Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 3, 389 – 405
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-3-6

Апроксимаційні характеристики класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$

Світлана Б. Гембарська, Оксана В. Федуник-Яремчук

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників, а також близьких до них апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$.

2010 MSC. 42B99.

Ключові слова та фрази. Класи типу Нікольського–Бєсова, періодичні функції однієї та багатьох змінних, ортопоперечник, східчаста гіперболічна сума Фур'є.

1. Вступ

У роботі продовжуються дослідження апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних (позначення $B^{\omega}_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ відповідно) у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_1 - норма. Як зазначалося у роботах [1–7], мотивацією дослідження апроксимаційних характеристик (найкращі наближення, поперечники, найкращі n-членні наближення та ін.) класів $B^{r}_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторах $B_{q,1}, q \in \{1, \infty\}$, була та обставина, що питання про їхні порядки, особливо у багатовимірному випадку, у просторах L_1 і L_∞ досі залишаються відкритими (див. [8]).

Перш ніж перейти до формулювання одержаних результатів, введемо необхідні позначення, дамо означення функціональних класів і апроксимаційних характеристик, які будуть досліджуватися.

Нехай $\mathbb{R}^d$– d-вимірний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Стаття надійшла в редакцію 02.07.2021

Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0, 2\pi)$, позначимо простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій f, для яких

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d}|f(x)| < \infty.$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_p(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0,\ j = \overline{1, d},$$

і множину таких функцій позначимо $L_p^0(\pi_d)$.

Крім цього для зручності замість $L_p(\pi_d)$ будемо вживати позначення L_p і відповідно L_p^0 замість $L_p^0(\pi_d)$.

Означимо l-ту різницю функції $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, з кроком h_j за змінною x_j згідно з формулою

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l}(-1)^{l-n}\, C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + n\, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, $h = (h_1, \ldots, h_d)$ і $t \in \mathbb{R}_+^d$ введемо мішану l-ту різницю

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \ldots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\ldots(\Delta_{h_1}^l\, f(x)))$$

і означимо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j|\le t_j\\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1t_1, \ldots, m_dt_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0, \quad j = \overline{1, d}$.

Наслідуючи С. Н. Бернштейна [9], будемо називати функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[a, b]$, якщо існує стала $C_1 > 0\,(C_2 > 0)$, яка не залежить від τ_1, τ_2, така, що

$$\varphi(\tau_1) \leq C_1\, \varphi(\tau_2), \quad a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b,$$

у випадку майже зростання, і відповідно

$$\varphi(\tau_1) \geq C_2\, \varphi(\tau_2), \quad a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b,$$

у випадку майже спадання.

Будемо вважати, що функція $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^d$, задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [10, 11]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$.

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, $l \in \mathbb{N}$.

У випадку $d > 1$ будемо говорити, що $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^d$, задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Тепер дамо означення функціональних класів $B_{p,\theta}^\Omega$ ($B_{p,\theta}^\omega$ в одновимірному випадку), які було розглянуто у роботі Sun Yongsheng, Wang Heping [12].

Нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і функція $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S^α) і (S_l). Тоді класи $B_{p,\theta}^\Omega$ визначаються таким чином

$$B_{p,\theta}^\Omega = \{f \in L_p^0 : \ \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+^d} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)}.$$

Зауважимо, що в тому випадку, коли $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, і $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^d t_j^{r_j}$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з аналогами класів Бєсова $B_{p,\theta}^r$, які розглядалися у роботах [13,14]. Крім того, при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ є аналогами класів С. М. Нікольського [15].

Класи $B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_p$ розглядалися у роботі М. М. Пустовойтова [16].

У подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в дещо іншому вигляді. Для цього нагадаємо поняття порядкового співвідношення.

Для двох невід'ємних послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує стала $C_3 > 0$, яка не залежить від n і така, що $a_n \le C_3\, b_n$. Співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$.

Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину вигляду

$$\rho(s) = \{k \in \mathbb{Z}^d \,:\, 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\}$$

і для $f \in L^0_p$, $1 < p < \infty$, покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Отже, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta},\ 1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, де $\Omega(t)$ задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S^{α}) і (S_l) справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

тут і далі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d}),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ в (1.1) було розглянуто у роботі [17], а $\theta = \infty$ – у роботі [16].

Для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати зображення аналогічні (1.1) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f)$.

Позначимо через $V_m(u),\ m \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos ku + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos ku.$$

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

і для $f \in L_p^0,\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f,x) = (f * A_s)(x),$$

де "$*$" – операція згортки.

Тоді справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Зазначимо, що в (1.2) випадок $1 \le \theta < \infty$ було розглянуто у роботі [17], а випадок $\theta = \infty$ – у роботі [16].

У подальших дослідженнях ми будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (відповідно $B^{\omega}_{p,\theta}$ при $d = 1$), які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду, а саме

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \tag{1.3}$$

де $\omega(\tau)$ – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^α) і (S_l). Зрозуміло, що для $\Omega(t)$ вигляду (1.3) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l , а також умови (S^α) і (S_l) і тому справедливими є наведені вище зображення (1.1), (1.2) для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Тепер дамо означення норми у підпросторах $B_{1,1}$. Для тригонометричних поліномів t вона означається згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{1,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}^d\cup\{0\}} \|A_s(t)\|_1.$$

Аналогічним чином означається норма $\|f\|_{B_{1,1}}$ для функцій $f \in L_1$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d\cup\{0\}} \|A_s(f)\|_1$. При цьому зазначимо справедливість співвідношення

$$\|\cdot\|_1 \ll \|\cdot\|_{B_{1,1}}. \tag{1.4}$$

Далі означимо апроксимаційні характеристики, які будемо досліджувати.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована у просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $i = \overline{1,M}$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду

$\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проєкцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^{M}$. Тут і надалі

$$(f,u_i) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} f(x)\overline{u}_i(x)dx,$$

де $\overline{u}_i(x)$ – функції комплексно-спряжені до функцій $u_i(x)$. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$, то величина

$$d_M^{\perp}(F,L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^{M}\subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f\in F} \|f - \sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i\|_q \qquad (1.5)$$

називається ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу F у просторі $L_q(\pi_d)$. Поперечник $d_M^{\perp}(F,L_q)$ введений В. М. Темляковим [18]. Крім того в [19] В. М. Темляковим розглянута близька до Фур'є-поперечника величина $d_M^{B}(F,L_q)$, яка означається наступним чином

$$d_M^{B}(F,L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap\mathcal{D}(G)} \|f - Gf\|_q, \qquad (1.6)$$

де $L_M(B)_q$ позначає множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1,\dots,k_d)$ виконана нерівність

$$\|Ge^{i(k,\cdot)}\|_2 \leq B.$$

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, що визначається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \leq 1$ для всіх l. Легко бачити, що згідно з означеннями справедливе співвідношення

$$d_M^{B}(F,L_q) \leq d_M^{\perp}(F,L_q). \qquad (1.7)$$

Зрозуміло, що таке ж співвідношення виконується і у випадку простору $B_{1,1}$, тобто

$$d_M^{B}(F,B_{1,1}) \leq d_M^{\perp}(F,B_{1,1}). \qquad (1.8)$$

Величини (1.5) і (1.6) для різноманітних функціональних класів F, як у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, так і в інших функціональних просторах досліджувалися у роботах [20–33]. З більш детальною бібліографією можна ознайомитися у монографіях [8, 19, 34, 35]. У деяких випадках при встановленні оцінок знизу величин $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ ($d^B_M(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ при $d=1$) будемо використовувати оцінки колмогоровських поперечників цих класів і тому нагадаємо означення цієї апроксимаційної характеристики.

Нехай $\mathscr{X}$ – нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{L}_M(\mathscr{X})$ – сукупність підпросторів у просторі $\mathscr{X}$ розмірності, що не перевищує M і W – центрально-симетрична множина в $\mathscr{X}$.

Величина

$$d_M(W, \mathscr{X}) = \inf_{L_M \in \mathscr{L}_M(\mathscr{X})} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w - u\|_{\mathscr{X}}$$

називається колмогоровським M – поперечником множини W у просторі $\mathscr{X}$.

Поперечник $d_M(W, \mathscr{X})$ увів у 1936 р. А. М. Колмогоров [36]. Зазначимо також справедливість співвідношень

$$d_M(F, \mathscr{X}) \le d^B_M(F, \mathscr{X}) \le d^{\perp}_M(F, \mathscr{X}), \tag{1.9}$$

де $\mathscr{X} = L_q(\pi_d),\ 1 \le q \le \infty$, або $\mathscr{X} = B_{1,1}$.

Перед тим, як перейти безпосередньо до викладу одержаних результатів, наведемо відоме твердження, яке нами буде використовуватися.

Теорема 1.1. [4] *Нехай* $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедлива оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n})\, n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

2. Апроксимаційні характеристики класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$

У цій частині роботи одержимо точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ і $d^B_M(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$.

Справедливе твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* $d = 1,\ 1 < p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$d^{\perp}_M(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp d^B_M(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \omega(M^{-1}). \tag{2.1}$$

Доведення. Згідно зі співвідношенням (1.8) для доведення (2.1) достатньо встановити оцінку зверху для ортопоперечника $d_M^{\perp}(B^{\omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$, $1 < p < \infty$, і відповідно оцінку знизу – для величини $d_M^{B}(B^{\omega}_{\infty,\theta}, B_{1,1})$. Більш того, оскільки $B^{\omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\omega}_{p,\theta} \subset H^{\omega}_{p}$, $1 < p < \infty, 1 \le \theta < \infty$, то оцінку зверху достатньо одержати для ортопоперечника $d_M^{\perp}(H^{\omega}_{p}, B_{1,1})$, $1 < p < \infty$.

Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$ і $f \in H^{\omega}_{p}$, $1 < p < \infty$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів $t_n(f)$ вигляду

$$t_n(f) := \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f),$$

де число $n \in \mathbb{N}$ пов'язане з M співвідношенням $2^{n-1} \le M \le 2^n$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$, беручи до уваги властивість згортки, отримуємо

$$\|f - t_n(f)\|_{B_{1,1}} = \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f) \Big\|_{B_{1,1}}$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} \Big\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \Big\|_1 \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \Big\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \Big\|_p$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s\|_1 \Big\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \Big\|_p = I_1. \tag{2.2}$$

Для продовження оцінки величини I_1 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_1 \le C_4$ (див., наприклад, [34], гл. 1, §1) маємо

$$\|A_s\|_1 = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \le \|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1 \le C_5. \tag{2.3}$$

Крім того, взявши до уваги, що

$$\|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \omega(2^{-s'}),\ s' \in \mathbb{N},$$

можемо записати

$$\Big\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \Big\|_p \le \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \sum_{s'=s-1}^{s+1} \omega(2^{-s'}) \ll \omega(2^{-s}). \tag{2.4}$$

Отже, з (2.2) із врахуванням (2.3), (2.4) випливає

$$I_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} \omega(2^{-s}). \tag{2.5}$$

Далі зауваживши, що

$$\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \le C_6 \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \ \ C_6 > 0,$$

продовжимо оцінку величини I_1 :

$$I_1 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-\alpha s} \ll \omega(2^{-n}).$$

Насамкінець, врахувавши співвідношення між числами M і n, приходимо до оцінок

$$d_M^B(B_{p,\theta}^{\omega}, B_{1,1}) \le d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega}, B_{1,1}) \ll \omega(M^{-1}).$$

Стосовно оцінки знизу величини $d_M^B(B_{p,\theta}^{\omega}, B_{1,1})$ зауважимо, що вона випливає з теореми 1.1 при $d = 1$ згідно зі співвідношенням (1.9).

Теорему 2.1 доведено. □

Підсумовуючи результат теореми 2.1 зазначимо, що при цьому залишився не розглянутий випадок $p = 1$, де вдалося встановити тільки порядок величини $d_M^B(B_{1,\theta}^{\omega}, B_{1,1})$.

Теорема 2.2. *Нехай $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\omega}, B_{1,1}) \asymp \omega(M^{-1}). \tag{2.6}$$

Доведення. Оскільки виконане вкладення $B_{1,\theta}^{\omega} \subset H_1^{\omega}$, $1 \le \theta < \infty$, то оцінку зверху достатньо довести для класів H_1^{ω}. Розглянемо наближення функцій $f \in H_1^{\omega}$ тригонометричним поліномом вигляду

$$\widetilde{t}_n(f) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f),$$

де числа $n \in \mathbb{N}$ і M пов'язані співвідношенням $2^n \le M \le 2^{n+1}$. Вище зазначалося, що оператор G, який співставляє функції f поліном $\widetilde{t}_n(f)$ належить $L_M(1)_2$.

Отже, згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ і наступною оцінкою $\|A_s(f)\|_1 \ll \omega(2^{-s})$, $f \in H_1^{\omega}$, можемо записати

$$
\begin{aligned}
\|f-\widetilde{t}_n(f)\|_{B_{1,1}} &= \Big\|\sum_{s=n}^{\infty}A_s(f)\Big\|_{B_{1,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}}\Big\|A_s*\sum_{s'=n}^{\infty}A_{s'}(f)\Big\|_1\\
\le \sum_{s=n-1}^{\infty}\Big\|A_s*\sum_{s'=s-1}^{s+1}A_{s'}(f)\Big\|_1 &\le \sum_{s=n-1}^{\infty}\|A_s\|_1\Big\|\sum_{s'=s-1}^{s+1}A_{s'}(f)\Big\|_1\\
&\ll \sum_{s=n-1}^{\infty}\sum_{s'=s-1}^{s+1}\|A_{s'}(f)\|_1 \ll \sum_{s=n-2}^{\infty}\|A_s(f)\|_1\\
&\ll \sum_{s=n-2}^{\infty}\omega(2^{-s}) \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{s=n-2}^{\infty}2^{-\alpha s} \ll \omega(2^{-n}).
\end{aligned}
$$

Тепер врахувавши співвідношення $2^n \le M \le 2^{n+1}$ одержуємо

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\omega}, B_{1,1}) \ll \omega(M^{-1}).$$

Відповідна оцінка знизу в (2.6) випливає з теореми 1.1 при $d = 1$.

Теорему 2.2 доведено. □

В коментарі до результатів теорем 2.1, 2.2 звернемо увагу на дві обставини, властиві одновимірному випадку, і які полягають у такому:

а) одержані оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик не залежать від параметра θ;

б) порівнявши результати теорем 2.1, 2.2 з оцінками відповідних величин у просторі L_1 [17] виявляємо, що вони однакові за порядком.

У наступній частині роботи переконаємося, що в багатовимірному випадку ($d \ge 2$) ситуація є іншою.

3. Апроксимаційні характеристики класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ у просторі $B_{1,1}$

Справедливе твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $d \ge 2$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі порядкові оцінки*

$$d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, B_{1,1}) \asymp d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.1)$$

Доведення. Згідно зі співвідношенням (1.8) для доведення (3.1) достатньо встановити оцінку зверху для ортопоперечника $d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ при $1 < p < \infty$ і відповідну оцінку знизу для величини $d_M^{B}(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$.

Отже, покажемо спочатку, що оцінка зверху ортопоперечника $d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ реалізується за наближення функцій $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх східчастими гіперболічними сумами Фур'є

$$S_{Q_n}(f) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f),$$

за умови $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ можемо записати

$$\Big\| f - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f) \Big\|_{B_{1,1}} = \Big\| \sum_{(s,1)\geq n} \delta_s(f) \Big\|_{B_{1,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_s * \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ (s',1)\geq n}} \delta_{s'}(f) \Big\|_1$$

$$\leq \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_s * \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ (s',1)\geq n}} \delta_{s'}(f) \Big\|_p \leq \sum_{(s,1)\geq n-d} \Big\| A_s * \sum_{\|s-s'\|_\infty \leq 1} \delta_{s'}(f) \Big\|_p$$

$$\leq \sum_{(s,1)\geq n-d} \|A_s\|_1 \Big\| \sum_{\|s-s'\|_\infty \leq 1} \delta_{s'}(f) \Big\|_p$$

$$\ll \sum_{(s,1)\geq n-d} \sum_{\|s-s'\|_\infty \leq 1} \|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \sum_{(s,1)\geq n-2d} \|\delta_s(f)\|_p$$

$$= \sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \, \|\delta_s(f)\|_p \, \omega(2^{-(s,1)}) = I_2. \tag{3.2}$$

Для продовження оцінки величини I_2 розглянемо кілька випадків, в залежності від значень параметра θ.

Нехай $\theta \in (1, \infty)$. Тоді скориставшись нерівністю Гельдера будемо мати

$$I_2 \leq \Big(\sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \Big)^{1/\theta'}$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \Big(\sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \Big)^{1/\theta'} \leq \Big(\sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) \Big)^{1/\theta'} = I_3. \tag{3.3}$$

Позначимо $n - 2d = m$. Тоді врахувавши, що

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \leq C_7 \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}, \ C_7 > 0, \ (s,1) \geq m, \tag{3.4}$$

продовжимо оцінку величини I_3 :

$$I_3 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}\left(\sum_{(s,1)\geq m} 2^{-(s,1)\alpha\theta'}\right)^{1/\theta'} = \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}\left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\alpha\,\theta'} \sum_{(s,1)=j} 1\right)^{1/\theta'}$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}\left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\,\alpha\,\theta'} j^{\,d-1}\right)^{1/\theta'} = \omega(2^{-m}) m^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.5)$$

При $\theta = 1$ продовження оцінки величини I_2 набуде вигляду:

$$I_2 \leq \sup_{s:(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \sum_{(s,1)\geq m} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p$$

$$\ll \omega(2^{-m}) \|f\|_{B^{\Omega}_{p,1}} \ll \omega(2^{-m}). \qquad (3.6)$$

У випадку $\theta = \infty$ для величини I_2 можна записати

$$I_2 \leq \sup_{s:(s,1)\geq m} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)})$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \sum_{(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)}) \ll \sum_{(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)}) = I_4. \qquad (3.7)$$

Далі взявши до уваги (3.4), продовжимо оцінку I_4:

$$I_4 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{(s,1)\geq m} 2^{-\alpha(s,1)} \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}\left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\alpha} \sum_{(s,1)=j} 1\right)$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{j\geq m} 2^{-j\alpha} j^{\,d-1} \asymp \omega(2^{-m}) m^{d-1}. \qquad (3.8)$$

Співставивши (3.2)–(3.8), одержимо шукану оцінку зверху ортопоперечника $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ для $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$, а значить і $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, B_{1,1})$.

Стосовно оцінки знизу величини $d^{B}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$ зауважимо, що вона є наслідком теореми 1.1 згідно зі співвідношенням (1.9).

Теорему 3.1 доведено. □

У наступному твердженні одержимо порядок величини $d^{B}_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, B_{1,1})$.

Теорема 3.2. *Нехай* $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедлива оцінка*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\Omega}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{3.9}$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і розглянемо для $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ поліном наближення вигляду

$$\bar{t}_n(f) = \sum_{(s,1)<n} A_s(f).$$

Як зазначалося вище, оператор G, який ставить у відповідність функції $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ поліном такого вигляду, належить $L_M(1)_2$. Крім цього у роботі [4] для $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ було одержано таку оцінку:

$$\|f - \bar{t}_n(f)\|_{B_{1,1}} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Отже, скориставшись цією оцінкою і взявши до уваги співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, можемо записати

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\Omega}, B_{1,1}) \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінка знизу в (3.9) є наслідком теореми 1.1.

Теорему 3.2 доведено. □

Прокоментуємо результати, одержані в теоремах 3.1, 3.2.

Спочатку, як наслідок теореми 3.1, сформулюємо твердження стосовно наближення функцій f із класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ у просторі $B_{1,1}$ їх східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$, які були означені вище.

Для функціонального класу $B_{p,\theta}^{\Omega} \subset B_{1,1}$ позначимо

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{1,1}} = \sup_{f \in B_{p,\theta}^{\Omega}} \|f - S_{Q_n}(f)\|_{B_{1,1}}.$$

Наслідок 3.1. *Нехай* $d \geq 2$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді справедлива оцінка*

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{1,1}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{3.10}$$

Зауважимо, що оцінка зверху в (3.10) встановлена при доведенні теореми 3.1, а відповідна оцінка знизу отримується як наслідок теореми 1.1.

Далі для того, щоб відмітити особливість багатовимірного випадку у порівнянні з одновимірним, а також із наближенням у просторі L_1, наведемо відповідні твердження.

Теорема 3.3. [17] *Нехай* $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливі оцінки*

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_1) \asymp d_M^{B}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_1) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$, $p^* = \min\{2, p\}$.

Теорема 3.4. [17] *Нехай* $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_1 \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Таким чином, співставивши результати теореми 3.1 і наслідку 3.1 з теоремами 3.3, 3.4 спостерігаємо, що порядки відповідних характеристик у просторах $B_{1,1}$ і L_1 є різними. У цьому, зокрема, є особливість багатовимірного випадку у порівнянні з одновимірним. Крім того, у багатовимірному випадку одержані результати залежать від параметра θ.

Зауваження 3.1. *На завершення роботи зазначимо, що у випадку* $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, *(тобто для класів Нікольського–Бесова* $B_{p,\theta}^{r}$*) відповідні твердження були отримані в роботі* [37].

Література

[1] Романюк, А.С. (2016). Энтропийные числа и поперечники классов $B_{p,\theta}^{r}$ периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 68*(10), 1403–1417.

[2] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Укр. мат. журн., 71*(2), 271–282.

[3] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 71*(8), 1102–1115.

[4] Гембарський, М.В., Гембарська, С.Б. (2018). Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$. *Укр. мат. вісн., 15*(1), 43–57.

[5] Hembarskyi, M.V., Hembarska, S.B., Solich, K.V. (2019). Найкращі наближення і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Матем. студії, 51*(1), 74–85.

[6] Hembarskyi, M.V., Hembarska, S.B. (2019). Aproximate characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ periodic functions of one variable and many ones. *Ukr. Mat. Bull., 16*(1), 88–104; transl. in (2019). *J. Math. Sci., 242*(6), 820–832.

[7] Fedunyk-Yaremchuk, O.V., Hembars'kyi, M.V., Hembars'ka, S.B. (2020). Approximative characteristics of the Nikol'skii–Besov-type classes of periodic functions in the space $B_{\infty,1}$. *Carpathian Math. Publ., 12*(2), 376–391.

[8] Dũng, D., Temlyakov, V.N., Ullrich, T. (2018). *Hyperbolic cross approximation.* Birkhäuser.

[9] Бернштейн, С.Н. (1954). *Собрание сочинений. т. II. Конструктивная теория функций (1931–1953).* М., Изд. АН СССР.

[10] Стечкин, С.Б. (1951). О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Изв. АН СССР. Сер. мат., 15*, 219–242.

[11] Бари, Н.К., Стечкин, С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва, 5*, 483–522.

[12] Yongsheng, S., Heping, W. (1997). Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Тр. Мат. ин-та РАН, 219*, 356–377.

[13] Аманов, Т.И. (1965). Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\,\pi;\ j = 1, \ldots, n)$. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 77*, 5–34.

[14] Лизоркин, П.И., Никольский, С.М. (1989).Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 187*, 143–161.

[15] Никольский, С.М. (1963). Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера. *Сиб. мат. журн., 4*(6), 1342–1364.

[16] Пустовойтов, Н.Н. (1994). Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности. *Anal. Math., 20*, 35–48.

[17] Стасюк, С.А., Федуник, О.В. (2006). Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 58*(5), 692–704.

[18] Темляков, В.Н. (1982). Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. *Докл. АН СССР, 267*(2), 314–317.

[19] Темляков, В.Н. (1986). Приближение функций с ограниченной смешанной производной. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 178*, 1–112.

[20] Зунг, Д. (1986). Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами. *Мат. сб., 131(173)*(2), 251–271.

[21] Галеев, Э.М. (1988). Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных. *Мат. заметки, 43*(2), 197–211.

[22] Темляков, В.Н. (1989). Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 189*, 138–168.

[23] Галеев, Э.М. (1990). Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами. *Мат. заметки, 47*(3), 32–41.

[24] Андрианов, А.В., Темляков, В.Н. (1997). О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение. *Тр. Мат. ин-та РАН, 219*, 32–43.

[25] Романюк, А.С. (2001). Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I. *Укр. мат. журн., 53*(9), 1224–1231.

[26] Романюк, А.С. (2001). Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II. *Укр. мат. журн., 53*(10), 1402–1408.

[27] Пустовойтов, Н.Н. (2008). Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители. *Anal. Math., 34*(3), 187–224.

[28] Акишев, Г.А. (2009). Об ортопоперечниках классов Никольского и Бесова в пространствах Лоренца. *Изв. вузов. Матем., 2*, 25–33.

[29] Романюк, А.С. (2011). Поперечники и наилучшие приближения классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Anal. Math., 37*, 181–213.

[30] Базарханов, Д.Б. (2010). Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля периодических функций многих переменных. *Мат. заметки, 87*(2), 305–308.

[31] Базарханов, Д.Б. (2012). Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II. *Anal. Math., 38*(4), 249–289.

[32] Балгимбаева, Ш.А., Смирнов, Т.И. (2018). Оценки поперечников Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой модуля гладкости. *Сиб. мат. журн., 59*(2), 277–292.

[33] Fedunyk-Yaremchuk, O.V., Hembars'ka, S.B. (2019). Estimates of approximative characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables with given majorant of mixed moduli of continuity in the space L_q. *Carpathian Math. Publ., 11*(2), 281–295.

[34] Temlyakov, V.N. (1993). *Approximation of periodic function.* New York, Nova Sc.Publ., Inc.

[35] Романюк, А.С. (2012). Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. *Пр. Ін-ту математики НАН України, 93*, 352 с.

[36] Kolmogoroff, A. (1936). Über die beste Annäherung von Fukctionen einer gegebenen Funktionenklasse. *Ann. of math., 37*, 107–111.

[37] Романюк, А.С., Янченко, С.Я. (2021). *Оцінки апроксимаційних характеристик і властивості операторів найкращого наближення класів періодичних функцій у просторі $B_{1,1}$. Укр. мат. журн., 73*(8), 1102–1119.

Відомості про авторів

Світлана Борисівна Гембарська — Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: `gembarskaya72@gmail.com`

Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук — Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: `fedunyk.o.v@gmail.com`