Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 1, 121 – 134
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2022-19-1-8

Оцінки узагальнених внутрішніх радіусів для поліциліндричних областей

Андрій Л. Таргонський

(Представлена О.А. Довгошиєм)

Анотація. У роботі розглядається оцінка зверху функціоналу складеного із добутку внутрішніх радіусів областей для простору розмірності більшої 2.

2010 MSC. 30C70, 30C75.

Ключові слова та фрази. Внутрішній радіус області, квадратичний диференціал, кусково-поділяюче перетворення, функція Гріна, променева система точок, логарифмічна ємність, варіаційна формула.

1. Вступ

Ця стаття належить до теорії екстремальних задач на класах попарно-неперетинних областей, що є окремим напрямком у геометричній теорії функцій комплексної змінної. Початок цієї тематики пов'язують із статтею М.А. Лаврентьєва [1]. Він знайшов максимум функціоналу, складеного з добутку конформних радіусів двох неперетинних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. Відзначимо, що він застосував цей результат до деяких проблеми аеродинаміки. У 1947 році Г.М. Голузін розв'язав подібну задачу для трьох фіксованих точок комплексної площини [2]. Після цього ця тематика почала стрімко розвиватися. У зв'язку з цим ми можемо згадати результати багатьох авторів, зокрема Ю.Є. Аленіцина, М.А. Лебедєва, Дж. Дженкінса, П.М. Тамразова, П.П. Куфарева, та інших. Використовуючи ідею П.М. Тамразова, Г.П. Бахтіна вперше розв'язала проблему з так званими "вільними полюсами" на одиничному колі (див., наприклад, [3]).

Стаття надійшла в редакцію 20.06.2020

Автор вдячний проф. О.К. Бахтіну за постанову задачі та плідне обговорення.

Важливим кроком для розробки цієї тематики стали статті В.М. Дубініна. Він запропонував новий метод – кусково-поділяюче перетворення, за допомогою якого він розв'язав ряд екстремальних задач для будь-яких багатозв'язних областей (див., наприклад, [4–6]). Зараз ці результати використовуються при дослідженнях у голоморфній динаміці.

В останнє десятиліття з'явився метод "керуючих функціоналів", розроблений О.К. Бахтіним. За допомогою нього ним було розв'язано низку екстремальних проблем для так званих "променевих систем точок" (див., наприклад, [4, 10–23]). Саме цей метод і є основним у цій роботі.

2. Деякі теоретичні факти у просторі $\mathbb{C}$

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множина натуральних та дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{C}$ – площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Означення 2.1. *Для фіксованого числа $m \in \mathbb{N}$ будемо називати m-променевою системою точок*

$$A_m = \left\{a^{(k)}\right\}_{k=1}^{m},$$

систему для якої точки, що їй належать задовольняють наступному співвідношенню:

$$0 = \arg a^{(1)} < \arg a^{(2)} < ... < \arg a^{(m)} < 2\pi. \tag{2.1}$$

Означення 2.2. *Множину точок $\left\{\widetilde{a^{(k)}} = \frac{a^{(k)}}{|a^{(k)}|} : \ a^{(k)} \in \mathbb{C}, \ k = \overline{1, m}\right\}$ будемо називати проекцією m-променевої системи точок на одиничне коло.*

Для довільної m-променевої системи точок розглянемо кутові параметри:

$$\sigma_k = \frac{1}{\pi}\left(\arg a^{(k+1)} - \arg a^{(k)}\right), \ k = 1, 2, ..., m, \quad a^{(m+1)} := a^{(1)}.$$

Введемо також у розгляд наступний "керуючий функціонал" для довільної m-променевої системи точок $A^{(m)}$:

$$\mathrm{T}\left(A_m\right) = \prod_{k=1}^{m} \chi\left(\left|\frac{a^{(k)}}{a^{(k+1)}}\right|^{\frac{1}{2\sigma^{(k)}}}\right)|a^{(k)}|,$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$.

Нехай $\left\{B^{(k)}\right\}_{k=1}^{m}$ – довільний набір попарно неперетинних областей такий, що

$$a^{(k)} \in B^{(k)} \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.2}$$

Позначимо через $r(B; a)$ внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див. [4–6, 24]).

Нехай

$$g_B\,(z, a) = h_{B,a}(z) + \log \frac{1}{|z-a|}$$

узагальнена функція Гріна області B відносно точки $a \in B$. Якщо $a = \infty$, то

$$g_B\,(z, \infty) = h_{B,\infty}(z) + \log \frac{1}{|z|}.$$

Величина

$$r(B, a) := \exp\left(h_{B,a}(z)\right)$$

позначає внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (дивись [4–6, 19, 20, 24]).

Відмітимо, що основні результати по теорії квадратичних диференціалів можна знайти у роботі [25].

3. Деякі теоретичні факти в просторі $\mathbb{C}^n$

Насамперед зауважимо, що основні поняття, які розглянуті у цьому розділі наведені у роботах [7–9]. Але для повноти викладу матеріали, наведемо деякі з них.

Як відомо [26–28], простір $\mathbb{C}^n$ є лінійним векторним простором над полем комплексних чисел з ермітовим скалярним добутком

$$(\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \tag{3.1}$$

де $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$.

Означення 3.1. ([7–9]). *Бінарну операцію яка діє з $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ за правилом*

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W} = \{z_k w_k\}_{k=1}^{n}, \tag{3.2}$$

де $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$, будемо називати векторним добутком елементів $\mathbb{C}^n$.

Ця операція перетворює $\mathbb{C}^n$ в комутативну, асоціативну алгебру [28] з одиницею $\mathbf{1} = \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{n-\text{раз}} \in \mathbb{C}^n$.

Зворотніми, відносно так введеної операції добутку, є такі та тільки такі елементи $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ для яких $z_k \neq 0$ для всіх $k = \overline{1, n}$.

Зворотніми для таких елементів $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$ є елементи $\mathbb{Z}^{-1} = \{z_k^{-1}\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, так як $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathbb{Z} = 1$.

Означення 3.2. ([7–9]). *Множину Θ всіх елементів $a = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, у яких хоча б одна координата $a_k = 0$, будемо називати множиною незворотніх елементів $a \in \mathbb{C}^n$. Множина Θ є ідеалом у алгебрі $\mathbb{C}^n$. При $n = 1$ рівність* (3.2) *задає звичайну дію добутку комплексних чисел.*

Добре відомо (див. напр. [29, 30]), що операція добутку (3.2) дозволяє представити $\mathbb{C}^n$ як пряму суму n екземплярів алгебри комплексних чисел $\mathbb{C}$. Структура векторного простору $\mathbb{C}^n$ повністю співставляється із структурою алгебри $\mathbb{C}^n$.

Зараз наведемо декілька визначень, які перетворюють алгебру $\mathbb{C}^n$ в алгебру із властивостями аналогічними властивостям алгебри звичайних комплексних чисел.

В алгебрі комплексних чисел $\mathbb{C}$ важливу роль має поняття комплексно спряженого числа. Розглянемо аналогічний об'єкт в алгебрі $\mathbb{C}^n$.

Означення 3.3. ([7–9]). *Кажному елементу $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ поставимо у відповідність векторно – спряжений елемент $\overline{\mathbb{W}} = \{\overline{w}_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, де $\overline{w}_k$ позначає число комплексно спряжене w_k у звичайному розумінні. Так визначена відповідність задає автоморфізм $\mathbb{C}^n$, який залишає нерухомим підпростір $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. При $n = 1$ векторно – спряжене число співпадає з комплексно спряженим.*

В алгебрі $\mathbb{C}$ одним з найважливіших є поняття модуля комплексного числа. Наступне визначення дає аналог цього поняття в $\mathbb{C}^n$. Нехай $\mathbb{R}^n_+ = R_+ \times R_+ \times \ldots \times R_+$, $R_+ = [0, +\infty)$ (див. [27]).

Означення 3.4. ([7–9]). *Векторним модулем довільного елемента $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ будемо називати вектор $|\mathbb{Z}| := \{|z_k|\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n_+$.*

Операція перехода до векторного модуля визначає відображення $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}^n_+$. Це відображення у комплексному аналізі використовується, зокрема, для отримання зображення Реинхарта областей в $\mathbb{C}^n$ (див., напр. [27]). Важливо, що для довільного $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, справедлива рівність

$$\mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{Z}} = |\overline{\mathbb{Z}}|^2 = |\mathbb{Z}|^2. \tag{3.3}$$

При $n = 1$ векторний модуль співпадає із звичайним модулем комплексного числа, формула (3.3) співпадає з аналогічною формулою для комплексної площини $\mathbb{C}$, яка визначена з допомогою скалярного добутку (3.1).

Означення 3.5. ([7–9]). *Вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ будемо називати невід'ємним (строго додатнім) та будемо позначати $\mathbb{X} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} > \mathbb{O}$), якщо $x_k \geq 0$ для всіх $k = \overline{1,n}$ ($x_k > 0$ хоча б для одного $k = \overline{1,n}$), $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots 0)}_{n-раз}$.*

Означення 3.6. ([7–9]). *Будемо казати, що вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ більше або дорівнює (строго більше) вектора $\mathbb{Y} = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, якщо $\mathbb{X} - \mathbb{Y} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} - \mathbb{Y} > \mathbb{O}$).*

Ці визначення при $n = 1$ співпадають з відповідними визначеннями на дійсній прямій. При $n > 1$ ситуація істотно відрізняється від випадку $n = 1$, наприклад, вектор $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots 0)}_{n-\text{раз}}$ більше або дорівнює усіх векторів, всі координати яких недодатні та менше або дорівнює всіх векторів з $\mathbb{R}_+^n$. Інші вектори $\mathbb{R}^n$ у яких координати різних знаків з вектором $\mathbb{O}$ не можуть бути порівняні згідно наведених визначень.

Означення 3.7. ([7–9]). *Векторний простір $\mathbb{Y}$ будемо називати векторно нормированим, якщо кожному $y \in \mathbb{Y}$ співставляється невід'ємний вектор $\|y\| \in \mathbb{R}_+^n$, $n \in \mathbb{N}$, який задовольняє умовам:*

1) $\|y\| \geq \mathbb{O}$, причому $\|y\| = \mathbb{O} \iff y = 0_{\mathbb{Y}}$, ($0_{\mathbb{Y}}$ – нуль простору $\mathbb{Y}$);

2) $\|\gamma y\| = |\gamma| \|y\|$, $\forall y \in \mathbb{Y}$, $\forall \gamma \in \mathbb{C}$;

3) $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$.

Аналогично можно ввести поняття векторної метрики. Введене раніше поняття векторного модуля елемента $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$ задовольняє попередньому визначенню. Таким чином образом векторного модуля є векторна норма в алгебрі $\mathbb{C}^n$: $\| \cdot \| = | \cdot |$. Тоді відкритою одиничною кулею у алгебрі $\mathbb{C}^n$ є одиничний відкритий полікруг $\|z\| < 1$, ($1 = \underbrace{(1, 1, \ldots 1)}_{n-\text{раз}}$), а одиничною сферою – n – мірний тор – $\mathbb{T}^n = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n : \|Z\| = 1\}$. Важливо, що

а) $|Z_1 \cdot Z_2| = \|Z_1 \cdot Z_2\| = \|Z_1\| \|Z_2\| = |Z_1| |Z_2|$, $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^n$;

б) $|1| = \|1\| = 1$, $(1 = (1, 1, \ldots, 1))$.

При $n = 1$ рівності а) та б) співпадають з аналогічними рівностями на комплексній площині. Зауважимо, що для евклідової норми $\|\cdot\|_E$, яка визначена скалярним добутком (3.1) справедлива рівність

$$\|1\|_E = \sqrt{n}.$$

Означення 3.8. ([7–9]). *У подальшому вектор простору (алгебри) $\mathbb{C}^n$ будемо називати n – мірним комплексним числом. Таким чином, алгебра $\mathbb{C}^n$ буде називатися алгеброю n – мірних комплексних чисел.*

Означення 3.9. ([7–9]). *Векторним аргументом n – мірного комплексного числа $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \backslash \Theta$ є n – мірний дійсний вектор, який визначається формулою*

$$\arg \mathbb{A} = \{\arg a_k\}_{k=1}^n,$$

де $\arg a_k$ є головне значення аргументу, або те яке випливає з конкретного змісту задачі у якій фігурує n – мірне комплексне число $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^n$.

Нехай $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n = \{Rez_k + iImz_k\}_{k=1}^n = \{Rez_k\}_{k=1}^n + \{iImz_k\}_{k=1}^n \\ = \{Rez_k\}_{k=1}^n + i\{Imz_k\}_{k=1}^n = Re\mathbb{Z} + iIm\mathbb{Z} = X + iY \\ = \{x_k\}_{k=1}^n + i\{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

де $X = Re\mathbb{Z} = \{Rez_k\}_{k=1}^n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $Y = Im\mathbb{Z} = \{Imz_k\}_{k=1}^n = \{y_k\}_{k=1}^n$. Тобто $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$.

Використовуючи вищенаведені визначення, отримаємо ланцюг рівностей:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n = \{|z_k|e^{i\alpha_k}\}_{k=1}^n = \{|z_k|\}_{k=1}^n\{e^{i\alpha_k}\}_{k=1}^n \\ = |\mathbb{Z}|\left[\cos\arg\mathbb{Z} + i\sin\arg\mathbb{Z}\right] = |\mathbb{Z}|e^{i\arg\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

де

$$\cos\beta = \{\cos\beta_k\}_{k=1}^n, \quad \sin\beta = \{\sin\beta_k\}_{k=1}^n,$$

$$\exp i\beta = \{\exp i\beta_k\}_{k=1}^n, \quad \beta = \{\beta_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

Аналогичним чином визначимо відображення $\ln\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \Theta$

$$\ln\mathbb{Z} = \ln|\mathbb{Z}| + i\arg\mathbb{Z} = \{\ln|z_k| + i\arg z_k\}_{k=1}^n.$$

Для регулярної в областях $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ функції $F(z)$ комплексного змінного визначимо продовження цієї функції до голоморфного відображення області $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ по наступному правилу

$$\mathbb{F}(\mathbb{W}) = \{F(W_k)\}_{k=1}^n, \quad \mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{B}.$$

Згідно визначення $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C})}_{n-\text{раз}}$.

Розглянемо компактифікацію простору $\mathbb{C}^n$, (див., напр. [26–28]) $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n-\text{раз}}$.

Означення 3.10. ([7–9]). *Зрозуміло, що $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$. Нескінченними точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ є ті точки, у яких хоча б одна координата нескінченна. Множина всіх нескінченних точок має комплексну розмірність $n-1$.*

Топологія в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводиться як у декартовому добутку топологічних просторів. У цій топології $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (див. [26–28]).

Запишемо елементи $\mathbb{Z}$ з $\mathbb{C}^n$ у наступній формі

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|e^{i\alpha_1} \\ |z_2|e^{i\alpha_2} \\ \vdots \\ |z_n|e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} \\ \vdots \\ e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$$= |\mathbb{Z}| \left[\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \\ \vdots \\ \sin\alpha_n \end{pmatrix} \right] = |\mathbb{Z}| \left[\cos \mathrm{Arg}\, \mathbb{Z} + i \sin \mathrm{Arg}\, \mathbb{Z}\right]$$

$$= |\mathbb{Z}| e^{i \mathrm{Arg}\, \mathbb{Z}} = |\mathbb{Z}| \exp i \mathrm{Arg}\, \mathbb{Z},$$

де

$$\cos\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \cos\beta_2 \\ \vdots \\ \cos\beta_n \end{pmatrix}, \quad \sin\beta = \begin{pmatrix} \sin\beta_1 \\ \sin\beta_2 \\ \vdots \\ \sin\beta_n \end{pmatrix},$$

$$\exp i\beta = \begin{pmatrix} \exp i\beta_1 \\ \exp i\beta_2 \\ \vdots \\ \exp i\beta_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Означення 3.11. *Поліциндричною областю в* $\overline{\mathbb{C}^n}$ *будемо називати:*

$$\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n, \qquad B_q \subset \overline{\mathbb{C}}, q = 1, 2, .., n.$$

Області $B_q, q = 1, 2, .., n$, *будемо називати координатними областями.*

Означення 3.12. *Нехай* $\mathbb{A}_k = \{a_q^{(k)}\}_{q=1}^n$ *набір точок у просторі* $\mathbb{C}^n$ *з координатами* $a_q^{(k)}, q = 1, 2, ..., n$, *при фіксованому* $k = \overline{1, m}$. *Введемо у розгляд величину*

$$\Sigma_k = \frac{1}{\pi} \left(\arg \mathbb{A}_{k+1} - \arg \mathbb{A}_k \right), \; k = 1, 2, ..., m, \quad \mathbb{A}_{m+1} := \mathbb{A}_1.$$

Означення 3.13. *Для фіксованих натуральних чисел* m, n *будемо казати, що система точок* $\mathbb{A}_k = \left\{ a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)} \right\}, k = \overline{1, m}$, *належить класу* S^*, *якщо для кожного фіксованого* $q = \overline{1, n}$ *системи точок* $\left\{ a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, ..., a_q^{(m)} \right\}$, $n \geq 2$, *є* m*-променевими системами точок в просторі* $\mathbb{C}$, *що задовольняють умові* (2.1), *та*

$$|\mathbb{A}_k - \mathbb{A}_{k+1}| = 2 \sin \frac{\pi \Sigma_k}{2}, k = \overline{1, m}, \qquad \mathbb{A}_{m+1} := \mathbb{A}_1.$$

Означення 3.14. *Для фіксованих натуральних чисел* m, n *та точок* $\mathbb{A}_k = \left\{ a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)} \right\}, k = \overline{1, m}$, *узагальненим периметром будемо називати величину*

$$\mathbf{P}\left(\mathbb{A}_m\right) = \left(\prod_{k=1}^{m} \prod_{q=1}^{n} |a_q^{(k+1)} - a_q^{(k)}| \right)^{\frac{1}{n}}, \qquad a_q^{(m+1)} := a_q^{(1)}.$$

Означення 3.15. *Для фіксованих натуральних чисел* m, n *та точок* $\mathbb{A}_k = \left\{ a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)} \right\}, k = \overline{1, m}$, *узагальненим периметром проекцій будемо називати величину*

$$\widetilde{\mathbf{P}\left(\mathbb{A}_m\right)} = \left(\prod_{k=1}^{m} \prod_{q=1}^{n} |\widetilde{a_q^{(k+1)}} - \widetilde{a_q^{(k)}}| \right)^{\frac{1}{n}}, \qquad a_q^{(m+1)} := a_q^{(1)}.$$

Означення 3.16. *Узагальнений внутрішній радіус поліцилiндричної області* $\mathbb{B}$ *відносно точки* $\mathbb{A}, \mathbb{A} \in \mathbb{B}$ *визначимо наступним чином:*

$$\mathbf{r}\left(\mathbb{B}, \mathbb{A}\right) = \left(\prod_{q=1}^{n} r\left(B_q, a_q\right) \right)^{\frac{1}{n}},$$

де $r(B_q, a_q)$ *внутрішній радіус області координати* B_q *відносно точки* a_q.

Означення 3.17. *Для фіксованого натурального числа m та точок $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^{m}$ введемо також у розгляд наступний функціонал*

$$\mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right)=\left(\prod_{q=1}^{n}\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

де $A_q^{(m)}=\left\{a_q^{(1)},a_q^{(2)},...,a_q^{(m)}\right\}\subset\mathbb{C}$ – m-променева ситема точок складена із q-вих координати точок Ω_k, що задовольняє умові (2.1).

4. Основні результати

Теорема 4.1. *Для довільної системи поліциліндричних областей*

$$\mathbb{B}_k=B_1^{(k)}\times B_2^{(k)}\times...\times B_n^{(k)},\quad B_q^{(k)}\subset\overline{\mathbb{C}},\ q=\overline{1,n},k=\overline{1,m},$$

такої, що області $B_q^{(1)},B_q^{(2)},...,B_q^{(m)}$, $q=\overline{1,n}$, $n\geq 2$, є системою попарно-неперетинних областей в $\overline{\mathbb{C}}$, та системи точок

$$\mathbb{A}_k=\left\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},...,a_n^{(k)}\right\}\in\mathbb{B}_k,\quad k=\overline{1,m},$$

у просторі $\mathbb{C}^n$, такої, що для кожного фіксованого $q=\overline{1,n}$ системи точок $\left\{a_q^{(1)},a_q^{(2)},...,a_q^{(m)}\right\}$, $n\geq 2$, є m-променевими системами точок в просторі $\mathbb{C}$, що задовольняють умові (2.1), *та для довільного $\alpha\geq 0$ справедлива наступна нерівність:*

$$\widetilde{\mathbf{P}^{\alpha}\left(\mathbb{A}_m\right)}\cdot\prod_{k=1}^{m}\mathbf{r}\left(\mathbb{B}_k,\mathbb{A}_k\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{m}\cdot\mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right). \tag{4.1}$$

Знак рівності у цій нерівності досягається, коли при кожному фіксованому $q=\overline{1,n}$ система областей $\left\{B_q^{(1)},B_q^{(2)},...,B_q^{(m)}\right\}$ та система точок $\left\{a_q^{(1)},a_q^{(2)},...,a_q^{(m)}\right\}$ є, відповідно, системою кругових областей та системою полюсів квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{\left(w^n-1\right)^2}dw^2. \tag{4.2}$$

Доведення. Використовуючи результати робіт [21–23], отриманих у просторі $\mathbb{C}$, маємо:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\widetilde{|a_q^{(k+1)}-a_q^{(k)}|}^{\alpha}\cdot r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{m}\cdot\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right),$$

$$q=\overline{1,n}.$$

Перемножуючи отриманих n нерівностей маємо,

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(|\widetilde{a_q^{(k+1)}}-\widetilde{a_q^{(k)}}|^{\alpha}\cdot r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\right)\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{nm}\times$$

$$\times\prod_{q=1}^{n}\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right).$$

Перегрупуючи множники, отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{m}\prod_{q=1}^{n}|\widetilde{a_q^{(k+1)}}-\widetilde{a_q^{(k)}}|^{\alpha}\cdot\prod_{k=1}^{m}\prod_{q=1}^{n}r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{nm}\times$$

$$\times\prod_{q=1}^{n}\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right).$$

Добуваючи із обох частин корінь n-го порядку, та використовуючи при цьому введені вище означення узагальненого внутрішнього радіуса поліциліндричної області, узагальненого периметру проекцій та функціоналу $\mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right)$ у просторі $\mathbb{C}^n$ отримаємо нерівність (4.1). Теорема доведена. $\square$

Теорема 4.2. *Для довільної системи поліцилiндричних областей*

$$\mathbb{B}_k=B_1^{(k)}\times B_2^{(k)}\times...\times B_n^{(k)},\quad B_q^{(k)}\subset\overline{\mathbb{C}},\ q=\overline{1,n},k=\overline{1,m},$$

такої, що області $B_q^{(1)},B_q^{(2)},...,B_q^{(m)}$, $q=\overline{1,n}$, $n\geq 2$, *є системою попарно-неперетинних областей в* $\overline{\mathbb{C}}$, *та системи точок*

$$\mathbb{A}_k=\left\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},...,a_n^{(k)}\right\}\in\mathbb{B}_k,\quad k=\overline{1,m},$$

у просторі $\mathbb{C}^n$, *такої, яка належить класу* S^*, *та для кожного фіксованого* $q=\overline{1,n}$ *системи точок* $\left\{a_q^{(1)},a_q^{(2)},...,a_q^{(m)}\right\}$, $n\geq 2$, *є* m-*променевими системами точок в просторі* $\mathbb{C}$, *що задовольняють умові* (2.1), *та для довільного* $\alpha\geq 0$ *справедлива наступна нерівність:*

$$\mathbf{P}^{\alpha}\left(\{\Omega_k\}_{k=1}^{m}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\mathbf{r}\left(\mathbb{B}_k,\mathbb{A}_k\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{m}\cdot\mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right).\qquad(4.3)$$

Знак рівності у цій нерівності досягається, коли при кожному фіксованому $q=\overline{1,n}$ *система областей* $\left\{B_q^{(1)},B_q^{(2)},...,B_q^{(m)}\right\}$ *та система точок* $\left\{a_q^{(1)},a_q^{(2)},...,a_q^{(m)}\right\}$ *є, відповідно, системою кругових областей та системою полюсів квадратичного диференціалу* (4.2).

Доведення. Згідно результатів робіт [21–23], отриманих у просторі $\mathbb{C}$, випливає справедливість наступних нерівностей:

$$\prod_{k=1}^{m}\left(|a_q^{(k+1)}-a_q^{(k)}|^{\alpha}\cdot r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{m}\cdot \mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right),$$

$$q=\overline{1,n}.$$

Перемножуючи отриманих n нерівностей маємо,

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(|a_q^{(k+1)}-a_q^{(k)}|^{\alpha}\cdot r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\right)\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{nm}\times$$

$$\times\prod_{q=1}^{n}\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right).$$

Перегрупуючи множники, отримаємо:

$$\prod_{k=1}^{m}\prod_{q=1}^{n}|a_q^{(k+1)}-a_q^{(k)}|^{\alpha}\cdot\prod_{k=1}^{m}\prod_{q=1}^{n}r\left(B_q^{(k)},a_q^{(k)}\right)\leq\left(\frac{2^{\alpha+2}}{m}\cdot\sin^{\alpha}\frac{\pi}{m}\right)^{nm}\times$$

$$\times\prod_{q=1}^{n}\mathrm{T}\left(A_q^{(m)}\right).$$

Добуваючи із обох частин корінь n-го порядку, та використовуючи при цьому введені вище означення узагальненого внутрішнього радіуса поліциліндричної області, узагальненого периметру та функціоналу $\mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right)$ у просторі $\mathbb{C}^n$ отримаємо нерівність (4.3). Теорема доведена. □

Якщо $\alpha=0$ отримаємо наслідок теорем 4.1, що є практично переносом добре відомих результатів роботи [4] з простору $\mathbb{C}$ на простір $\mathbb{C}^n$.

Наслідок 4.1. *Для довільної системи поліциліндричних областей*

$$\mathbb{B}_k=B_1^{(k)}\times B_2^{(k)}\times...\times B_n^{(k)},\quad B_q^{(k)}\subset\overline{\mathbb{C}},\ q=\overline{1,n},k=\overline{1,m},$$

такої, що області $B_q^{(1)},B_q^{(2)},...,B_q^{(m)}$, $q=\overline{1,n}$, $n\geq 2$, *є системою попарно-неперетинних областей в* $\overline{\mathbb{C}}$, *та системи точок*

$$\mathbb{A}_k=\left\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},...,a_n^{(k)}\right\}\in\mathbb{B}_k,\quad k=\overline{1,m},$$

у просторі $\mathbb{C}^n$, *такої, що для кожного фіксованого* $q = \overline{1,n}$ *системи точок* $\left\{a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, ..., a_q^{(m)}\right\}$, $n \geq 2$, *є* m*-променевими системами точок в просторі* $\mathbb{C}$, *що задовольняють умові* (2.1) *справедлива наступна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{m} \mathbf{r}\left(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k\right) \leq \left(\frac{4}{m}\right)^m \cdot \mathbf{T}\left(\mathbb{A}_m\right).$$

Знак рівності у цій нерівності досягається, коли при кожному фіксованому $q = \overline{1,n}$ *система областей* $\left\{B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, ..., B_q^{(m)}\right\}$ *та система точок* $\left\{a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, ..., a_q^{(m)}\right\}$ *є, відповідно, системою кругових областей та системою полюсів квадратичного диференціалу* (4.2).

Література

[1] Lavrent'ev, M.A. (1934). On the theory of conformal mappings. *Tr. Fiz.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 5*, 159–245.

[2] Goluzin, G.M. (1966). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Nauka, Moscow (in Russian).

[3] Bakhtina, G.P. (1975). *Variational methods and quadratic differentials in problems for disjoint domains.* PhD thesis, Kiev (in Russian).

[4] Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis.* Inst. Math. NAS Ukraine, Kiev (in Russian).

[5] Dubinin, V.N. (1988). Separating transformation of domains and problems of extremal division. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Ros. Akad. Nauk, 168*, 48–66.

[6] Dubinin, V.N. (1994). Method of symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Usp. Mat. Nauk, 49*(1), 3–76.

[7] Bakhtin, A.K. (2011). Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства. *Dop. NANU, 3*, 7–11.

[8] Bakhtin, A.K. (2011). Analytic functions of vector argument and partially-conformal mappings in multidimensional complex spaces. *8th International ISAAC Congress, Abstracts*, 1–9.

[9] Bakhtin, A.K. (2012). Аналитические функции векторного аргумента и частично конформные отображения в многомерных комплексных пространствах. *Dop. NANU, 2*, 13–18.

[10] Bakhtin, A.K. (2009). Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J., 61*(5), 716–733.

[11] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2005). Extremal problems and quadratic differential. *Nonlin. Oscillations, 8*(3), 296–301.

[12] Targonskii, A.L. (2008). Extremal problems of partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Dop. NAN Ukr., 9*, 31–36.

[13] Targonskii, A. (2014). Extremal problems on the generalized (n; d)-equiangular system of points. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 22*(2), 239–251.

[14] Targonskii, A. (2016). Extremal problem (2n; 2m-1)-system points on the rays. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 24*(2), 283–299.

[15] Targonskii, A.L. (2013). Extremal problems for partially non-overlapping domains on equiangular systems of points. *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, 63*(1), 57–63.

[16] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2016). On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere. *International Journal of Advanced Research in Mathematics, 4*, 1–7.

[17] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2011). Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets. *Ukr. Math. J., 63*(7), 999–1012.

[18] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2006). Some extremal problems in the theory of nonoverlapping domains with free poles on rays. *Ukr. Math. J., 58*(12), 1950–1954.

[19] Dubinin, V.N. (1997). Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications. *Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst., 237*, 56–73.

[20] Dubinin, V.N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Dal'nayka, Vladivostok (in Russian).

[21] Targonskii, A. (2017). n extremal problem for the nonoverlapping domains. *Ukr. Mat. Bull., 14*(1), 126–134; transl. in (2017). *J. Math. Sci., 227*(1), 98–104.

[22] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2018). Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Ukr. Mat. Bull., 15*(1), 94–102; transl. in (2018). *J. Math. Sci., 235*(1), 74–80.

[23] Targonskii, A.L. (2018). About one extremal problem for projections of the points on unit circle. *Ukr. Mat. Bull., 15*(3), 418–430.

[24] Hayman, W.K. (1958). *Multivalent functions.* Cambridge University, Cambridge.

[25] Jenkins, J.A. (1958). *Univalent functions and conformal mapping.* Springer, Berlin.

[26] Шабат, Б.В. (1976). *Введение в комплексный анализ, Ч. I.* М., Наука.

[27] Шабат, Б.В. (1976). *Введение в комплексный анализ, Ч. II.* М., Наука.

[28] Фукс, Б.В. (1962). *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.* М., Физматгиз.

[29] Кантор, И.Л., Солодовников, А.С. (1973). *Гиперкомплексные числа.* М., Наука.

[30] Ван дер Варден, Б.Л. (1976). *Алгебра.* М., Наука.

Відомості про авторів

Андрій Леонідович Таргонський

Житомирський державний університет ім. І. Франко, Житомир, Україна
E-Mail: targonsk@zu.edu.ua