випливає з гладкості матриць повного рангу

$$B(t), C(t) \in \mathbb{C}^q[a,b],$$

які утворюють кістякове розвинення

$$A(t) = B(t)C(t), \quad \mathrm{rank}\ B(t) := \sigma, \quad \mathrm{rank}\ C(t) := \sigma,$$

та формули [8]

$$A^+(t) = S^*(t)(S(t)S^*(t))^{-1}(R^*(t)R(t))^{-1}R^*(t).$$

Сталість рангу матриці $A(t)$:

$$\mathrm{rank}\ A(t) := \sigma \le \min(\mathrm{m},\mathrm{n}), \quad t \in [a,b]$$

суттєва для гладкості псевдооберненої матриці

$$A^+(t) \in \mathbb{C}^q[a,b].$$

Приклад 2. *Відсутність сталості рангу неперервної матриці*

$$Q(\varepsilon) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in [0,1]$$

приводить до відсутності гладкості псевдооберненої матриці

$$A^+(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 2. *Будь-яку* $(m \times n)-$ *вимірну матрицю* $A(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$ *сталого рангу*

$$\text{rank } A(t) := \sigma \le \min(\mathrm{m},\mathrm{n}), \quad t \in [a,b]$$

можна зобразити у вигляді стандартного розкладу

$$A(t) = R(t) \cdot J_\sigma \cdot S(t), \ J_\sigma := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

тут

$$J_\sigma = V \cdot W, \ V := \begin{pmatrix} I_\sigma \\ O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times \sigma}, \ W := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma \times n},$$

крім того $R(t)$ *та* $S(t)$ *– гладкі невироджені матриці:*

$$R(t) = \Phi(t)V^+ + C_1 P_{V^*} \in \mathbb{C}^q[a,b], \quad S(t) = W^+\Psi + P_W C_2 \in \mathbb{C}^q[a,b].$$

Результати лем 1–3 та обох наслідків очевидно [9] переносяться на простір $\mathbb{L}^p[a,b]$, а також на простір обмежених послідовностей [10]. Крім того, останні три леми і два наслідки дозволяють послабити вимогу (2)

$$A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}[a,b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

на другій сторінці статті [5], а також вимогу (9):

$$A_1^+(t)B_1(t) \in \mathbb{C}[a,b], \quad A_1^+(t)f_1(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

на сторінці 5 та (16):

$$A_2^+(t)B_2(t) \in \mathbb{C}[a,b], \quad A_2^+(t)f_2(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

на сторінці 8 статті [5], а також аналогічні вимоги у статті [6].

3. Схема побудови розв'язків диференціально-алгебраїчних крайових задач у випадку матриці при похідній змінного рангу

Повертаючись до диференціально-алгебраїчної системи (1) у випадку матриці $A(t)$ змінного рангу, припустимо, що існує неперервна матриця повного рангу $\mathcal{P}(t)$, для якої добуток $A(t)\mathcal{P}(t)$ має незмінний ранг:

$$\operatorname{rank} A(t)\mathcal{P}(t) := \sigma_1 \leq \min(\mathrm{m}, \mathrm{n}, \sigma_0), \quad \mathcal{P}(t) \in \mathbb{C}_{n\times\sigma_0}[a,b], \quad t \in [a,b].$$

Заміна змінної

$$z(t) = \mathcal{P}(t)y(t)$$

приводить диференціально-алгебраїчну систему (1) у випадку матриці $A(t)$ змінного рангу до диференціально-алгебраїчної системи

$$\mathcal{A}(t)y'(t) = \mathcal{B}(t)y(t) + f(t) \tag{2}$$

з матрицею $\mathcal{A}(t) := A(t)\mathcal{P}(t)$ незмінного рангу; тут

$$\mathcal{B}(t) := B(t)\mathcal{P}(t) - A(t)\mathcal{P}'(t) \in \mathbb{C}_{m\times\sigma_0}[a,b].$$

Припустимо, що для диференціально-алгебраїчної системи (2) з матрицею $\mathcal{A}(t)$ незмінного рангу виконуються умови теореми у статті [5, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p диференціально-алгебраїчна система (2) має розв'язок вигляду

$$y(t, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(t)c_{\rho_{p-1}} + K\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a,b]$. Якщо для диференціально-алгебраїчної системи (2) з матрицею $\mathcal{A}(t)$ незмінного рангу виконуються умови теореми у статті [5, с. 15] у випадку виродження порядку p, будемо казати, що для диференціально-алгебраїчної системи (1) у випадку матриці $A(t)$ змінного рангу має місце виродження порядку p.

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_p(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p\times w}[a,b], \quad \gamma \in \mathbb{R}^w;$$

тут $\Psi(t)$ – довільна неперервна матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) представимо у вигляді

$$\mathcal{K}\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t) = \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) + \mathcal{K}\Big[\nu_p(s)\Big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \Big[\ \ell\mathcal{X}_p(\cdot)\ ;\ \ell K\Big[\Psi(s)\Big](\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{q\times(\rho_p+w)}.$$

Підставлючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_{p-1}}) = \mathcal{X}_p(t)c_{\rho_{p-1}} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) + \mathcal{K}\Big[\nu_p(s)\Big](t)$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot), \quad \check{c} := \mathrm{col}\,(c_{\rho_{p-1}}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}+w}. \tag{3}$$

Рівняння (3) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ – ортопроектор:

$$\mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*).$$

За умови (4) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (3)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{D}}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_p+w}$$

визначає розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$z(t,\delta) = \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) + \Big\{\mathcal{X}_p(t); \mathcal{K}\Big[\Psi(s)\Big](t)\Big\}P_{\mathcal{D}}\,\delta$$

$$+\Big\{\mathcal{X}_p(t); \mathcal{K}\Big[\Psi(s)\Big](t)\Big\}\mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_p+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ – матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p+w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *Припустимо, що для $(m \times n)$ – вимірної матриці $A(t) \in \mathbb{C}^q[a,b]$ змінного рангу існує неперервна матриця повного рангу $\mathcal{P}(t)$, для якої добуток $A(t)\mathcal{P}(t)$ має незмінний ранг:*

$$\mathrm{rank}\ A(t)\mathcal{P}(t) := \sigma_1 \le \min\,(\mathrm{m},\mathrm{n},\sigma_0), \quad \mathcal{P}(t) \in \mathbb{C}_{n\times\sigma_0}[a,b], \quad t \in [a,b].$$

У випадку виродження порядку p диференціально-алгебраїчна система (1) *має розв'язок вигляду*

$$z(t, c_{\rho_{p-1}}) = \mathcal{X}_p(t) c_{\rho_{p-1}} + \mathcal{K}\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t);, \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}};$$

тут $\mathcal{X}_p(t) := \mathcal{P}(t) X_p(t)$ *– розв'язок однорідної частини диференціально-алгебраїчної системи* (1) *та*

$$\mathcal{K}\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t) := \mathcal{P}(t) K\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t)$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ *диференціально-алгебраїчної системи* (1). *За умови* (4) *і тільки за неї розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі* (1)

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + \mathcal{G}\Big[f(s); \Psi(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$\mathcal{G}\Big[f(s); \Psi(s); \alpha\Big](t) := \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t)$$

$$+ \Big\{\mathcal{X}_p(t); \mathcal{K}\Big[\Psi(s)\Big](t)\Big\} \mathcal{D}^+ \Big\{\alpha - \ell \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Матриця $X_r(t)$ *утворена із r лінійно-незалежних стовпців матриці*

$$\Big\{\mathcal{X}_p(t); \mathcal{K}\Big[\Psi(s)\Big](t)\Big\} P_{\mathcal{D}}.$$

За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) представляє критичний випадок. Результати доведеної теореми можуть бути перенесені на різницеві [10], квазілінійні [11] та гібридні різницево-диференціальні крайові задачі [12]. Результати доведеної теореми отримані без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць [1, 2, 4] і узагальнюють результати [1, 2, 4–6, 13] на випадок матриці $A(t)$ змінного рангу. Запропонована у статті схема дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач (1) аналогічно [14–17] може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

Приклад 3. *Умови доведеної теореми справджуються у випадку двоточкової крайової задачі*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = 0, \tag{5}$$

де зокрема

$$A(t) := \begin{pmatrix} t\cos t & t\sin t & t\cos t & t\sin t \\ -t\sin t & t\cos t & -t\sin t & t\cos t \\ t\cos t & t\sin t & \cos t & \sin t \\ -t\sin t & t\cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix};$$

тут

$$B_{11}(t) := t^2(1+t^2)(2+t+t^2+t^3) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B_{12}(t) := t(1+t^2)(2+t+t^2+t^3) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B_{12}(t) := t(1+t^2)(1+t+2t^2+t^4) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B_{12}(t) := (1+t^2)(1+t+2t^2+t^4) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \quad f(t) := e^{t+\frac{t^3}{3}} \begin{pmatrix} t\,(t+1) \\ 0 \\ t\,(t+1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, у випадку диференціально-алгебраїчної системи (5) матриця $A(t)$ змінного рангу, при цьому існує неперервна матриця повного рангу

$$\mathcal{P}(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}[0, 2\pi],$$

для якої добуток має незмінний ранг:

$$\operatorname{rank} \mathcal{A}(t) := A(t)\mathcal{P}(t) = 2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Заміна змінної $z(t) = \mathcal{P}(t)y(t)$ приводить диференціально-алгебраїчну систему (5) до диференціально-алгебраїчної системи (2):

$$\mathcal{A}(t)y'(t) = \mathcal{B}(t)y(t) + f(t)$$

з матрицею $\mathcal{A}(t)$ незмінного рангу; тут

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} t\,(t+1)\cos t & t\,(t+1)\sin t \\ -t\,(t+1)\sin t & t\,(t+1)\cos t \\ (1+t^2)\cos t & (1+t^2)\sin t \\ -(1+t^2)\sin t & (1+t^2)\cos t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} t\,(1+t)(1+t^2)\cos t & t\,(1+t)(1+t^2)\sin t \\ -t\,(1+t)(1+t^2)\sin t & t\,(1+t)(1+t^2)\cos t \\ (1+t^2)^2\cos t & (1+t^2)^2\sin t \\ -(1+t^2)^2\sin t & (1+t^2)^2\cos t \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathcal{A}(t)$ незмінного рангу, оскільки визначник мінору, утвореного останніми двома рядками цієї матриці дорівнює $(1+t^2)^2$, при цьому її ортопроектор

$$P_{\mathcal{A}^*}(t) = \frac{1}{1+3t^2+2t^3+2t^4}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} (1+t^2)^2 & 0 & -t(1+t)(1+t^2) & 0 \\ 0 & (1+t^2)^2 & 0 & -t(1+t)(1+t^2) \\ -t(1+t)(1+t^2) & 0 & (1+t^2)^2 & 0 \\ 0 & -t(1+t)(1+t^2) & 0 & (1+t^2)^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

тому у відповідності до класифікації, наведеної у статтях [5] та [6], диференціально-алгебраїчна система (2) вироджена. Стандартне розвинення неперервної матриці $\mathcal{A}(t)$

$$\mathcal{A} = \Phi(t)\,J\,\Psi(t), \quad J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det\Phi(t) \neq 0, \quad \det\Psi(t) \neq 0, \quad \Phi(t), \Psi(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

утворюють неперервні невироджені матриці

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{11}(t) = t\,(1+t)\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

$$\Phi_{12}(t) = \Phi_{21}(t) = (1+t^2)\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{22}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = I_2.$$

Таким чином знаходимо матрицю та вектор [5, 6]

$$C_0(t) := \Phi^{-1}(t)\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(t)f(t) := \begin{pmatrix} g_1^{(0)}(t) \\ g_2^{(0)}(t) \end{pmatrix},$$

які приводять диференціально-алгебраїчну систему (5) до диференціальної системи

$$y'(t) = C_{11}^{(0)}(t)y(t) + g_1^{(0)}(t)$$

і дозволяють перевірити умову розв'язності $g_2^{(0)}(t) = 0$ системи (5); тут

$$C_{11}^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad g_1^{(0)}(t) = e^{t+\frac{t^3}{3}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix};$$

отже, для диференціально-алгебраїчної системи (2) з матрицею $\mathcal{A}(t)$ незмінного рангу виконуються вимоги теореми [5, с. 15], причому для диференціально-алгебраїчної системи (5) має місце виродження першого порядку. При цьому диференціально-алгебраїчна система (2) має розв'язок вигляду

$$y(t, c_{\rho_0}) = X_1(t)c_{\rho_0} + K\Big[f(s)\Big](t), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^2,$$

не залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = e^{t+\frac{t^3}{3}} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K\Big[f(s)\Big](t) = e^{t+\frac{t^3}{3}} \begin{pmatrix} t\sin t \\ t - t\cos t \\ \sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}.$$

Диференціально-алгебраїчна задача (2) крайова задача (5) представляє критичний випадок:

$$P_{Q^*}P_{\mathcal{D}^*} \neq 0,$$

причому виконано умову (4) її розв'язності. Єдиний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (5) визначає узагальнений оператор Гріна

$$z(t) = \mathcal{G}\Big[f(s); \alpha\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t).$$

Відзначимо, що використовувана при дослідженні крайової задачі (1) теорема у статті [5, с. 15] передбачає незмінність рангу матриці $\mathcal{A}(t)$ для диференціально-алгебраїчної системи (2), необхідну для гладкості псевдооберненої матриці [18, 19]

$$A_p^+(t) \in \mathbb{C}^1[a,b].$$

Побудова узагальненого оператора Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) суттєво спрощується у випадку сталої матриці $\mathcal{P}$, для якої добуток $\mathcal{A}(t) := A(t)\mathcal{P}$ має незмінний ранг; в цьому випадку суттєво спрощується вигляд диференціально-алгебраїчної системи (2): $\mathcal{B}(t) := B(t)\mathcal{P}$.

У некритичному випадку, за умови $P_{Q^*} = 0$ згідно доведеної теореми диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) розв'язна для будь-яких неоднорідностей $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ та $\alpha \in \mathbb{R}^q$. Для знаходження наближених розв'язків крайової задачі (1) застосовний метод найменших квадратів [20, 21].

Запропонована у статті схема дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач (1) аналогічно [16, 22–25] може бути перенесена на нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, у частинних похідних [26, 27].

Література

[1] Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco–London–Melbourne.

[2] Бояринцев, Ю.Е., Чистяков, В.Ф. (1998). *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования.* Наука, Новосибирск.

[3] Бойчук, А.А., Шегда, Л.М. (2007). Вироджені нетерові крайові задачі. *Нелінійні коливання, 10*(3), 303–312.

[4] Самойленко, А.М., Шкіль, М.І., Яковець, В.П. (2000). *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням.* Вища школа, К.

[5] Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Ukr. Math. Bull., 15*(1), 1–17; transl. in. *Journal of Mathematical Sciences, 235*(1), 2–14.

[6] Chuiko, S.M. (2020). A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Advances in Mathematics, 30*, 177–191.

[7] Чистяков, В.Ф. (1996). *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* Наука, Новосибирск.

[8] Гантмахер, Ф.Р. (1988). *Теория матриц.* Наука, М.

[9] Фихтенгольц, Г.М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.* ГИФМЛ, М.

[10] Boichuk, A.A. (1997). Boundary-value problems for systems of difference equations. *Ukr. Math. Journal, 49*(6), 930–934.

[11] Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2019). On semilinear equations in the complex plane. *Доповіді Національної академії наук України*, 7, 9–16.

[12] Samoilenko, A., Boichuk, A., Chuiko, S. (2017). Hybrid difference differential boundary-value problem. *Miskolc Mathematical Notes, 18*(2), 1015–1031.

[13] Boichuk, A.A., Shehda, L.M. (2009). Conditions for bifurcation of solutions of degenerate boundary-value problems. *Nonlinear Oscillations, 12*(2), 149–156.

[14] Chuiko, S.M. (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Mathematical Journa, 56*(4), 752–760.

[15] Chuiko, S.M. (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Ukr. Math. Bull., 12*(1), 11–26; transl. in *Journal of Mathematical Sciences, 210*(1), 9–21.

[16] Chuiko, S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes, 17*(1), 139–150.

[17] Chuiko, S.M. (2017). To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Ukr. Math. Bull., 14*(1), 16–32; transl. in (2017). *J. Math. Sci., 227*(1), 13–25.

[18] Stewart, G.W. (1969). On the continuity of the generalized inverse. *SZAM J.A. & Math., 17*, 33–45.

[19] Campbell, S.L. (1977). On continuity of the Moore-Penrose and Drazin generalized inverses. *Linear algebra and its appl.,* 53–57.

[20] Ахиезер, Н.И. (1965). *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М.

[21] Chuiko, S.M. (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations, 11*(4), 585–604.

[22] Перепелица, М.А., Покутный, А.А. (2013). Исследование разрешимости слабо-нелинейных дифференциально-алгебраических систем. *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование", 6*(4), 55–62.

[23] Boichuk, A., Chuiko, S. (1992). Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Differential Equations, 10*, 1353–1358.

[24] Chuiko, S.M., Nesmelova, O.V. (2020). Nonlinear boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems. *Ukr. Math. Bull., 17*(3), 313–324; transl. in (2021). *J. Math. Sci., 252*(4), 463–471.

[25] Chuiko, S.M., Boichuk, I.A. (2009). An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations, 12*(3), 405–416.

[26] Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2020). The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України*, 5, 10–16.

[27] Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163–179.

Відомості про авторів

Сергій Михайлович Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

E-Mail: `chujko-slav@ukr.net`