Український математичний вісник
Том 18 **(2021)**, № 4, 505 – 517
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-4-4

Порядок комонотонного наближення диференційовних періодичних функцій

Герман Дзюбенко, Людмила Ющенко

(*Представлена О.А. Довгошиєм*)

Анотація. Нехай $\Delta^{(1)}(Y)$ є множиною всіх неперервних на дійсній осі $\mathbb{R}$ 2π-періодичних функцій f, що змінюють монотонність в різних фіксованих точках $y_i \in [-\pi,\pi)$, $i = 1,...,2s$, $s \in \mathbb{N}$ (тобто, на $\mathbb{R}$ є множина $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ точок $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ таких, що на $[y_i, y_{i-1}]$ f не спадають, якщо i непарне, і не зростають, якщо i парне). В роботі побудовано функцію $f_Y = f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ таку, що

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{n\, E_n^{(1)}(f)}{\omega_4(f', \pi/n)} = \infty,$$

де $E_n^{(1)}(f)$ – величина найкращого рівномірного наближення функції $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ тригонометричними поліномами порядку $n \in \mathbb{N}$, які теж є з множини $\Delta^{(1)}(Y)$, а $\omega_4(f', \cdot)$ – модуль гладкості четвертого порядку функції f'. Отже, при певній сталій c, нерівність $E_n^{(1)}(f) \le \frac{c}{n}\omega_3(f', \pi/n)$ є найкращою за порядком модуля гладкості.

2010 MSC. 41A10, 41A17, 41A25, 41A29.

Ключові слова та фрази. Комонотонне наближення тригонометричними поліномами, рівномірні оцінки, контрприклад.

1. Вступ

Нехай C – простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $C^{(r)} := \{f : \ f^{(r)} \in C\}$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів $t_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ степеня $\le n$ (порядку $\le 2n+1$), $n \in \mathbb{N}$, з $a_j, b_j \in \mathbb{R}$,

$$E_n(f) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n} \|f - t_n\|$$

– величина найкращого рівномірного наближення функції $f \in C$ і $\omega_k(f, \cdot)$ – модуль її гладкості k-го порядку.

Стаття надійшла в редакцію 20.08.2021

Відомо, що з оцінки Джексона (для $k = 1$), Зігмунда ($k = 2$), Ахієзєра ($k = 2$) і Стєчкіна ($k \geq 3$), див. детальніше, наприклад, Дзядик [1, с. 204–f212],

$$E_n(f) \leq c(k)\,\omega_k\left(f, \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $c(k)$ – стала, яка залежить тільки від k, випливає нерівність: *якщо* $f \in C^{(r)}$ *то*

$$E_n(f) \leq \frac{c(r,k)}{n^r}\,\omega_k\left(f^{(r)}, \pi/n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де $c(r,k)$ – стала, яка залежить тільки від r і k.

В роботах [2] і [3, 4] містяться комонотонні аналоги нерівностей (1) і (2) – оцінки (3) і (4), (5), відповідно. А саме. Нехай на $[-\pi, \pi)$ є $2s,\ s \in \mathbb{N}$, фіксованих точок y_i :

$$-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,$$

а для решти індексів $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...$). Позначимо $Y := Y_s := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Нехай $\Delta^{(1)}(Y)$ – множина усіх функцій $f \in C$, що не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т.д. (функції з $\Delta^{(1)}(Y)$ називаються *комонотонними* одна до одної, або між собою), і нехай

$$E_n^{(1)}(f) := \inf_{p_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - p_n\|$$

– величина найкращого комонотонного наближення функції f поліномами $p_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$. Зауважимо, що якщо f диференційовна, то $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)\Pi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2} \qquad (\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)).$$

Отже (див. [2–4]), *якщо* $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leq c(s)\,\omega_2\left(f, \pi/n\right), \quad n \geq N(Y), \tag{3}$$

якщо $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \leq \frac{c(s)}{n}\,\omega_3\left(f', \pi/n\right), \quad n \geq N(Y), \tag{4}$$

і якщо $f \in C^{(2)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{c(s,k)}{n^2}\,\omega_k\left(f'',\pi/n\right), \quad n \ge N(Y,k), \tag{5}$$

а тому

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{c(s,k,r)}{n^r}\,\omega_k\left(f^{(r)},\pi/n\right), \quad f \in C^{(r)},\ r \ge 2,$$

де $N(Y)$ *і* $N(Y,k)$ *– сталі, які залежать тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ *і* k, *а* $c(s)$, $c(s,k)$ *і* $c(s,k,r)$ *– сталі, які залежать тільки від* s, k *і* r, *відповідно.*

Крім того, Плєшаков [5, с. 64–83] (див. також [6]), скориставшись міркуваннями статей Швєдова [7,8] і ДеВора, Левіатана, Шевчука [9], *при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *побудував функцію* $g_n(x) = g_n(x,Y,k) \in \Delta^{(1)}(Y)$ *таку, що для неї*

$$E_n^{(1)}(g_n) \ge C(Y,k)\, n^{\frac{k}{2}-1}\omega_k\left(g_n,\pi/n\right), \quad k \in \mathbb{N},\ k \ge 3, \tag{6}$$

де $C(Y,k)$ *– стала, яка залежить тільки від* Y *і* k (іншими словами, при кожному $n \in \mathbb{N}$ ним знайдено функцію з $\Delta^{(1)}(Y)$, для якої нерівність (3) хибна з ω_k, $k > 2$), а в роботі [10] побудовано одну таку функцію (для всіх $n \in \mathbb{N}$), тобто *для кожного натурального* $k \ge 3$ *в множині* $\Delta^{(1)}(Y)$ *знайдено функцію* $g(x) := g(x,Y,k)$ *таку, що*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{E_n^{(1)}(g)}{\omega_k\left(g,\pi/n\right)} = \infty, \quad k \ge 3. \tag{7}$$

Іншими словами, нерівність (3) є непокращуваною за порядком модуля гладкості (навідміну від нерівності (1) наближення без обмежень, яка справджується при всіх k).

В цій статті ми доводимо аналогічне твердження для нерівності (4), а саме, доводимо теорему 1.

Теорема 1. *Для будь-якої множини* Y *знайдеться функція* $f_Y = f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ *така, що*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{n\,E_n^{(1)}(f)}{\omega_4(f',\pi/n)} = \infty. \tag{8}$$

В нашій нещодавній спільній з Волошиною статті [11] з коопуклого наближення, теорему 1 доведено як наслідок відповідної теореми для копозитивного наближення. В цій статті ми вважаємо за доцільне навести трохи інше (зокрема, з використанням ядра Джексона) і більш детальне доведення теореми 1 оскільки випадок комонотонного наближення є центральним випадком всієї теорії формозберігаючого наближення (саме зі збереження монотонності при наближенні ця теорія і почалась).

На завершення вступу зауважимо, що з (3)–(5) і нерівності Уітні [12] $\|f-f(0)\| \le k\omega_k(f,k\pi),\ k\in\mathbb{N},\ (f(0)\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y))$, випливають оцінки: *якщо* $f\in\Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \le C(Y)\,\omega_2\left(f,\pi/n\right), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

якщо $f\in C^{(1)}\cap\Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{C(Y)}{n}\,\omega_3\left(f',\pi/n\right), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

і якщо $f\in C^{(2)}\cap\Delta^{(1)}(Y)$, *то*

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{C(Y,k)}{n^2}\,\omega_k\left(f'',\pi/n\right), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

а отже

$$E_n^{(1)}(f) \le \frac{C(Y,k,r)}{n^r}\,\omega_k\left(f^{(r)},\pi/n\right), \quad f\in C^{(r)},\ r\ge 2,$$

де $C(Y)$, $C(Y,k)$ *і* $C(Y,k,r)$ *– сталі, які залежать тільки від* $\min\limits_{i=1,\dots,2s}\{y_i-y_{i+1}\}$, k *і* r, *відповідно.*

Також, ми вважаємо, що сталі $N(Y)$, $N(Y,k)$ в (3)–(5) і $C(Y)$, $C(k,Y)$ в (9)–(11) неможливо замінити сталими, які не залежать від Y (а залежать, скажімо, від s) однак ці припущення ми не доводимо.

Результати з комонотонного наближення алгебраїчними многочленами та сплайнами наведено, зокрема, в оглядовій роботі [13].

2. Доведення теореми 1

1°. Спочатку, в зручному для нас вигляді і з мінорними змінами, наведемо деякі факти з [5, с. 64–83] (див. також [6]).

Зважаючи на періодичність без втрати загальності будемо вважати, що 0 належить набору $Y=\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, тобто $y_{i_*}=0$ при деякому $i_*\in\mathbb{Z}$. Нехай

$$\Pi_*(x) := \prod_{i=1,i\ne i_*}^{2s} \sin\frac{x-y_i}{2}.$$

Для визначеності нехай i_* непарне (тоді $\Pi_*(0) > 0$). Позначимо $2d := \min\{|y_{i_*} - y_{i_*-1}|, |y_{i_*} - y_{i_*+1}|\}$, замітимо, $d \le \pi/2$ і $\Pi_*(x) > 0$, $x \in (-2d, 2d)$. Покладемо

$$M := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad m := \min_{x\in[-d,d]} \Pi_*(x), \quad M_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|.$$

Оберемо (в залежності від Y) найменше натуральне N, що задовольняє нерівність

$$m \sin^3 \frac{d}{8} \ge \frac{5}{N}(M + M_1), \tag{12}$$

тому, принаймні, $d > 60/N$. Для означення функції f з теореми 1 буде використано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4. \tag{13}$$

Нагадаємо (див., наприклад, [1, с. 127],) деякі його властивості:

а) $J_N(t)$ є парним невід'ємним поліномом з $\mathbb{T}_{2N-2}$;

б)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_N(t)dt = 1; \tag{14}$$

в) для будь-якої неперервно диференційовної періодичної f в кожній точці x має місце нерівність

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(x)) J_N(t-x)dt \right| \le \frac{5}{N} \|f'\|. \tag{15}$$

Оберемо $\nu \in \mathbb{N}$ з умови

$$\left(\frac{1}{2} d < \right) \quad d^* := \frac{\pi}{N} + \nu \frac{2\pi}{N} \le d < \frac{\pi}{N} + (\nu+1)\frac{2\pi}{N}.$$

Позначимо

$$\widetilde{M} := \frac{1}{\pi}\|J_N\|, \quad \widetilde{m} := \frac{1}{\pi} \min_{t\in[-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t-d^*) = \frac{1}{\pi} \min_{t\in[-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t+d^*),$$

і зауважимо, що $\widetilde{m} > 0$ (завдяки першому доданку в d^*). Насамкінець, покладемо

$$\overline{M} := 6 + 9\pi^4 \frac{M\widetilde{M}}{m\widetilde{m}}.$$

Надалі припускаємо, що число b задовольняє нерівність

$$0 < b < \frac{\pi}{4N\overline{M}},$$

щоб $J_N(x) > 0,\ x \in [-2\overline{M}b, 2\overline{M}b]$.

2°. Для кожного (такого) b позначимо дві функції

$$Q_r(x) := Q_r(x,b) = \frac{1}{\pi}\int_0^x S_b(t)\Pi_*(t)J_n(t-d^*)dt,$$

$$Q_l(x) := Q_l(x,b) = \frac{1}{\pi}\int_0^x S_b(t)\Pi_*(t)J_n(t+d^*)dt,$$

де

$$S_b(x) := \sin\frac{t-b}{2}\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t+b}{2},$$

і зауважимо, що

$$Q_r(2\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_b(d^*)\Pi_*(d^*)J_n(t-d^*)dt \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(S_b(t)\Pi_*(t) - S_b(d^*)\Pi_*(d^*)\Big)J_n(t-d^*)dt.$$

Крім того, $d/8 < (d^*-b)/2$, оскільки $30/N < d/2 < d^*$. Тому згідно (14), (15) і (12),

$$Q_r(2\pi) \geq S_b(d^*)\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\big(S_b(\cdot)\Pi_*(\cdot)\big)'\right\| \\ \geq m\,\sin^3\frac{d}{8} - \frac{5}{N}(M+M_1) \geq 0.$$

Аналогічно, $Q_l(2\pi) \leq 0$. Тому можна визначити $\alpha_b \in [0,1]$ з умови

$$\alpha_b Q_r(2\pi) + (1-\alpha_b)Q_l(2\pi) = 0. \tag{16}$$

Покладемо

$$Q(x) := Q(x,b) = \alpha_b Q_r(x) + (1-\alpha_b)Q_l(x).$$

Рівність (16) свідчить про те, що $Q \in \mathbb{T}_{2N+s-1}$.

Зауважимо, що для будь-якого b існує число b_0 таке, що

$$b < b_0 < \overline{M}b, \tag{17}$$

$$Q(b_0) = 0. \tag{18}$$

Дійсно, з одного боку $Q(b) < 0$ і справджується нерівність

$$|Q(b)| \leq M\widetilde{M}\left|\int_0^b S_b(t)dt\right| = \frac{16}{3}M\widetilde{M}\sin^2\frac{b}{4}\left(\sin^2\frac{b}{4} + \sin^2\frac{b}{2}\right) \\ \leq \frac{5M\widetilde{M}}{48}b^4,$$

а з іншого боку, при $\overline{M}b < \frac{\pi}{2N}$,

$$\begin{aligned}Q(\overline{M}b)-Q(b)&=\frac{1}{\pi}\int_b^{\overline{M}b} S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt\\
&\geq m\widetilde{m}\int_b^{\overline{M}b} S_b(t)dt = 4m\widetilde{m}\sin\frac{(\overline{M}+1)b}{2}\sin\frac{(\overline{M}-1)b}{2}\\
&\times\left(\frac{1}{3}\sin^2\frac{\overline{M}b}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\frac{(\overline{M}+1)b}{4}+\frac{1}{3}\sin^2\frac{(\overline{M}-1)b}{4}+\frac{4}{3}\sin^2\frac{b}{2}\right)\\
&\geq \frac{2m\widetilde{m}}{\pi^4}(\overline{M}-1)^4b^4,\end{aligned}$$

і тому

$$Q(\overline{M}b)=Q(\overline{M}b)-Q(b)+Q(b)\geq\frac{2m\widetilde{m}}{\pi^4}(\overline{M}-1)^4b^4-\frac{5M\widetilde{M}}{48}b^4>0.$$

3°. При кожному b через $K_{r,b}(x)$ і $K_{l,b}(x)$ позначимо дві 2π-періодичні функції такі, що

$$K_{r,b},\,K_{l,b}\in C^{(4)};\qquad 0\leq K_{r,b}(x)\leq 1,\qquad 0\leq K_{l,b}(x)\leq 1,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$K_{r,b}(x):=\begin{cases}0,\;x\in\left[-b_0,b_0+\dfrac{\overline{M}b}{2}\right],\\ 1,\;x\in[-\pi,-b_0-b]\cup[b_0+\overline{M}b,\pi],\end{cases}$$

$$K_{l,b}(x):=\begin{cases}0,\;x\in\left[-b_0-\dfrac{\overline{M}b}{2},b_0\right],\\ 1,\;x\in[-\pi,=b_0-\overline{M}b]\cup[b_0+b,\pi].\end{cases}$$

Наприклад, для $x\in\left[\overline{a},\overline{b}\right]:=\left[b_0+\frac{\overline{M}b}{2},b_0+\overline{M}b\right]$, можна взяти

$$K_{r,b}(x)=\int_{\overline{a}}^{x}(u-\overline{a})^4(\overline{b}-u)^4du\Big/\int_{\overline{a}}^{\overline{b}}(u-\overline{a})^4(\overline{b}-u)^4du,\qquad(19)$$

і взяти $K_{r,b}(x)=K_{r,b}(-x)$, для $x\in[-b_0-b,-b_0]$ коли $\left[\overline{a},\overline{b}\right]:=[b_0,b_0+b]$ у (19). Для $K_{l,b}(x)$ аналогічно.

Доведемо нерівність

$$I_1:=\int_{-\pi}^{\pi}K_{l,b}(t)S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_bJ_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt>0.$$

Для цього, в наслідок (16)–(18), достатньо довести, що

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-b_0-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b_0}S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_bJ_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt\right|\\
&\qquad>\int_{b_0}^{b_0+b}S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_bJ_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt.\end{aligned}$$

Якщо $-b_0 - \frac{\overline{M}b}{2} \le t \le -b_0$, то

$$|\Pi_*(t)| \ge m, \quad \frac{1}{\pi} J_N(t-d^*) \ge \widetilde{m}, \quad \frac{1}{\pi} J_N(t+d^*) \ge \widetilde{m},$$

тобто

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-b_0-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b_0} S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt \right| \\
&> \pi m\widetilde{m} \left| \int_{-b_0-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b_0} S_b(t)dt \right| = 4\pi m\widetilde{m} \sin\frac{\overline{M}b}{4} \sin\frac{\overline{M}b+4b_0}{4} \\
&\times \left(\sin^2\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\frac{b_0}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\frac{\overline{M}b+2b_0}{4} + \frac{1}{3}\sin^2\frac{\overline{M}b+4b_0}{8} + \frac{1}{3}\sin^2\frac{\overline{M}b}{8} \right) \\
&> \frac{m\widetilde{m}\overline{M}^4}{24\pi^3} b^4.
\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
\int_{b_0}^{b_0+b} & S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt \\
&< bM\pi\widetilde{M}S_b(b_0+b) < \pi M\widetilde{M}\frac{(\overline{M}+2)^3}{8} b^4.
\end{aligned}$$

З вибору $\overline{M}$ маємо $m\widetilde{m}\overline{M}^4/24\pi^3 > \pi M\widetilde{M}(\overline{M}+2)^3/8$. Аналогічно,

$$I_2 := \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,b}(t)S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt < 0.$$

Тому оберемо $\beta_b \in (0,1)$ з умови $\beta_b I_1 + (1-\beta_b)I_2 = 0$ і покладемо

$$K_b(x) := \beta_b K_{r,b}(x) + (1-\beta_b)K_{l,b}(x).$$

Отже, при кожному b, $K_b(x)$ є 2π-періодична 4 рази неперервно диференційовна функція така, що

$$K_b(x) := \begin{cases} 0, \; x \in [-b_0, b_0]\,, \\ 1, \; x \in [-\pi, -b_0 - \overline{M}b] \cup [b_0 + \overline{M}b, \pi], \end{cases} \quad 0 \le K_b(x) \le 1, \; x \in \mathbb{R};$$

$$\int_0^{2\pi} K_b(t)S_b(t)\Pi_*(t)\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt = 0. \quad (20)$$

4°. Згідно (16)–(20), функції

$$q_b(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^x K_b(t)S_b(t)\,\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

$$Q_b(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^x S_b(t)\,\frac{\Pi_*(t)}{M}\Big(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\Big)dt,$$

є 2π-періодичні і такі, що

$$q_b(x) = 0, \quad x \in [-b, b_0], \tag{21}$$

$$q_b \in C^{(5)} \cap \Delta^{(1)}(Y), \tag{22}$$

$$\|q_b\| \le 1, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\|q_b - Q_b\| = \|q_b - Q_b\|_{[-b_0-\overline{M}b, b_0+\overline{M}b]} &\le M\widetilde{M}2(b_0+\overline{M}b)S_b(b_0+\overline{M}b)\\ &< 4M\widetilde{M}\overline{M}^4 b^4 =: c_1 b^4,\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\omega_4(q_b', t) &\le \omega_4(q_b' - Q_b', t) + \omega_4(Q_b', t) \le 2^4\|q_b' - Q_b'\| + t^4\left\|Q_b^{(5)}\right\|\\ &= 2^4\|q_b' - Q_b'\|_{[-b_0-\overline{M}b, b_0+\overline{M}b]} + t^4\left\|Q_b^{(5)}\right\|\\ &\le 2^4 c_1 b^3 + t^4 L =: c(b^3 + t^4),\end{aligned} \tag{25}$$

де стала L не залежить від b.

Наведемо наслідок з теореми І.І. Прівалова (див. [14, с. 96–98]): *для довільного полінома $R_n \in \mathbb{T}_n$ і будь-якого додатнього $h \le \pi$ справджується нерівність*

$$h^2|R_n''(0)| \le An^2\|R_n\|_{[-h,h]},$$

де стала $A > 1$ ($A \approx 4\pi^2$). Тоді візьмемо довільний поліном $\tau_n \in \Delta^{(1)}(Y)$ порядку $n > 2N + s - 1$, покладемо $R_n(x) := \tau_n(x) - Q_b(x)$ і помітимо, що $\tau_n''(0) \ge 0$, $J_N'(\pm d^*) = 0$, $S_b(0) = 0$ а отже

$$\begin{aligned}R_n''(0) = \tau_n''(0) - Q_b''(0) \ge -Q_b''(0) &= \frac{\Pi_*(0)}{\pi M}J_N(\pm d^*)\sin^2\frac{b}{2}\\ &\ge \frac{m\widetilde{m}}{\pi^2 M}b^2 =: c_2 b^2.\end{aligned}$$

Тому,

$$\begin{aligned}h^2 c_2 b^2 \le h^2 R_n''(0) \le An^2\|R_n\|_{[-h,h]} &\le An^2\left(\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} + \|q_b - Q_b\|\right)\\ &\le An^2\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} + An^2 c_1 b^4,\end{aligned}$$

звідки,

$$\|\tau_n - q_b\|_{[-h,h]} \ge \frac{c_2\,h^2}{A\,n^2}b^2 - c_1 b^4. \tag{26}$$

5°. Позначимо

$$b_n := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{27}$$

і оберемо N_0 таким, що $N_0 > 2N + s-$ і $b_{N_0} < \frac{\pi}{4N\overline{M}}$. При всіх $n > N_0$ покладемо

$$f_n(x) = q_{b_n}(x),$$

і з (25) помітимо, що

$$\omega_4(f_n', t) \le 2ct^4, \quad t \ge 1/n. \tag{28}$$

Тепер можемо (для довільного Y) означити $f_Y =: f$ з теореми 1. Спочатку візьмемо $\epsilon = \frac{1}{10}$ і оберемо $n_0 \ge N_0$ настільки великим, щоб

$$2c < n_0^\epsilon \tag{29}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_0} < 1. \tag{30}$$

Покладемо $\gamma_0 := 1$ і

$$\gamma_j := \frac{c_2}{2^4 A} \frac{b_{n_{j-1}}^2 b_{n_j}^2}{n_j^2} \gamma_{j-1} = \frac{b_{n_0}^2}{b_{n_j}^2} \prod_{\nu=1}^{j} \frac{c_2 b_{n_\nu}^4}{2^4 A n_\nu^2}, \quad j \ge 1, \tag{31}$$

де зростаюча послідовність $\{n_\nu\}$ визначається за індукцією наступним чином. Припустимо, що числа $\{n_0, ..., n_{\sigma-1}\}$ вже визначені, тоді покладемо

$$F_{\sigma-1}(x) := \sum_{j=1}^{\sigma-1} \gamma_{j-1} f_{n_j}(x), \quad (F_0(x) :\equiv 0),$$

і оберемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ настільки великим, щоб

$$\left\| F_{\sigma-1}^{(5)} \right\| \le \gamma_{\sigma-1} n_\sigma^\epsilon, \tag{32}$$

і

$$\frac{c_2}{A} b_{n_{\sigma-1}}^2 \ge \frac{8}{7} c_1 \frac{1}{n_\sigma^\epsilon}. \tag{33}$$

Позначимо

$$\Phi_\sigma(x) := \sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} f_{n_j}(x),$$

і зауважимо, що рівномірна збіжність цього ряду забезпечується співвідношенням (23) і нерівністю

$$\sum_{j=\sigma}^{\infty} \gamma_{j-1} \leq \gamma_{\sigma-1}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+...\right) < 2\gamma_{\sigma-1}, \tag{34}$$

яка випливає з (31), (30) і (27). Покладемо

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{j-1} f_{n_j}(x) \quad \Big(= F_{\sigma-1}(x) + \Phi_\sigma(x)\Big), \tag{35}$$

і з (22) помітимо, що

$$f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y). \tag{36}$$

Залишилось перевірити (8).

Оцінка

$$\omega_4\left(\Phi'_\sigma, 1/n_\sigma\right) \leq 2c\frac{1}{n_\sigma^4}\sum_{j=\sigma}^{\infty}\gamma_{j-1} < 4c\gamma_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^4} < 2\gamma_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}}$$

випливає з (28), (34) і (29), а оцінка

$$\omega_4\left(F'_{\sigma-1}, 1/n_\sigma\right) \leq \frac{1}{n_\sigma^4}\left\|F_{\sigma-1}^{(5)}\right\| \leq \gamma_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}}$$

– з (32). Тому для всіх σ

$$\omega_4\left(f', 1/n_\sigma\right) \leq 3\gamma_{\sigma-1}\frac{1}{n_\sigma^{4-\epsilon}}. \tag{37}$$

Насамкінець, оцінимо знизу $E_{n_\sigma}^{(1)}(f)$. Оскільки, згідно (21), $F_{\sigma-1}(x) = 0$ на $[-b_{n_{\sigma-1}}, b_{n_{\sigma-1}}] := I_{\sigma-1}$, то

$$f(x) = \gamma_{\sigma-1} f_{n_\sigma}(x) + \Phi_{\sigma+1}(x), \quad x \in I_{\sigma-1}.$$

Нехай

$$p_{n_\sigma} := \frac{1}{\gamma_{\sigma-1}}\tau_{n_\sigma},$$

тобто, p_{n_σ} – якийсь поліном з $\mathbb{T}_{2n_\sigma+s-1} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, тоді за (26)

$$\|p_{n_\sigma} - f_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} \geq \frac{c_2 b_{n_{\sigma-1}}^2}{A n_\sigma^2} b_{n_\sigma^2} - c_1 b_{n_\sigma}^4.$$

З іншого боку, співвідношення (23), (34) і (31) тягнуть оцінку

$$\|\Phi_{\sigma+1}\| \le \sum_{j=\sigma+1}^{\infty} \gamma_{j-1} < 2\gamma_\sigma = \frac{c_2}{8A}\gamma_{\sigma-1}\frac{b_{n_{\sigma-1}}^2 b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^2}.$$

Тому, з урахуванням (33), запишемо

$$\begin{aligned}\|f-\tau_{n_\sigma}\| &\ge \|\tau_{n_\sigma}-f\|_{I_{\sigma-1}} \ge \|\tau_{n_\sigma}-\gamma_{\sigma-1}f_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} - \|\Phi_{\sigma+1}\| \\ &= \gamma_{\sigma-1}\|p_{n_\sigma}-f_{n_\sigma}\|_{I_{\sigma-1}} - \|\Phi_{\sigma+1}\| \\ &\ge \gamma_{\sigma-1}\left(\frac{7c_2 b_{n_{\sigma-1}}^2 b_{n_\sigma}^2}{8An_\sigma^2} - c_1 b_{n_\sigma}^4\right) \\ &\ge c_1\gamma_{\sigma-1}\left(\frac{b_{n_\sigma}^2}{n_\sigma^{2+\epsilon}} - b_{n_\sigma}^4\right),\end{aligned}$$

де (див. (27)) $b_n = n^{-4/3}$, тобто, іншими словами

$$E_{n_\sigma}^{(1)}(f) \ge c_1\gamma_{\sigma-1}\left(\left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^{14/3+\epsilon} - \left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^{16/3}\right).$$

Разом з (37) це тягне нерівність

$$\frac{n_\sigma E_{n_\sigma}^{(1)}(f)}{\omega_4(f,1/n_\sigma)} \ge \frac{c_1}{3}\left(n_\sigma^{1/3-2\epsilon}-1\right)$$

для всіх σ, тобто (8) вірно, оскільки $\epsilon = 1/10$. Теорему 1 доведено. □

Література

[1] Дзядык, В.К. (1977). *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., Наука.

[2] Дзюбенко, Г.А., Плешаков, М.Г. (2008). Комонотонное приближение периодических функций. *Мат. заметки, 83*(2), 199–209.

[3] Дзюбенко, Г.А. (2009). Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій. *Укр. матем. журн., 61*(4), 435–451.

[4] Дзюбенко, Г.А. (2013). Порядки комонотонного наближення періодичних функцій. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України "Теорія функцій та суміжні питання", 10*(1), 110–125.

[5] Плешаков, М.Г. (1997). *Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева.* Дисс. ... к.ф.-м.н. Саратов, СГУ.

[6] Плешаков, М.Г., Тышкевич, С.В. (2014). Один отрицательный пример формосохраняющего приближения. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 14*(2), 144–150.

[7] Шведов, А.С. (1980). Комонотонное приближений функций многочленами. *ДАН СССР, 250*(1), 39–42.

[8] Шведов, А.С. (1981). Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами. *Мат. заметки, 29*(1), 117–130, 156.

[9] DeVore, R.A., Leviatan, D., Shevchuk, I.A. (1997). Approximation of monotone functions: A counter example. *Proceedings Curves and surfaces with applications in CAGD (Chamonix-Mont-Blanc, 1996).* Nashville, TN. Vanderbilt Univ. Press, 95–102.

[10] Дзюбенко. Г.А. (2008). Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 5*(1), 113–123.

[11] Dzyubenko, G., Voloshyna, V., Yushchenko, L. (2021). Negative results in coconvex approximation of periodic functions. *J. Approx. Theory, 267*, 105582.

[12] Whitney, H. (1957). On Functions with Bouded n-th Differences. *J. Math. Pures Appl., 6*(9), 67–95.

[13] Kopotun, K.A., Leviatan, D., Prymak, A., Shevchuk, I.A. (2011). Uniform and pointwise shape preserving approximation by algebraic polynomials. *Surveys in Approximation Theory, 6*, 24–74.

[14] Привалов, А.А. (1990). *Теория интерполирования функций. кн. 1.* Саратов, Изд-во Сарат. у-та.

Відомості про авторів

Герман Дзюбенко Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: dzyuben@gmail.com

Людмила Ющенко University of Toulon, La Garde, France
E-Mail: lyudmyla.yushchenko@univ-tln.fr