Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 3, 319 – 337
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-3-3

Про компактність класів розв'язків задачі Діріхле з обмеженнями теоретико-множинного типу

Олександр П. Довгопятий, Євген О. Севостьянов

(Представлена В. І. Рязановим)

Анотація. Доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Як наслідок, отримано результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле в деякій жордановій області.

2010 MSC. Primary 30C65; Secondary 35J70, 30C75.

Ключові слова та фрази. Квазіконформний аналіз, теореми збіжності, теореми компактності, рівняння Бельтрамі.

1. Вступ

Дана стаття присвячена вивченню рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле для нього, які активно вивчаються низкою авторів (див., напр., [1–7]).

Відносно нещодавно отримано результати щодо компактності сімей розв'язків рівнянь Бельтрамі, а також відповідної задачі Діріхле для нього (див., напр., [5] і [7]). Зокрема, отримано компактність цих розв'язків з умовами нормування $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ і $f(\infty) = \infty$, характеристики яких задовольняють обмеження інтегрального, або теоретико-множинного типу. Окремо вивчалася задача Діріхле для рівняння Бельтрамі. Зокрема, встановлено існування відкритих дискретних розв'язків цієї задачі, а також теореми компактності їх сімей в одиничному крузі (див., напр., [5] і [6]). Метою даної публікації є отримання нових умов компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле в випадку, коли їх характеристики задовольняють теоретико-множинні обмеження на дилатації. Зокрема, доведено

Стаття надійшла в редакцію 27.12.2020

компактність класів розв'язків рівняння Бельтрамі з так званим гідродинамічним нормуванням, тобто, коли ці розв'язки ведуть себе близько до тотожних відображень в околі нескінченно віддаленої точки. Аналогічні результати отримано для розв'язків задачі Діріхле у довільній обмеженій жордановій області.

Скрізь далі відображення $f : D \to \mathbb{C}$ області $D \subset \mathbb{C}$ вважається таким, що *зберігає орієнтацію,* зокрема, якщо f – гомеоморфізм і $z \in D$ – яка-небудь його точка диференційовності, то *якобіан* цього відображення в точці z невід'ємний. Для комплекснозначної функції $f : D \to \mathbb{C}$, заданій в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x + iy$, покладемо $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ і $f_z = (f_x - if_y)/2$. *Комплексною дилатацією* відображення f в точці z називається функція $\mu : D \to \mathbb{C}$, визначена рівністю $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$ при $f_z \neq 0$ і $\mu(z) = 0$ в іншому випадку. *Максимальною дилатацією* відображення f в точці z називається наступна функція:

$$K_\mu(z) = K_{\mu_f}(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}\,. \tag{1.1}$$

Якщо задана вимірна за Лебегом функція $\mu : D \to \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, то не прив'язуючись до якого-небудь відображення f будемо називати величину, що обчислюється за допомогою рівності (1.1), максимальною дилатацією відповідної функції μ. Зауважимо, що якобіан відображення f в точці $z \in D$ можна обчислити за допомогою рівності

$$J(z, f) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2\,,$$

що можна перевірити прямими обчисленнями. Неважко бачити, що $K_{\mu_f}(z) = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$ у всіх точках $z \in D$ відображення f, що має частинні похідні в точці z, де якобіан $J(z, f)$ не дорівнює нулю. *Рівнянням Бельтрамі* будемо називати диференціальне рівняння виду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z\,, \tag{1.2}$$

в якому $\mu = \mu(z)$ – задана невідома функція. *Регулярним розв'язком рівняння (1.2)* в області $D \subset \mathbb{C}$ ми будемо називати гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ такий, що $J(z, f) \neq 0$ при майже всіх $z \in D$. У подальшому, в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π – стереографічна проекція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}\,,$$

$$h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,,\quad x\ne\infty\ne y \tag{1.3}$$

(див., напр., [8, означення 12.1]). У подальшому

$$h(E)=\sup_{x,y\in E}h(x,y) \tag{1.4}$$

– хордальний діаметр множини $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$. Як звично, сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f:D\to\overline{\mathbb{C}}$ буде називатися *нормальною,* якщо з кожної послідовності $f_n\in\mathfrak{F}$, $n=1,2,\ldots$, можна виділити підпослідовність f_{n_k}, $k=1,2,\ldots$, яка збігається локально рівномірно до деякого відображення $f:D\to\overline{\mathbb{C}}$ в метриці h. Якщо додатково $f\in\mathfrak{F}$, сім'я $\mathfrak{F}$ називається *компактною.*

Множина $A\subset\mathbb{D}$ називається *інваріантно опуклою,* якщо множина $g(A)$ є опуклою для будь-якого дробово-лінійного автоморфізму g одиничного круга.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. Будемо говорити, що функція $\varphi:D\to\mathbb{R}$, що є локально інтегровною в деякому околі точки $x_0\in D$, має *скінченне середнє коливання* в точці x_0 (пишемо: $\varphi\in FMO(x_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\;dm(x)\;<\;\infty\,, \tag{1.5}$$

де Ω_n – об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}_\varepsilon=\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)}\varphi(x)\;dm(x)$ (див., напр., [9, розд. 2]). Зауважимо, що коли виконується умова (1.5) можлива ситуація, коли $\overline{\varphi_\varepsilon}\to\infty$ при $\varepsilon\to0$. Також будемо говорити, що $\varphi:D\to\mathbb{R}$ – функція скінченного середнього коливання в області D, пишемо $\varphi\in FMO(D)$, якщо φ має скінченне середнє коливання в кожній точці $x_0\in D$.

Нехай $M(z)\subset\mathbb{D}$, $z\in\mathbb{C}$ – деяка система множин (тобто, при кожному $z_0\in\mathbb{C}$ символ $M(z_0)$ позначає деяку множину в $\mathbb{D}$). Позначимо через $\mathfrak{M}_M$ множину всіх комплексних вимірних функцій $\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$, таких що $\mu(z)\in M(z)$ при майже всіх $z\in\mathbb{C}$. Нехай K – компакт в $\mathbb{C}$, $M(z)$ – система множин в $\mathbb{D}$. Позначимо через $\mathfrak{F}_M(K)$ клас усіх регулярних розв'язків $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ рівняння (1.2) з комплексними коефіцієнтами μ, рівними нулю зовні K такими, що

$$f(z)=z+o(1)\quad\text{при}\quad z\to\infty\,, \tag{1.6}$$

при цьому $\mu\in\mathfrak{M}_M$. Для множини $M(z)$ покладемо

$$Q_M(z)=\frac{1+q_M(z)}{1-q_M(z)}\,,\quad q_M(z)=\sup_{\nu\in M(z)}|\nu|\,. \tag{1.7}$$

Одним з основних результатів статті є наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай $M(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – сім'я інваріантно опуклих компактних множин, і нехай функція Q_M є інтегровною на K і задовольняє принаймні одну з умов: або $Q_M\in FMO(\mathbb{C})$, або для кожного $z_0\in\mathbb{C}$ існує $\delta_0=\delta(z_0)>0$ таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0}\frac{dt}{tq_{M_{z_0}}(t)}=\infty\,, \tag{1.8}$$

де $q_{M_{z_0}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q_M(z_0+te^{i\theta})\,d\theta$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_M(K)$ є компактною в $\mathbb{C}$.

Перейдемо тепер до розгляду питання про компактність класів розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі. Розглянемо наступну задачу Діріхле:

$$f_{\overline{z}}=\mu(z)\cdot f_z\,, \tag{1.9}$$

$$\lim_{\zeta\to z}\operatorname{Re}f(\zeta)=\varphi(z)\qquad\forall\ z\in\partial D\,, \tag{1.10}$$

де $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ – наперед задана неперервна функція. Надалі вважаємо, що D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$. Розв'язок задачі (1.9)–(1.10) будемо вважати *регулярним,* якщо виконано одно з двох: або $f(z)=\mathrm{const}$ в D, або f – відкрите дискретне відображення класу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, таке що $J(z,f)\neq 0$ при майже всіх $z\in D$.

Зафіксуємо точку $z_0\in D$ і функцію φ. Нехай $M(z)\subset\mathbb{D}$, $z\in D$ – деяка система множин. Нехай $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$ позначає клас усіх регулярних розв'язків $f:D\to\mathbb{C}$ задачі Діріхле (1.9)–(1.10), які задовольняють умову $\operatorname{Im}f(z_0)=0$ таких, що $\mu\in\mathfrak{M}_M$. Як і раніше, визначимо функцію $Q_M(z)$ співвідношенням (1.7), причому вважатимемо $Q_M(z)\equiv 1$ при $z\in\mathbb{C}\setminus D$. Наступне твердження узагальнює [5, теорема 2] на випадок довільних однозв'язних жорданових областей.

Теорема 1.2. *Нехай D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$, і нехай функція φ у (1.10) неперервна. Припустимо, що $M(z)$, $z\in D$, – сім'я інваріантно опуклих компактних множин, і нехай функція Q_M є інтегровною в D і задовольняє принаймні одну з умов: або $Q_M\in FMO(\overline{D})$, або для кожного $x_0\in\overline{D}$ існує $\delta_0=\delta(x_0)>0$ таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0}\frac{dt}{tq_{M_{x_0}}(t)}=\infty\,, \tag{1.11}$$

де $q_{M_{x_0}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_M(x_0+te^{i\theta})\,d\theta$. *Тоді сім'я відображень* $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$ *є компактною в* D.

2. Про збіжність гомеоморфізмів з модульними умовами

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $M(\Gamma)$ – конформний модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., [8, гл. 6]). Покладемо

$$S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r\}\,, B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|<r\}\,,$$

$$\mathbb{B}^n := B(0,1),\ \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1),\ \Omega_n = m(\mathbb{B}^n),\ \omega_{n-1}=\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

де $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$. Якщо $n=2$, покладемо $\mathbb{D}:=B(0,1)$. Нехай, крім того,

$$A=A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n : r_1<|x-x_0|<r_2\}\,.$$

Для заданих множин $E,\ F\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D\subset\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E,F,D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a)\in E, \gamma(b)\in F$ і $\gamma(t)\in D$ при $t\in[a,b]$. Відображення $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ називається *кільцевим Q-відображенням у точці* $x_0\in\overline{D}$, якщо співвідношення

$$M(f(\Gamma(S(x_0,r_1),\,S(x_0,r_2),\,A\cap D))) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{2.1}$$

виконано для будь-якого кільця $A=A(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<r_0:=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, і кожної вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,. \tag{2.2}$$

Наступна важлива лема випливає з [10, теореми 4.1 і 4.2].

Лема 2.1. *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $Q:D\to[1,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Нехай, крім того, f_k, $k=1,2,\ldots$ – послідовність гомеоморфізмів області D в $\mathbb{R}^n$, які задовольняють умови (2.1)–(2.2) в кожній точці x_0 області D, що збігається локально рівномірно в D до деякого відображення $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ по хордальній метриці h. Припустимо, що функція Q задовольняє принаймні* *одну з двух умов: або* $Q \in FMO(D)$, *або для кожного* $x_0 \in D$ *існує* $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$ *таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,, \tag{2.3}$$

де $q_{x_0}(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$, *а* $\mathcal{H}^{n-1}$ *позначає* $(n-1)$*-вимірну міру Хаусдорфа. Тоді відображення* f *є або гомеоморфізмом* $f : D \to \mathbb{R}^n$, *або сталою* $c \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Згідно [11], область D в $\mathbb{R}^n$ називається *областю квазіекстремальної довжини*, скор. QED*-областю*, якщо знайдеться число $A \geqslant 1$ таке, що для всіх континуумів E і F у D виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, \mathbb{R}^n)) \leqslant A \cdot M(\Gamma(E, F, D))\,. \tag{2.4}$$

Наступне твердження встановлено в [12, лема 3.2].

Лема 2.2. *Нехай* D, D' *– області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $b_0 \in D$, $b_0' \in D'$, *і нехай* f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *– сім'я гомеоморфізмів області* D *на* D' *з умовою нормування* $f_k(b_0) = b_0'$, $k = 1, 2, \ldots.$ *Припустимо, що кожне відображення* f_k, $k = 1, 2, \ldots$ *задовольняє співвідношення* (2.1) *в довільній точці* $x_0 \in \overline{D}$ *і деякою вимірною функцією* $Q : D \to [1, \infty]$ *такою, що виконано принаймні одну з двох умов: або* $Q \in FMO(\overline{D})$, *або для кожного* $x_0 \in \overline{D}$ *існує* $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$ *таке, що виконується* (2.3). *Нехай область* D *є локально зв'язною на своїй межі, а* D' *є* QED*-областю, яка містить не менше одної скінченної межової точки. Тоді кожне* f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *продовжується до неперервного відображення* $\overline{f}_k : \overline{D} \to \overline{D'}$ *і, крім того, сім'я продовжених відображень* $\overline{f}_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ *є одностайно неперервною в* $\overline{D}$.

3. Компактність розв'язків рівнянь Бельтрамі з гідродинамічним нормуванням

Доведення теореми 1.1.

I. Передусім доведемо, що сім'я $\mathfrak{F}_M(K)$ є одностайно неперервною. Зафіксуємо $f \in \mathfrak{F}_M(K)$, довільний компакт $C \subset \mathbb{C}$ і покладемо $\widetilde{f} = \frac{1}{f(1/z)}$. (Якщо $f(1/w_0) = 0$, то ми вважаємо, що $\widetilde{f}(w_0) := \infty$). Оскільки $f(z) = z + o(1)$ при $z \to \infty$, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Тоді покладаючи $\widetilde{f}(0) := 0$, отримаємо гомеоморфізм $\widetilde{f}$, визначений в деякому околі нуля. У подальшому покладемо $f(\infty) := \infty$. Оскільки $f(z) = z + o(1)$

при $z \to \infty$, існує окіл U початку координат і функція $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ такі, що $f(1/z) = 1/z + \varepsilon(1/z)$, де $z \in U$ і $\varepsilon(1/z) \to 0$ при $z \to 0$. Отже, при достатньо малому $\Delta z \in \mathbb{C}$ ми будемо мати, що

$$\frac{\widetilde{f}(\Delta z) - \widetilde{f}(0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \frac{1}{1/(\Delta z) + \varepsilon(1/\Delta z)} = \frac{1}{1 + (\Delta z) \cdot \varepsilon(1/\Delta z)} \to 1$$

при $z \to 0$. Сказане доводить, що існує $\widetilde{f}\,'(0)$, при цьому, $\widetilde{f}\,'(0) = 1$. Оскільки зовні K функція μ дорівнює нулю, відображення f є конформним в деякому околі $V := \overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 1/r_0)$ точки нескінченність, причому, число $1/r_0$ залежить тільки від K і $K \subset B(0, 1/r_0)$. Без обмеження загальності можна вважати, що також і компакт C задовольняє умову $C \subset B(0, 1/r_0)$. В такому випадку, відображення $\widetilde{f} = \frac{1}{f(1/z)}$ є конформним у кулі $B(0, r_0)$, при цьому відображення $F(z) := \frac{1}{r_0} \cdot \widetilde{f}(r_0 z)$ є гомеоморфізмом одиничного круга в $\mathbb{C}$ і задовольняє умови $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. За теоремою Кебе про $1/4$ (див. напр., [1, теорема, розд. 1.3 гл. 1]) $F(\mathbb{D}) \supset B(0, 1/4)$; тоді

$$\widetilde{f}(B(0, r_0)) \supset B(0, r_0/4)\,. \tag{3.1}$$

Зі співвідношення (3.1) випливає, що

$$(1/f)(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 1/r_0)}) \supset B(0, r_0/4)\,. \tag{3.2}$$

З урахуванням (3.2) покажемо, що

$$f(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 1/r_0)}) \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 4/r_0)}\,. \tag{3.3}$$

Дійсно, нехай $y \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 4/r_0)}$, тоді $\frac{1}{y} \in B(0, r_0/4)$. Зі співвідношення (3.2) $\frac{1}{y} = (1/f)(x)$, $x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 1/r_0)}$. Тоді $y = f(x)$, $x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 1/r_0)}$, що і доводить (3.3).

Оскільки f – гомеоморфізм у $\mathbb{C}$, зі співвідношення (3.3) випливає, що $f(B(0, 1/r_0)) \subset B(0, 4/r_0)$. Покладемо $\Delta := h(\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0))$, де $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0))$ – хордальний діаметр множини $\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0)$. За [13, теорема 3.1] кожне відображення f є так званим кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\mathbb{C}$ при $Q = K_\mu(z)$, де μ визначається зі співвідношення (1.2), а K_μ визначено в (1.1). Зауважимо, що $Q \leqslant Q_M(z)$ майже скрізь. В таком випадку, сім'я відображень $\mathfrak{F}_M(K)$ є одностайно неперервною в $B(0, 1/r_0)$ за [14, теореми 7.5, 7.6]. Нехай тепер $f_n \in \mathfrak{F}_M(K)$, $n = 1, 2, \ldots$. За теоремою Арцела-Асколі (див., напр., [8, теорема 20.4]) існує підпослідовність $f_{n_k}(z)$ послідовності f_n, $k = 1, 2, \ldots$, а також неперервне відображення $f : B(0, 1/r_0) \to \overline{\mathbb{C}}$ такі, що f_{n_k} локально рівномірно збігається до відображення f у $B(0, 1/r_0)$ при

$k\to\infty$. Зокрема, оскільки компакт C належить $B(0,1/r_0)$, послідовність f_{n_k} збігається до f рівномірно на C. Оскільки компакт C був обраний довільним, ми встановили, що сім'я відображень f_{n_k} збігається до відображення f локально рівномірно.

II. Для завершення доведення теореми 1.1 залишилось встановити, що $f\in\mathfrak{F}_M(K)$. Передусім доведемо, що граничне відображення f задовольняє умову $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$. Зауважимо, що сім'я відображень $F_{n_k}(z):=\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{f_{n_k}(\frac{1}{r_0z})}$ є компактною в одиничному крузі (див. [1, теорема 1.2 гл. I]). Без обмеження загальності можна вважати, що сама послідовність F_{n_k} є локально рівномірно збіжною в $\mathbb{D}$. Тоді функція $F(z)=\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{f(\frac{1}{r_0z})}$ знову належить до класу S, що складається з конформних відображень F одиничного круга, які задовольняють умови $F(0)=0$, $F'(0)=1$. Розпишемо розклад в ряд Тейлора функцій F_{n_k} і F в околі нуля. Будемо мати:

$$F_{n_k}(z)=z+c_kz^2+z^2\cdot\varepsilon_k(z)\,,\quad k=1,2,\ldots\,, \tag{3.4}$$

$$F(z)=z+c_0z^2+z^2\cdot\varepsilon_0(z)\,, \tag{3.5}$$

де $\varepsilon_k(z)$ і $\varepsilon_0(z)$ прямують до нуля при $z\to 0$. Зі співвідношень (3.4) і (3.5) випливає, що

$$f_{n_k}(t)=\frac{r_0t^2}{r_0t+c_k+\varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0t}\right)}\,,$$

$$f_{n_k}(t)-t=-\frac{c_k+\varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{r_0+\frac{c_k}{t}+\frac{\varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{t}}\,,\quad k=1,2,\ldots\,, \tag{3.6}$$

$$f(t)=\frac{r_0t^2}{r_0t+c_0+\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}\,,\quad f(t)-t=-\frac{c_0+\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{r_0+\frac{c_0}{t}+\frac{\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{t}}\,. \tag{3.7}$$

Зокрема, з другого співвідношення у (3.6) переходом до границі при $t\to\infty$ випливає, що $f_{n_k}(t)-t\to-\frac{c_k}{r_0}$. Оскільки за умовою $f_{n_k}(t)-t\to 0$ при $t\to\infty$, маємо: $c_k=0$. За теоремою Вейерштрасса про збіжність коефіцієнтів ряду Тейлора (див., напр., [15, Теорема 1.1.I]) маємо: $c_k=0\to c_0$ при $k\to\infty$. Отже, $c_0=0$ в (3.7), тобто, відображення f також має гідродинамічне нормування: $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$.

Тепер покажемо, що f – гомеоморфізм комплексної площини. Покладемо $\mu_k:=\mu_{f_{n_k}}$. За [13, теорема 3.1] кожне відображення f_{n_k} є кільцевим Q-гомеоморфізмом в кожній точці $z_0\in\mathbb{C}$ при $Q=K_{\mu_k}(z)$.

З огляду на лему 2.1 має місце наступна альтернатива: або f – гомеоморфізм з D у $\mathbb{C}$, або f – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. За доведеним на кроці **I** f є гомеоморфізмом в деякому околі нескінченності, отже, f – гомеоморфізм всієї комплексної площини, який приймає тільки скінченні комплексні значення.

Тоді за [16, теорема 3.1 і зауваження 3.1] $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Покажемо, що f є регулярним розв'язком рівняння (1.2) з деяким μ, тобто, $J(z,f)\ne 0$ при майже всіх $z\in\mathbb{C}$. Оскільки за умовою відображення f_{n_k} є регулярними, крім того, $K_{\mu_k}(z)\leqslant Q_M(z)$ майже скрізь, крім того, Q_M є інтегровною в K, маємо: $J(f_{n_k},z)\ne 0$ при майже всіх $z\in\mathbb{C}$, $g_{n_k}:=f_{n_k}^{-1}\in W_{\rm loc}^{1,2}$, причому, $(g_{n_k})_w=0$ у майже всіх точках w, де $J(g_{n_k},w)=0$ (див. [17, теорема 1.3]). Отже, g_{n_k} мають N-властивість Лузіна (див., напр., [18, теорема 1] або [19, наслідок B]). Позначимо $\partial g=g_w$ і $\overline{\partial} g=g_{\overline{w}}$. Нехай C_0 – довільний компакт у $f(D)$. Оскільки f_{n_k} збігаються до f локально рівномірно в $\mathbb{C}$ і f – гомеоморфізм, то g_{n_k} також збігаються локально рівномірно в $f(D)$ до відображення $g:=f^{\,-1}$ (див., напр., [10, лема 3.1]). Зокрема, звідси випливає, що відображення g_{n_k} визначені на C_0 при всіх достатньо великих $k\geqslant k_0=k_0(C_0)$. Оскільки g_{n_k} збігаються рівномірно на C_0 до g при $k\to\infty$, маємо:

$$|g_{n_k}(w)|\leqslant |g(w)|+1 \tag{3.8}$$

при всіх $w\in C_0$ і достатньо великих $k\in\mathbb{N}$. Покладемо $A:=\sup\limits_{w\in C_0}|g(w)|$. Зауважимо, що за теоремою Кантора про обмеженість неперервного відображення на компакті C_0 виконується нерівність $A<\infty$. Отже, з огляду на (3.8),

$$g_{n_k}(C_0)\subset B(0,A+1)\,. \tag{3.9}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $J(g_{n_k},w)\ne 0$ при майже всіх $w\in C_0$. Будемо мати:

$$|\partial g_{n_k}(w)|^2=\left(|\partial g_{n_k}(w)|^{\,2}-|\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^{\,2}\right)\cdot\frac{|\partial g_{n_k}(w)|^{\,2}}{\left(|\partial g_{n_k}(w)|^{2}-|\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^{\,2}\right)}$$

$$=J(w,g_{n_k})\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial} g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2}\,,$$

зокрема,

$$|\partial g_{n_k}(w)|^2=J(w,g_{n_k})\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial} g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2}\,. \tag{3.10}$$

Оскільки g_{n_k} є гомеоморфізмами класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, які мають N-властивість Лузіна, для них має місце заміна змінних в інтегралі (див., напр., [20, теорема 3.2.5]). Зауважимо, що $\mu_{g_{n_k}}(w) = -\mu_k(g_{n_k}(w)) = -\mu_k(f_{n_k}^{-1}(w))$, див. напр., [21, (4).C.I]. В такому випадку, з огляду на (3.9) і (3.10), ми будемо мати, що

$$\int\limits_{C_0} |\partial g_{n_k}(w)|^2 \, dm(w)$$

$$= \int\limits_{C_0} \left(|\partial g_{n_k}(w)|^2 - |\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^2\right) \cdot \frac{|\partial g_{n_k}(w)|^2 dm(w)}{\left(|\partial g_{n_k}(w)|^2 - |\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^2\right)}$$

$$= \int\limits_{C_0} J(w, g_{n_k}) \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{\overline{\partial} g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2} \, dm(w) = \int\limits_{g_{n_k}(C_0)} \frac{dm(z)}{1 - |\mu_k(z)|^2}$$

$$\leqslant \int\limits_{B(0,A+1)} Q'(z) \, dm(z) < \infty \,. \tag{3.11}$$

З (3.11) випливає, що

$$\int\limits_{C_0} |\partial g_{n_k}(w)|^2 \, dm(w) \leqslant \int\limits_{B(0,A+1)} Q'(z) \, dm(z) < \infty \,, \tag{3.12}$$

де $Q'(z) \equiv Q_M(z)$ при $z \in K$ і $Q'(z) \equiv 1$ в протилежному випадку. Зауважимо, що співвідношення (3.12) виконується також і у випадку, коли $J(g_{n_k}, w) = 0$ на множині додатної міри в C_0, бо, як вже було зауважено вище, $(g_{n_k})_w = 0$ у майже всіх точках w, де $J(g_{n_k}, w) = 0$ (див. [17, теорема 1.3]). З (3.11) випливає, що $g \in W^{1,2}_{\rm loc}$ (див. [22, лема III.3.5]). Тоді g має N-властивість за теоремою Малого–Мартіо, див., напр., [19, наслідок B]. У свою чергу, f має майже всюди невироджений якобіан за теоремою Пономарьова (див. [18, теорема 1]).

Отже, f є регулярним розв'язком рівняння (1.2) при деякій функції $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. За теоремою Герінга-Лехто відображення f є майже всюди диференційовним (див. [23, теорема III.3.1]). Тому за теоремою 16.1 у [10] $\mu(z) = 0$ при всіх $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Нарешті, $\mu \in \mathfrak{M}_M$ за [7, лема 1]. Отже, $f \in \mathfrak{F}_M(K)$. $\Box$

4. Одностайна неперервність сімей відображень з оберненою нерівністю Полецького

В цьому розділі ми маємо справу з відображеннями $f : D \to \mathbb{R}^n$ області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Нижче ми наводимо деякі результати з [24], що є необхідним для доведення ключових теорем наступного розділу.

Нехай, як і раніше, $M(\Gamma)$ – конформний модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., [8, гл. 6]). Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \qquad (4.1)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \qquad (4.2)$$

Нагадаємо, що відображення $f : D \to D'$ називається *замкненим,* якщо будь-яку замкнену множину $A \subset D$ відображення f переводить у замкнену множину $f(A) \subset D'$ (де замкненість розуміється відносно областей D і D', відповідно). Можна показати, що будь-які гомеоморфізми між областями D і D' є замкненими відображеннями.

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, точок $a \in D$, $b \in D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q\colon D \to [0, \infty]$, що дорівнює нулю зовні області D, позначимо через $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих, дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (4.1) для кожного $y_0 \in f(D)$, таких що $f(a) = b$. Наступне твердження доведено в [24, теорема 7.1].

Лема 4.1. *Припустимо, що область D має слабо плоску межу, жодна із зв'язних компонент якої не вироджена. Нехай $Q \in L^1(D)$. Якщо область D' локально зв'язна на своїй межі, то кожне відображення $f \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

5. Компактність сімей розв'язків задачі Діріхле

Доведення теореми 1.2.

I. Нехай f_m, $m = 1, 2, \ldots$ – довільна послідовність сім'ї $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$. Згідно теореми Стойлова про факторизацію (див., напр., [25, п. 5 (III), гл. V]), для відображення f_m справедливе зображення

$$f_m = \varphi_m \circ g_m\,, \qquad (5.1)$$

де g_m – деякий гомеоморфізм, а φ_m – аналітична функція. За лемою 1 в [26] відображення g_m належить класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і має скінченне спотворення. Більше того, згідно [21, (1), п. С, гл. I] для майже всіх $z\in D$ отримаємо:

$$f_{mz}=\varphi_{mz}(g_m(z))g_{mz}, \qquad f_{m\overline{z}}=\varphi_{mz}(g_m(z))g_{m\overline{z}}\,. \tag{5.2}$$

Отже, за співвідношенням (5.2), $J(z,g_m)\ne 0$ для майже всіх $z\in D$, крім того, $K_{\mu_{f_m}}(z)=K_{\mu_{g_m}}(z)$.

II. Доведемо, що межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок. Припустимо супротивне. Тоді або $g_m(D)=\mathbb{C}$, або $g_m(D)=\mathbb{C}\setminus\{a\}$, де $a\in\mathbb{C}$. Нехай спочатку $g_m(D)=\mathbb{C}$. Тоді за теоремою Пікара $\varphi_m(g_m(D))$ є всією площиною, за виключенням, можливо, однієї точки $\omega_0\in\mathbb{C}$. З іншого боку, при кожному $m=1,2,\ldots$ функція $u_m(z):={\rm Re}\,f_m(z)={\rm Re}\,(\varphi_m(g_m(z)))$ неперервна на компакті $\overline{D}$ за умовою (1.10) і з огляду на неперервність функції φ. Отже, існує $C_m>0$ таке, що $|{\rm Re}\,f_m(z)|\leqslant C_m$, але це суперечить тому, що $\varphi_m(g_m(D))$ містить всі точки комплексної площини крім, можливо, однієї. Випадок $g_m(D)=\mathbb{C}\setminus\{a\}$, $a\in\mathbb{C}$, є неможливим, оскільки $g_m(D)$ має бути однозв'язною областю в $\mathbb{C}$ як образ однозв'язної області D при гомеоморфізмі g_m, $m=1,2,\ldots$.

Отже, межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок. Тоді за теоремою Рімана про відображення можна перетворити область $g_m(D)$ на одиничний круг $\mathbb{D}$ за допомогою конформного відображення ψ_m. Нехай $z_0\in D$ – точка з умови теореми. За допомогою допоміжного конформного відображення

$$\widetilde{\psi_m}(z)=\frac{z-(\psi_m\circ g_m)(z_0)}{1-z\overline{(\psi_m\circ g_m)(z_0)}}$$

одиничного круга на себе можна вважати, що $(\psi_m\circ g_m)(z_0)=0$. Тоді з (5.1) випливає, що

$$f_m=\varphi_m\circ g_m=\varphi_m\circ\psi_m^{-1}\circ\psi_m\circ g_m=F_m\circ G_m\,,\quad m=1,2,\ldots\,, \tag{5.3}$$

де $F_m:=\varphi_m\circ\psi_m^{-1}$, $F_m:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, і $G_m=\psi_m\circ g_m$. Очевидно, функція F_m є аналітичною, а G_m – регулярний гомеоморфізм класу Соболєва в області D. Зокрема, ${\rm Im}\,F_m(0)=0$ для всіх $m\in\mathbb{N}$.

III. Зауважимо що

$$\int\limits_D K_{\mu_{G_m}}(z)\,dm(z)\leqslant\int\limits_D Q_M(z)\,dm(z)<\infty\,, \tag{5.4}$$

оскільки за умовою $\mu(z) \in M(z)$ при майже всіх $z \in D$, крім того, при майже всіх $z \in D$ виконано нерівність $K_{\mu_{G_m}}(z) \leqslant Q_M(z)$, а функція $Q_M(z)$ не залежить від індексу $m = 1, 2, \ldots$ і інтегровна в D за умовою.

IV. Доведемо, що кожне відображення G_m, $m = 1, 2, \ldots$, має неперервне продовження на ∂D, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{G}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, є одностайно неперервною в $\overline{D}$. Дійсно, оскільки $K_{\mu_{G_m}}(z) \leqslant Q_M(z)$ при майже всіх $z \in D$, $K_{\mu_{G_m}} \in L^1(D)$. З огляду на це, за [27, теорема 3] (див. також [13, теорема 3.1]) кожне відображення G_m, $m = 1, 2, \ldots$, є так званим кільцевим Q_M-гомеоморфізмом в $\overline{D}$. Тоді бажаний висновок є твердженням леми 2.2.

V. Доведемо також, що гомеоморфізми G_m^{-1}, $m = 1, 2, \ldots$, продовжується по неперервності на $\partial\mathbb{D}$ і сім'я відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Оскільки за доведеним у пункті **IV** відображення G_m, $m = 1, 2, \ldots$, є кільцевими $K_{\mu_{G_m}}(z)$-гомеоморфізмами в D, обернені до них відображення G_m^{-1} задовольняють співвідношення (4.1) (в цьому випадку, D у (4.2) відповідає одиничному кругу $\mathbb{D}$, $f \mapsto G_m$, $Q \mapsto K_{\mu_{G_m}}(z)$, відповідно, області $f(D)$ у (4.1) відповідає D). Оскільки $G_m^{-1}(0) = z_0$ для всіх $m = 1, 2, \ldots$, неперервне продовження кожного відображення G_m^{-1} на $\partial\mathbb{D}$, а також одностайна неперервність сім'ї відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{\mathbb{D}}$ є результатом леми 4.1.

VI. Оскільки за доведеним в пункті **IV** сім'я $\{\overline{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, за критерієм Арцела-Асколі існує зростаюча підпослідовність номерів m_k, $k = 1, 2, \ldots$, така що послідовність $\overline{G}_{m_k}$ збігається рівномірно в $\overline{D}$ при $k \to \infty$ до деякого неперервного відображення $\overline{G} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ (див., напр., [8, теорема 20.4]). Нехай $G\colon = \overline{G}|_D$. За лемою 2.1 має місце альтернатива: або G – гомеоморфізм області D у $\mathbb{C}$, або G – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. Доведемо, що другий випадок неможливий. Скористаємося підходом, застосованим при доведенні другої частини теореми 21.9 в [8]. Припустимо супротивне: нехай $G_{m_k}(x) \to c = const$ при $k \to \infty$. Оскільки $G_{m_k}(z_0) = 0$ при всіх $k = 1, 2, \ldots$, маємо: $c = 0$. З огляду на пункт **V** сім'я відображень G_m^{-1}, $m = 1, 2, \ldots$, є одностайно неперервною в $\mathbb{D}$. Тоді для довільної точки $z \in D$

$$h(z, G_{m_k}^{-1}(0)) = h(G_{m_k}^{-1}(G_{m_k}(z)), G_{m_k}^{-1}(0)) \to 0$$

при $k \to \infty$, що неможливо, бо z – довільна точка області D. Отримана суперечність вказує на те, що $G : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфізм.

VII. За доведеним у пункті **V** сім'я відображень $\{\overline{G}_m^{\,-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Отже, за критерієм Арцела-Асколі (див., напр., [8, теорема 20.4]) ми також можемо вважати, що послідовність $\overline{G}_{m_k}^{\,-1}(y)$, $k=1,2,\ldots$, збігається рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ до деякого неперервного відображення $\widetilde{F}:\overline{\mathbb{D}}\rightarrow\overline{D}$ при $k\rightarrow\infty$. Встановимо, що $\widetilde{F}=\overline{G}^{\,-1}$. Для цього покажемо, що $G(D)=\mathbb{D}$. Зафіксуємо $y\in\mathbb{D}$. Оскільки $G_{m_k}(D)=\mathbb{D}$ при всіх $k=1,2,\ldots$, ми маємо $G_{m_k}(x_k)=y$ при деякому $x_k\in D$. Оскільки область D обмежена, можна вважати, що $x_k\rightarrow x_0\in\overline{D}$ при $k\rightarrow\infty$. Далі, використовуючи нерівність трикутника і з огляду на одностайну неперервність $\{\overline{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ в $\overline{D}$ (пункт **IV**), будемо мати:

$$|\overline{G}(x_0)-y|$$
$$=|\overline{G}(x_0)-\overline{G}_{m_k}(x_k)|\leqslant|\overline{G}(x_0)-\overline{G}_{m_k}(x_0)|+|\overline{G}_{m_k}(x_0)-\overline{G}_{m_k}(x_k)|\rightarrow 0$$

при $k\rightarrow\infty$. Звідси $\overline{G}(x_0)=y$. Зауважимо, що $x_0\in D$, оскільки G – гомеоморфізм. В силу довільності точки $y\in\mathbb{D}$ рівність $G(D)=\mathbb{D}$ доведено. В такому випадку, $G_{m_k}^{-1}\rightarrow G^{-1}$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$ при $k\rightarrow\infty$ (див., напр., [10, лема 3.1]). Таким чином, $\widetilde{F}(y)=G^{-1}(y)$ при всіх $y\in\mathbb{D}$. Нарешті, оскільки відображення $\widetilde{F}$ має неперервне продовження на межу області $\mathbb{D}$, то в силу єдиності границі в межових точках маємо також $\widetilde{F}(y)=\overline{G}^{\,-1}(y)$ при всіх $y\in\overline{\mathbb{D}}$. Отже, ми довели, що $\overline{G}_{m_k}^{\,-1}\rightarrow\overline{G}^{\,-1}$ рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ при $k\rightarrow\infty$.

VIII. За пунктом **VII,** для $y=e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}$ при $k\rightarrow\infty$ будемо мати:

$$\operatorname{Re}F_{m_k}(e^{i\theta})=\varphi(\overline{G}_{m_k}^{\,-1}(e^{i\theta}))\rightarrow\varphi(\overline{G}^{\,-1}(e^{i\theta}))\tag{5.5}$$

рівномірно по $\theta\in[0,2\pi)$. Оскільки за побудовою $\operatorname{Im}F_{m_k}(0)=0$ при всіх $k=1,2,\ldots$, за формулою Шварца (див., напр., [28, § 8, гл. III, частина 3]) аналітична функція F_{m_k} однозначно відновлюється по своїй дійсній частині, а саме,

$$F_{m_k}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(0,1)}\varphi(\overline{G}_{m_k}^{\,-1}(t))\frac{t+y}{t-y}\cdot\frac{dt}{t}\,.\tag{5.6}$$

Покладемо

$$F(y):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(0,1)}\varphi(\overline{G}^{\,-1}(t))\frac{t+y}{t-y}\cdot\frac{dt}{t}\,.\tag{5.7}$$

Нехай $K\subset\mathbb{D}$ – довільний компакт. З огляду на співвідношення (5.6) і (5.7) ми отримаємо, що для $y\in K$

$$|F_{m_k}(y)-F(y)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S(0,1)}|\varphi(\overline{G}_{m_k}^{\,-1}(t))-\varphi(\overline{G}^{\,-1}(t))|\left|\frac{t+y}{t-y}\right||dt|\,.\tag{5.8}$$

Оскільки K – компакт, знайдеться $0 < R_0 = R_0(K) < 0$ таке, що $K \subset B(0, R_0)$. Тоді за нерівністю трикутника $|t+y| \leqslant 1+R_0$ і $|t-y| \geqslant |t| - |y| \geqslant 1 - R_0$ для всіх $y \in K$ і всіх $t \in \mathbb{S}^1$. Тоді

$$\left|\frac{t+y}{t-y}\right| \leqslant \frac{1+R_0}{1-R_0} := M = M(K)\,. \tag{5.9}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З огляду на умову (5.5) для числа $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{M}$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ такий, що

$$|\varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(t)) - \varphi(\overline{G}^{\,-1}(t))| < \varepsilon'$$

для всіх $k \geqslant N(\varepsilon)$. Тоді з (5.8) і (5.9) випливає, що

$$|F_{m_k}(y) - F(y)| < \varepsilon \quad \forall\, k \geqslant N\,. \tag{5.10}$$

З нерівності (5.10) випливає, що послідовність F_{m_k} збігається до функції F локально рівномірно в одиничному крузі. Зокрема, маємо: $\operatorname{Im} F(0) = 0$, тоді також $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$, де $f = F \circ G$. Зауважимо, що F є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$ (див. зауваження, зроблені в кінці параграфу 8 частини 3 у [28]), причому для $z = re^{i\psi}$

$$\operatorname{Re} F(re^{i\psi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\overline{G}^{\,-1}(e^{i\theta}))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}\,d\theta\,.$$

За [28, теорема 2, § 10, гл. III, частина 3]

$$\lim_{\zeta\to z} \operatorname{Re} F(\zeta) = \varphi(\overline{G}^{\,-1}(z)) \quad \forall\, z \in \partial\mathbb{D}\,. \tag{5.11}$$

Зауважимо, що функція F є або сталою, або відкрита і дискретна (див., напр., [25, гл. V, розд. I, пункт 6 і розд. II, пункт 5]). Отже, послідовність $f_{m_k} = F_{m_k} \circ G_{m_k}$ збігається локально рівномірно до функції $f = F \circ G$, яка є відкритою і дискретною, або сталою функцією, причому, з огляду на (5.11)

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} F(\overline{G}(z)) = \varphi(\overline{G}^{\,-1}(\overline{G}(z))) = \varphi(z) \quad \forall\, z \in \partial\mathbb{D}\,.$$

IX. Оскільки за доведеним у пункті **VI** відображення G є гомеоморфізмом, з огляду на [7, теорема 1] G є регулярним розв'язком рівняння (1.9) з деякою функцією $\mu : D \to \mathbb{D}$. Оскільки множина точок функції F, де її якобіан дорівнює нулю, може складатися тільки з ізольованих точок (див. [25, пункти 5 и 6 (II), гл. V]), у випадку $F \not\equiv const$ відображення f є регулярним. Залишилось довести, що $\mu \in \mathfrak{M}_M$. Якщо $f(z) = c = const$ в області D, то завдяки умові (1.10) це є можливим лише у випадку, коли $f_n(z) = c$ у D, а $\mu_n(z) = 0 \in M(z)$ при майже всіх $z \in D$. В цій ситуації також $\mu(z) = 0$ при майже всіх $z \in D$, зокрема, $\mu \in \mathfrak{M}_M$.

Нехай тепер $f(z) \neq const$. За доведеним вище відображення f є регулярним. Оскільки $f_n(z)$ збігається до $f(z)$ локально рівномірно в області D і, крім того, f має майже всюди відмінний від нуля якобіан, то за [7, лема 1] $\mu(z) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M_0(z)$ для майже всіх $z \in D$, де $\operatorname{inv}\operatorname{co} A$ позначає інваріантно опуклу оболонку множини $A \subset \mathbb{C}$ (див., напр., [29]), а $M_0(z)$ позначає множину точок скупчення послідовності $\mu_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, існує множина $D_0 \subset D$ така, що $\mu_n(z) \in M(z)$ і $\mu(z) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M_0(z)$ при всіх $z \in D_0$ і всіх $n \in \mathbb{N}$, де $m(D \setminus D_0) = 0$. Зафіксуємо $z_0 \in D_0$. Нехай $w_0 \in M_0(z_0)$. Тоді існує підпослідовність номерів n_k, $k = 1, 2, \ldots$, для якої $\mu_{n_k}(z_0)$ є збіжною при $k \to \infty$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k}(z_0) = w_0$. Оскільки за припущенням $\mu_{n_k}(z_0) \in M(z_0)$ при всіх $k = 1, 2, \ldots$, крім того, множина $M(z_0)$ є замкненою, то $w_0 \in M(z_0)$. Отже,

$$M_0(z_0) \subset M(z_0)\,. \tag{5.12}$$

Зі співвідношення (5.12) випливає, що

$$\operatorname{inv}\operatorname{co} M_0(z_0) \subset M(z_0)\,, \tag{5.13}$$

оскільки множинна $M(z_0)$ припускалася інваріантно опуклою. Отже,

$$\mu(z_0) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M_0(z_0) \subset M(z_0)$$

при майже всіх $z_0 \in D$, що і потрібно було довести. □

Для фіксованої функції $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$, $Q(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus D$, точки $z_0 \in D$ і неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ позначимо через $\mathfrak{F}_{\varphi,Q,z_0}(D)$ клас усіх регулярних розв'язків $f : D \to \mathbb{C}$ задачі Діріхле (1.9)–(1.10), які задовольняють умову $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$ таких, що $K_{\mu_f}(z) \leqslant Q(z)$ для майже всіх $z \in D$. Наступне твердження також можна розглядати як узагальнення [5, теорема 2] на випадок однозв'язних жорданових областей.

Наслідок 5.1. *Нехай D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$, і нехай функція φ у (1.10) неперервна. Припустимо, що функція Q є інтегровною в D і задовольняє принаймні одну з умов: або $Q \in FMO(\overline{D})$, або для кожного $z_0 \in \overline{D}$ існує $\delta_0 = \delta(z_0) > 0$ таке, що виконано умову (1.11), де $q_{z_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(z_0 + te^{i\theta})\, d\theta$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\varphi,Q,z_0}(D)$ є компактною в D.*

Доведення. Дійсно, в силу рівності $K_{\mu_f}(z) = \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$ умова $K_{\mu_f}(z) \leqslant Q(z)$ еквівалентна умові $|\mu_f(z)| \leqslant \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}$. Тоді $\mu_f(z) \in \overline{B\left(0, \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}\right)}$, причому множини $M(z) := \overline{B\left(0, \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}\right)}$ є замкненими і інваріантно опуклими. В такому випадку, бажане твердження випливає з теореми 1.2. □

Література

[1] Гутлянский, В.Я., Рязанов В.И. (2011). *Геометрическая и топологическая теория функций и отображений.* Наукова Думка, Киев.

[2] Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami equation. A geometric approach.* Developments in Mathematics, 26. Springer, New York.

[3] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I. (2013). *Infinitesimal Geometry of Spatial Mappings*, Akademperiodyka, Kiev.

[4] Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *Ukr. Math. Bull., 12*(1), 27–66; transl. in (2015). *J. Math. Sci., 210*(1), 22–51.

[5] Дыбов, Ю.П. (2009). Компактность классов решений задачи Дирихле для уравнений Бельтрами. *Труды ИПММ НАН Украины, 19*, 81–89.

[6] Dybov, Yu.P. (2010). On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *Complex Variables and Elliptic Equations, 55*(12), 1099–1116.

[7] Ломако, Т. (2011). К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа. *Укр. мат. журнал, 63*(9), 1227–1240; transl. in *Ukrainian Mathematical Journal, 63*(9), 1400–1414.

[8] Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math., 229, Springer–Verlag, Berlin etc.

[9] Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2006). Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel Math. J., 153*, 247–266.

[10] Ryazanov, V., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2013). On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms. *Siberian Advances in Mathematics, 23*(4), 263–293.

[11] Gehring, F.W., Martio, O. (1985). Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. d'Anal. Math., 24*, 181–206.

[12] Севостьянов, Е.А. (2013). О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой. *Математические труды, 15*(1), 178–204; transl. in *Siberian Advances in Mathematics, 23*(2), 106–122.

[13] Lomako, T., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2010). On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations. *Ann. Univ. Bucharest (math. series), V. LIX*(2), 261–271.

[14] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Science + Business Media, New York LLC.

[15] Голузин, Г.М. (1966). *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука, ФИЗМАТГИЗ, М.

[16] Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2008). On convergence theory for Beltrami equations. *Ukr. Math. Bull., 5*(4), 517–528.

[17] Hencl, S., Koskela, P. (2006). Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism. *Arch. Ration. Mech. and Anal., 180*(1), 75–95.

[18] Пономарёв, С.П. (1995). N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина. *Матем. заметки, 58*, 411–418.

[19] Maly, J., Martio, O. (1995). Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$. *J. Reine Angew. Math., 458*, 19–36.

[20] Федерер, Г. (1987). *Геометрическая теория меры.* Наука, М.

[21] Альфорс, Л. (1969). *Лекции по квазиконформным отображениям.* Мир, Москва.

[22] Решетняк, Ю.Г. (1982). *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Наука, Новосибирск.

[23] Lehto, O., Virtanen, K. (1973). *Quasiconformal Mappings in the Plane.* Springer, New York etc.

[24] Севостьянов, Є.О., Скворцов, С.О., Довгопятий, О.П. (2020). Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького. *Укр. мат. вісник, 17*(3), 414–436.

[25] Стоилов, С. (1964). *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций.* Наука, М.

[26] Севостьянов, Е.А., Аналог теоремы Монтеля для отображений класса Соболева с конечным искажением. *Укр. матем. журнал, 67*(6), 829–837; transl. in *Ukrainian Mathematical Journal, 67*(6), 938–947.

[27] Ковтонюк, Д.А., Петков, И.В., Рязанов, В.И, Салимов, Р.Р. (2013). Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами, *Алгебра и анализ, 25*(4), 101–124; transl. in *St. Petersburg Math. J., 25*(4), 587–603.

[28] Гурвиц, А., Курант, Р. (1968). *Теория функций.* Наука, М.

[29] Рязанов, В.И. (1990). О точности некоторых теорем сходимости. *Доклады АН СССР, 315*(2), 317–319.

Відомості про авторів

Євген Олександрович Севостьянов

Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com

Олександр Петрович Довгопятий

Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна
E-Mail: Alexdov1111111@gmail.com