Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 1, 88 – 102
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2022-19-1-6

Зображення твірної функції многочленів Бернуллі ланцюговими дробами

Михайло М. Пагіря

(Представлена В.П. Моторним)

Анотація. Отримано розвинення твірної функції чисел Бернуллі в ланцюгові дроби та квазі–обернені ланцюгові дроби. Доведено збіжність та рівномірну збіжність розвинень у ланцюгові дроби. Знайдено зображення твірної функції многочленів Бернуллі у вигляді добутку трьох ланцюгових дробів та у вигляді добутку трьох квазі–обернених ланцюгових дробів.

2010 MSC. 11A55, 11B68, 11J70, 30B70, 40A15.

Ключові слова та фрази. Ланцюговий дріб, числа Бернуллі, многочлени Бернуллі, твірна функція, розвинення функції в ланцюговий дріб, зображення функції ланцюговим дробом.

1. Вступ

Функцію комплексної змінної в околі деякої точки можна розвинути в степеневий ряд [1], наблизити апроксимантами Паде [2, 3], представити ланцюговим дробом [4].

Існує декілька способів розвинення функцій в ланцюговий дріб. Історично перший із них пов'язаний із відшуканням розв'язку диференціального рівняння Ріккаті у вигляді нескінченного ланцюгового дробу [5]. Розвинення функцій отримують із представлення відношення гіпергеометричних функцій ланцюговим дробом. Якщо відоме розвинення функції у формальний степеневий ряд в околі деякої точки, то знаходження коефіцієнту відповідного формальному степеневому ряду правильного C–дробу передбачає обчислення чотирьох ганкелевих визначників, які утворені із коефіцієнтів формального ряду [6].

Стаття надійшла в редакцію 11.05.2020

Аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів є формула Тіле [7,8]. Коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб визначаються через обернені похідні Тіле. Якщо знайдено загальну формулу коефіцієнтів розвинення функції у ланцюговий дріб, то встановлюють області збіжності та рівномірної збіжності ланцюгових дробів, апріорні та апостеріорні оцінки. Обернені похідні 2–го типу та методи розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби розглянуто в [9]. Розвинення твірних функцій чисел Каталана, Моцкіна, Ойлера та інших в ланцюгові дроби Якобі (J–дроби) та ланцюгові дроби Стілтьєса (S–дроби) досліджено в роботі [10]. Розвиненням твірних функцій узагальнених чисел Бернуллі, Коші, Ойлера в ланцюгові T–дроби присвячена робота [11].

В даній роботі запропоновано розвинення твірних функцій чисел Бернуллі та многочленів Бернуллі у ланцюгові дроби Тіле, правильні C–дроби та квазі–обернені ланцюгові дроби.

2. Постановка задачі. Ввідні поняття

Відомо [12], що функція $\mathfrak{b}(z) = z/(e^z - 1)$ є твірною функцією чисел Бернуллі $B_n, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, тобто

$$\mathfrak{b}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

В свою чергу функція $\mathfrak{B}(z, x) = ze^{xz}/(e^z - 1)$ є твірною функцією многочленів Бернуллі, тобто

$$\mathfrak{B}(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Степеневі ряди (2.1), (2.2) збігаються для всіх $|z| < 2\pi$. Водночас функція $\mathfrak{b}$ визначена в області $\mathbf{G} = \mathbb{C}\backslash\{2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, а функція $\mathfrak{B}$ в області $\mathfrak{G} = \mathbf{G} \times \mathbb{R}$. Метою даної роботи є отримання розвинень функцій $\mathfrak{b}, \mathfrak{B}$ в ланцюгові дроби, які збігаються до функцій в областях $\mathbf{G}$ та $\mathfrak{G}$.

Нехай $b_0, a_k \neq 0, b_k, k \in \mathbb{N}$, є числа, функції тощо. Нескінченний ланцюговий дріб

$$D = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

коротко записують так

$$D = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \, \frac{a_2}{b_2 +} \, \cdots + \frac{a_k}{b_k +} \, \cdots = b_0 + \mathbf{K}(a_k/b_k). \quad (2.3)$$

Аналогічно, n–й підхідний дріб, n–е наближення $D_n, n \geq 1$, нескінченного ланцюгового дробу D коротко записують наступним чином

$$D_n = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \, \cdots + \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{n}(a_k/b_k), \; D_0 = b_0.$$

Означення 2.1. *Ланцюгові дроби* $b_0 + \mathbf{K}(a_k/b_k)$ *та* $d_0 + \mathbf{K}(c_k/d_k)$ *називаються еквівалентними, якщо в них збігаються послідовності підхідних дробів, тобто* $b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{n}(a_k/b_k) = d_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{n}(c_k/d_k), n \geq 0$.

Теорема 2.1 ([6]). *Ланцюгові дроби* $b_0 + \mathbf{K}(a_k/b_k)$ *та* $d_0 + \mathbf{K}(c_k/d_k)$ *еквівалентні тоді і тільки тоді, якщо існує послідовність таких чисел* $\{r_k : r_0 = 1, r_k \neq 0, k \in \mathbb{N}\}$, *що мають місце співвідношення* $d_0 = b_0, c_k = r_{k-1} r_k a_k, \; d_k = r_k b_k, k \in \mathbb{N}$.

3. Ланцюговий дріб Тіле, правильний C–дріб

Нехай функція f аналітична в області $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$. Через ${}^{(k)}f(z_*)$ позначимо обернену похідну Тіле k–го порядку функції f в точці $z_* \in \mathbf{K}$. Обернені похідні Тіле функції визначаються за рекурентною формулою [7]

$$\begin{gathered} {}^{(k)}f(z_*) = k \cdot {}^{(1)}\left({}^{(k-1)}f(z_*)\right) + {}^{(k-2)}f(z_*), \\ {}^{(1)}f(z_*) = 1/f'(z_*), \; {}^{(0)}f(z_*) = f(z_*), \quad k \in \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}\backslash\{1\}. \end{gathered}$$

Теорема 3.1 ([13]). *Якщо функція* f *аналітична в області* $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$, *то обернені похідні Тіле функції* f *в точці* $z_* \in \mathbf{K}$ *визначаються наступним чином*

$${}^{(2k)}f(z_*) = \frac{H_{k+1}^{(0)}(z_*)}{H_k^{(2)}(z_*)}, \quad {}^{(2k-1)}f(z_*) = \frac{H_{k-1}^{(3)}(z_*)}{H_k^{(1)}(z_*)}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де ганкелеві визначники $H_k^{(m)}(z_*), k \geq 1$, *рівні*

$$H_0^{(m)}(z_*) = 1, \quad H_k^{(m)}(z_*) = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+k-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+k-1} & c_{m+k} & \cdots & c_{m+2k-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$c_m = f^{(m)}(z_*)/m!, \; m \geq 0, \; c_m = 0, \; m < 0.$

Відомо ([7]), що коли $C = const$, то

$$^{(2n)}(Cf(z)) = C \cdot {}^{(2n)}f(z), \ {}^{(2n+1)}(Cf(z)) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{(2n+1)}f(z), \ \ n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.1)$$

Теорема 3.2 ([14]). *Нехай функція f має обернені похідні Тіле до n–го порядку включно, $C = const$, тоді для $k = \overline{0,[n/2]}$*

$$^{(2k)}f(Cz) = {}^{(2k)}f(v)\big|_{v=Cz}, \ {}^{(2k-1)}f(Cz) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{(2k-1)}f(v)\big|_{v=Cz}. \quad (3.2)$$

Якщо існують обернені похідні Тіле $^{(n)}f(z), n \geq 1$, в околі точки $z_* \in \mathbf{K}$, то функцію можна розвинути в околі цієї точки в ланцюговий дріб Тіле (Т–ЛД) вигляду

$$f(z) = b_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_k(z_*)}. \quad (3.3)$$

Коефіцієнти Т–ЛД (3.3) визначаються через обернені похідні Тіле функції f за допомогою рекурентної формули ([7])

$$b_0 = f(z_*), \ b_1 = {}^{(1)}f(z_*), \ b_k = {}^{(k)}f(z_*) - {}^{(k-2)}f(z_*), \quad k \in \mathbb{N}_2. \quad (3.4)$$

Т–ЛД (3.3) можна записати у вигляді еквівалентного ланцюгового дробу із частинними знаменниками рівними одиниці

$$f(x) = a_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z_*)(z - z_*)}{1}. \quad (3.5)$$

Коефіцієнти ланцюгового дробу (3.5) визначаються через обернені похідні Тіле в точці z_* наступним чином

$$\begin{aligned} &a_0(z_*) = f(z_*), \, a_1(z_*) = \frac{1}{^{(1)}f(z_*)}, \\ &a_k(z_*) = \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot {}^{(1)}\big({}^{(k-1)}f(z_*)\big) \cdot {}^{(1)}\big({}^{(k)}f(z_*)\big)}, \quad k \in \mathbb{N}_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Доведено (див. [15]), що ланцюговий дріб (3.5) збігається з правильним С–дробом (С–ЛД), який відповідний формальному степеневому ряду. Звідси випливає, що Т–ЛД також є відповідний формальному степеневому ряду.

Теорема 3.3 ([6,9]). *Якщо в околі точки $z_* \in \mathbf{K}$ функція f має розвинення в С–ЛД (3.5), $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0$, то: **(A)** С–ЛД збігається до функції f; **(B)** на довільному компакті $K \subset \mathbf{K}$, який не містить полюсів функції f, С–ЛД збігається рівномірно; **(C)** функція f голоморфна в точці z_*.*

4. Розвинення твірної функція чисел Бернуллі в ланцюговий дріб

Розвинення функції $\mathfrak{b}$ в ланцюговий Т–дріб вигляду

$$\mathfrak{b}(z) = 1 - \frac{z}{2+z-}\,\frac{2z}{3+z-}\,\cdots - \frac{nz}{n+1+z-}\,\cdots$$

отримано в статті [11]. Функцію $\mathfrak{b}$ перепишемо у вигляді

$$\mathfrak{b}(z) = z/h(z), \qquad \text{де} \quad h(z) = e^z - 1. \tag{4.1}$$

В околі точки $z_* \in \mathbf{G}$ допоміжну функцію h розвинемо в Т–ЛД (3.3). Легко переконатися, що обернені похідні Тіле функції h будуть рівні:

$$^{(4k)}h(z) = e^z - 1,\ ^{(4k+1)}h(z) = (2k+1)e^{-z},\ ^{(4k+2)}h(z) = -e^z - 1,$$

$$^{(4k+3)}h(z) = -2(k+1)e^{-z}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Коефіцієнти розвинення функції h в Т–ЛД в околі точки z_* приймають значення $b_0(z_*) = e^{z_*} - 1$, $b_{2k-1}(z_*) = (-1)^{k+1}(2k-1)e^{-z_*}$, $b_{2k}(z_*) = (-1)^k 2e^{z_*},\ k \in \mathbb{N}$. Підставимо знайдені коефіцієнти в (3.3). Маємо:

$$h(z) = e^{z_*} - 1 + \frac{z-z_*}{e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-2e^{z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-3e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{2e^{z_*}+}\,\frac{z-z_*}{5e^{-z_*}+}$$
$$+\frac{z-z_*}{-2e^{z_*}+}\cdots+\frac{z-z_*}{(-1)^{n-1}(2n-1)e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{(-1)^n 2e^{z_*}+}\cdots. \tag{4.2}$$

Виконаємо в ланцюговому дробові (4.2) еквівалентні перетворення, коли $r_0 = 1$, $r_{2k-1} = e^{z_*}$, $r_{2k} = e^{-z_*}$, отримаємо розвинення функції

$$h(z) = e^{z_*} - 1 + \frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1+}\,\frac{z-z_*}{-2+}\,\frac{z-z_*}{-3+}\,\frac{z-z_*}{2+}\,\frac{z-z_*}{5+}$$
$$+\frac{z-z_*}{-2+}\,\frac{z-z_*}{-7+}\cdots+\frac{z-z_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)+}\,\frac{z-z_*}{(-1)^k 2+}\cdots. \tag{4.3}$$

Підставимо (4.3) в (4.1). Розвинення твірної функції $\mathfrak{b}$ в ланцюговий дріб в околі точки z_* має вигляд

$$\mathfrak{b}(z) = \frac{z}{e^{z_*}-1+}\,\frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1+}\,\frac{z-z_*}{-2+}\,\frac{z-z_*}{-3+}\,\frac{z-z_*}{2+}\,\frac{z-z_*}{5+}$$
$$+\frac{z-z_*}{-2+}\,\frac{z-z_*}{-7+}\cdots+\frac{z-z_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)+}\,\frac{z-z_*}{(-1)^k 2+}\cdots. \tag{4.4}$$

Згідно із (3.6), коефіцієнти еквівалентного С–ЛД будуть рівні

$$a_0(z_*) = e^{z_*} - 1, a_1(z_*) = e^{z_*}, a_{2k}(z_*) = \frac{-1}{2(2k-1)},$$

$$a_{2k+1}(z_*) = \frac{1}{2(2k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Отримаємо розвинення функції h в С–ЛД в околі точки z_*

$$h(z) = e^{z_*} - 1 + \frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1} + \frac{-\frac{1}{2}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{6}(z-z_*)}{1} + \frac{-\frac{1}{6}(z-z_*)}{1} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{10}(z-z_*)}{1} + \cdots + \frac{\frac{-1}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{2(2k+1)}(z-z_*)}{1} + \cdots.$$

Тоді маємо ще одне розвинення твірної функції $\mathfrak{b}$ в ланцюговий дріб

$$\mathfrak{b}(z) = \frac{z}{e^{z_*} - 1 +} \frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1} + \frac{-\frac{1}{2}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{6}(z-z_*)}{1} +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{6}(z-z_*)}{1} + \cdots + \frac{\frac{-1}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{2(2k+1)}(z-z_*)}{1} + \cdots. \quad (4.5)$$

Оскільки $a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}_0$, і $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то згідно із теоремою 3.3 ланцюговий дріб (4.5) та еквівалентний йому ланцюговий дріб (4.4) збігаються до твірної функції $\mathfrak{b}$ і на довільному компакті $K \subset \mathbf{G}$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно.

Значення e^{z_*} з потрібною точністю можна знайти, наприклад, із розвинення Лагранжа функції e^z в правильний С–дріб [5].

5. Квазі–оберенені ланцюгові дроби

Аналітична в області $\mathbf{K}$ функція f може бути розвинута в околі точки $z_* \in \mathbf{K}$ в ланцюговий дріб вигляду

$$f = \left(d_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{z-z_*}{d_k(z_*)}\right)^{-1}, \quad (5.1)$$

який називається квазі–оберненим ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КЛД). Із (5.1) випливає, що Т–КЛД є ланцюговий дріб вигляду (2.3) у якому $b_0 = 0, a_1 = 1, b_k = d_{k-1}(z_*)$, $a_{k+1} = z - z_*, k \in \mathbb{N}$.

Позначимо через ${}^{\{k\}}f(z_*)$ значення оберненої похідної 2–го типу k–го порядку функції f в точці $z_* \in \mathbf{K}$ [9].

Теорема 5.1 ([9]). *Якщо функція f аналітична в $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$ і визначники Ганкеля $H_{k+1}^{(1)}(z_*), H_k^{(2)}(z_*), H_{k+2}^{(-1)}(z_*), H_{k+1}^{(0)}(z_*), k = \overline{0,n}$, в точці $z_* \in \mathbf{K}$ відмінні від нуля, то функція f має скінчені обернені похідні 2–го типу в точці z_* до $(2n)$–го порядку включно, які визначаються або через відношення визначників Ганкеля*

$$ {}^{\{2k+1\}}f(z_*) = \frac{H_{k+2}^{(-1)}(z_*)}{H_{k+1}^{(1)}(z_*)},\ k = \overline{0, n-1},\ {}^{\{2k\}}f(z_*) = \frac{H_k^{(2)}(z_*)}{H_{k+1}^{(0)}(z_*)}, \quad k = \overline{1,n}, $$

або за рекурентною формулою

$$ \begin{gathered} {}^{\{k\}}f(z_*) = \frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z_*)\right)'} + {}^{\{k-2\}}f(z_*), \quad k = \overline{2, 2n}, \\ {}^{\{0\}}f(z_*) = \frac{1}{f(z_*)},\ {}^{\{1\}}f(z_*) = \frac{-f^2(z_*)}{f'(z_*)}. \end{gathered} \tag{5.2} $$

Теорема 5.2 ([9]). *Якщо функція f має обернені похідні 2–го типу до n–го порядку включно, $C = const$, то для $m = \overline{0, [\frac{n}{2}]}$*

$$ {}^{\{2m\}}(Cf(z)) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{\{2m\}}f(z),\ {}^{\{2m-1\}}(Cf(z)) = C \cdot {}^{\{2m-1\}}f(z)\,. \tag{5.3} $$

Теорема 5.3. *Нехай функція $w = f(u)$ в точці $u_0 \in \mathbf{K}$ має обернену похідну 2–го типу, функція $u = g(z)$ має похідну в точці $z_0 \in \mathbb{C}$. Тоді складена функція $w = F(z) = f(g(z))$ буде мати обернену похідну 2–го типу в точці z_0, яка визначається за формулою ${}^{\{1\}}F(z_0) = {}^{\{1\}}f(g(z_0))/g'(z_0)$.*

Теорема 5.4. *Якщо функція f має обернені похідні 2–го типу до n–го порядку включно, $C = const$, то для $k = \overline{0, [n/2]}$*

$$ {}^{\{2k\}}f(Cz) = {}^{\{2k\}}f(v)\big|_{v=Cz}, {}^{\{2k-1\}}f(Cz) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{\{2k-1\}}f(v)\big|_{v=Cz}. \tag{5.4} $$

Доведення. Доведемо теорему за індукцією. Згідно із теоремою 5.3 маємо, що

$$ {}^{\{1\}}f(Cz) = \tfrac{1}{C}{}^{\{1\}}f(v)\big|_{v=Cz}. $$

Далі

$$ {}^{\{2\}}f(Cz) = \frac{2}{({}^{\{1\}}f(Cz))'} + f(Cz) = \big(\frac{2}{({}^{\{1\}}f(v))'} + f(v)\big)\big|_{v=Cz} = {}^{\{2\}}f(v)\big|_{v=Cz}. $$

Припустимо, що (5.4) виконуються для $k = m-1$. Якщо $k = m$, то із (5.2) отримуємо, що

$$ {}^{\{2m\}}f(Cz) = \frac{2m}{({}^{\{2m-1\}}f(Cz))'} + {}^{\{2m-2\}}f(Cz) = \Big(\frac{2m}{({}^{\{2m-1\}}f(v))'} + $$

$$+{}^{\{2m-2\}}f(v)\Big)\Big|_{v=Cz} = {}^{\{2m\}}f(Cz)\big|_{v=Cz},$$

$${}^{\{2m+1\}}f(Cz) = \frac{2m+1}{({}^{\{2m\}}f(Cz))'} + {}^{\{2m-1\}}f(Cz) = \Big(\frac{2m+1}{C({}^{\{2m-1\}}f(v))'} +$$

$$+\frac{1}{C}\cdot {}^{\{2m-1\}}f(v)\Big)\Big|_{v=Cz} = \tfrac{1}{C}{}^{\{2m+1\}}f(v)\big|_{v=Cz}.$$

Отже, (5.4) виконуються для довільного значення k. □

Нехай існують обернені похідні 2–го типу ${}^{\{n\}}f(z)$ в деякому околі точки $z_* \in \mathbf{K}$. Тоді функцію можна розвинути у Т–КЛД (5.1), коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$\begin{aligned} &d_0(z_*) = \frac{1}{f(z_*)},\ d_1(z_*) = {}^{\{1\}}f(z_*),\\ &d_k(z_*) = \frac{k}{\big({}^{\{k-1\}}f(z_*)\big)'} = {}^{\{k\}}f(z_*) - {}^{\{k-2\}}f(z_*), \quad k \in \mathbb{N}_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Функцію f в околі точки $z_* \in \mathbf{K}$ можна розвинути у еквівалентний Т–КЛД (5.1) квазі–обернений ланцюговий дріб типу С–дробу (С–КЛД) вигляду

$$f = \left(e_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{e_k(z_*)(z-z_*)}{1}\right)^{-1}. \tag{5.6}$$

Коефіцієнти С–КЛД визначаються через обернені похідні 2–го типу функції f в точці $z_* \in \mathbf{K}$ згідно із формулами

$$\begin{aligned} &e_0(z_*) = \frac{1}{f(z_*)},\ e_1(z_*) = \frac{1}{{}^{\{1\}}f(z_*)},\\ &e_k(z_*) = \frac{\big({}^{\{k-2\}}f(z_*)\big)'\,\big({}^{\{k-1\}}f(z_*)\big)'}{(n-1)n}, \qquad k \in \mathbb{N}_2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Теорема 5.5 ([9]). *Нехай елементи С–КЛД* (5.6) *такі, що* $e_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Тоді: **(A)** С–КЛД* (5.6) *та еквівалентний йому Т–КЛД* (5.1) *збігаються до мероморфної функції* f*; **(B)** збіжність ланцюгових дробів* (5.1) *та* (5.6) *буде рівномірна на кожному компакті* $K \subset \mathbb{C}$*, який не містить полюсів* f*; **(C)** функція* f *голоморфна в точці* $z = z_*$ *і* $f(z_*) = 1/e_0(z_*)$.

6. Розвинення твірної функція чисел Бернуллі в квазі–обернені ланцюгові дроби

Допоміжну функцію h, що визначена в (4.1), розвинемо в Т–КЛД та С–КЛД. Легко переконатися, що обернені похідні 2–го типу функції h визначаються за формулами

$$^{\{4k\}}h(z) = \frac{1}{e^z - 1},\ ^{\{4k+1\}}h(z) = -(2k+1)e^{-z}(e^{2z} - 2(2k+1)e^z + 1),$$

$$^{\{4k+2\}}h(z) = \frac{-1}{e^z + 1},\ ^{\{4k+3\}}h(z) = 2(k+1)e^{-z}(e^{2z}+4(k+1)e^z+1),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді, згідно із (5.5), коефіцієнти розвинення функції h в Т–КЛД в околі точки z_* приймають значення

$$d_0(z_*) = \frac{1}{e^{z_*} - 1}, d_{4k-3}(z_*) = \frac{-(4k-3)(e^{z_*}-1)^2}{e^{z_*}}, d_{4k-2}(z_*) = \frac{-2e^{z_*}}{e^{2z_*} - 1},$$

$$d_{4k-1}(z_*) = (4k-1)e^{-z_*}(e^{z_*}+1)^2,\ d_{4k}(z_*) = \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*} - 1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в Т–КЛД (5.1). Після еквівалентних перетворень отримаємо розвинення твірної функції $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b}(z) = \frac{((e^{2z_*}-1)/e^{z_*})z}{(e^{z_*}+1)/e^{z^*}} + \frac{z - z_*}{-\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}} + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{3\frac{e^{z_*}+1}{e^{z_*}-1}} + \frac{z - z_*}{2} + $$

$$+ \cdots + \frac{z - z_*}{(-1)^k(2k-1)\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k+1}}} + \frac{z - z_*}{(-1)^k 2} + \cdots. \tag{6.1}$$

За допомогою формул (5.7) знаходимо коефіцієнти розвинення функції h в С–КЛД (5.6) в околі точки $z_* \in \mathbf{K}$

$$e_0(z_*) = \frac{1}{e^{z_*} - 1},\ e_1(z_*) = \frac{-e^{z_*}}{(e^{z_*}-1)^2},\ e_{2k-1}(z_*) = \frac{\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k+1}}}{2(2k-1)},$$

$$e_{2k}(z_*) = \frac{-\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^k}}{2(2k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В результаті маємо

$$\mathfrak{b}(z) = \frac{(e^{z_*}-1)z}{1} + \frac{-\frac{e^{z_*}(z-z_*)}{e^{z_*}-1}}{1} + \frac{\frac{(e^{z_*}+1)(z-z_*)}{2(e^{z_*}-1)}}{1} + \frac{-\frac{(e^{z_*}-1)(z-z_*)}{6(e^{z_*}+1)}}{1} +$$

$$+\cfrac{\frac{(e^{z_*}-1)(z-z_*)}{6(e^{z_*}+1)}}{1}+\cdots+\cfrac{-\frac{z-z_*}{2(2k-1)}\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k+1}}}{1}+$$
$$+\cfrac{\frac{z-z_*}{2(2k-1)}\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k}}}{1}+\cdots. \tag{6.2}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} e_{2k-1}(z_*) = \lim\limits_{k\to\infty} e_{2k}(z_*) = 0$, то згідно із теоремою 5.5 ланцюгові дроби (6.1) та (6.2) збігаються до функції $\mathfrak{b}$ і на довільному компакті $K \subset \mathbf{G}$ ланцюгові дроби збігаються рівномірно.

7. Зображення твірної функції многочленів Бернуллі ланцюговим дробом Тіле та правильним С–дробом

У множині $\mathbf{G}$ зафіксуємо деяку точку z_0 і розглянемо допоміжну функцію
$$\mathbf{B}(x) = \mathfrak{B}(z_0, x) = \mathfrak{b}(z_0)e^{z_0 x}. \tag{7.1}$$

Знайдемо обернені похідні Тіле функції $\mathbf{B}$. Відомо [13], що обернені похідні Тіле функції $e^t, t \in \mathbb{R}$, визначається за формулами
$$^{(2k)}e^t = (-1)^k e^t, \quad ^{(2k+1)}e^t = \frac{(-1)^k(k+1)}{e^t}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Згідно із (3.2) маємо:
$$^{(2k)}\big(e^{z_0 x}\big) = (-1)^k e^{z_0 x}, \quad ^{(2k+1)}\big(e^{z_0 x}\big) = \frac{(-1)^k(k+1)}{z_0\, e^{z_0 x}}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Враховуючи (3.1) кінцеве отримуємо, що обернені похідні Тіле функції $\mathbf{B}$ будуть рівні
$$^{(2k)}\big(\mathbf{B}(x)\big) = (-1)^k \cdot \mathfrak{b}(z_0)e^{z_0 x} = (-1)^k \cdot \mathbf{B}(x),$$
$$^{(2k+1)}\big(\mathbf{B}(x)\big) = \frac{1}{\mathfrak{b}(z_0)} \cdot \frac{(-1)^k \cdot (k+1)}{z_0 \cdot e^{z_0 x}} = \frac{(-1)^k \cdot (k+1)}{z_0 \cdot \mathbf{B}(x)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Згідно із (3.4) коефіцієнти розвинення функції $\mathbf{B}$ в Т–ЛД в околі точки x_* будуть рівні
$$\begin{gathered} b_0(x_*) = \mathbf{b}_*, \quad b_{2k-1}(x_*) = \frac{(-1)^k \cdot (2k-1)}{z_0 \cdot \mathbf{b}_*}, \\ b_{2k}(x_*) = (-1)^k \cdot 2 \cdot \mathbf{b}_*, \quad \mathbf{b}_* = \mathbf{B}(x_*), \qquad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти (7.2) в Т–ЛД (3.3). Після еквівалентних перетворень маємо розвинення функції $\mathbf{B}$
$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{b}_*\Big(1 + \frac{x-x_*}{1/z_0} + \frac{x-x_*}{-2} + \frac{x-x_*}{-3/z_0} + + \frac{x-x_*}{2} + \frac{x-x_*}{5/z_0} +$$

$$+\ \cdots + \frac{x-x_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)/z_0} + \frac{x-x_*}{(-1)^k 2} + \ \cdots\Big).$$

Оскільки z_0 довільна точка множини $\mathbf{G}$, то із (7.1) отримуємо:

$$\mathfrak{B}(z,x) = \mathfrak{b}(z)e^{x_* z}\Big(1 + \frac{x-x_*}{1/z} + \frac{x-x_*}{-2} + \frac{x-x_*}{-3/z} + \frac{x-x_*}{2} + \frac{x-x_*}{5/z} +$$

$$+\ \cdots + \frac{x-x_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)/z} + \frac{x-x_*}{(-1)^k 2} + \ \cdots\Big). \qquad (7.3)$$

Повторивши міркування аналогічні наведеним вище, легко показати, що функція $e^{x_* z}$, де x_* – фіксоване, в околі точки z_* має наступне розвинення в Т–ЛД

$$e^{x_* z} = e^{x_* z_*}\Big(1 + \frac{z-z_*}{1/x_*} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{-3/x_*} + \frac{z-z_*}{2} + \frac{z-z_*}{5/x_*} +$$

$$+\ \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^k 2} + \frac{z-z_*}{(-1)^k(2k+1)/x_*} + \ \cdots\Big). \qquad (7.4)$$

Якщо розвинення (4.4) та (7.4) підставити в (7.3), то кінцеве отримаємо зображення твірної функції многочленів Бернуллі $\mathfrak{B}$ у вигляді добутку трьох ланцюгових дробів, тобто

$$\mathfrak{B}(z,x) = e^{x_* z_*}\Big(\frac{z}{e^{z_*}-1} + \frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1} + \frac{z-z_*}{-2} + \frac{z-z_*}{-3} + \cdots +$$

$$+ \frac{z-z_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)} + \frac{z-z_*}{(-1)^k 2} + \ \cdots\Big)\cdot\Big(1 + \frac{x-x_*}{1/z} + \frac{x-x_*}{-2} + \frac{x-x_*}{-3/z} +$$

$$+\ \cdots + \frac{x-x_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)/z} + \frac{x-x_*}{(-1)^k 2} + \ \cdots\Big)\cdot\Big(1 + \frac{z-z_*}{1/x_*} + \frac{z-z_*}{-2} +$$

$$+ \frac{z-z_*}{-3/x_*} + \ \cdots + \frac{z-z_*}{(-1)^{k-1}(2k-1)/x_*} + \frac{z-z_*}{(-1)^k 2} + \ \cdots\Big). \qquad (7.5)$$

Замінимо кожен із ланцюгових дробів добутку (7.5) еквівалентними правильними С–дробами. Маємо

$$\mathfrak{B}(z,x) = e^{x_* z_*}\Big(\frac{z}{e^{z_*}-1} + \frac{e^{z_*}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{-1}{2}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{6}(z-z_*)}{1} +$$

$$+\ \cdots + \frac{\frac{-1}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1} + \frac{\frac{1}{2(2k+1)}(z-z_*)}{1} + \ldots\Big)\cdot\Big(1 + \frac{z(x-x_*)}{1} +$$

$$+ \frac{\frac{-1}{2}z(x-x_*)}{1} + \frac{\frac{1}{6}z(x-x_*)}{1} + \cdots + \frac{\frac{-1}{2(2k-1)}z(x-x_*)}{1} +$$

$$+\cfrac{\frac{1}{2(2k+1)}z(x-x_*)}{1}+\ldots\Big)\cdot\Big(1+\cfrac{x_*(z-z_*)}{1}+\cfrac{\frac{-x_*}{2}(z-z_*)}{1}+$$
$$+\cfrac{\frac{x_*}{6}(z-z_*)}{1}+\cdots+\cfrac{\frac{-x_*}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1}+\cfrac{\frac{x_*}{2(2k+1)}(z-z_*)}{1}+\ldots\Big). \quad (7.6)$$

Оскільки для фіксованих x_*, z

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-1}{2(2k-1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2(2k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{-x_*}{2(2k-1)}=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_*}{2(2k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{-z}{2(2k-1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{z}{2(2k+1)}=0,$$

то згідно із теоремою 3.3 добутки ланцюгових дробів (7.5) та (7.6) збігаються до твірної функції многочленів Бернуллі $\mathfrak{B}(z,x)$ на множині $\mathfrak{G}$, яка не містить полюсів функції. На довільному компакті $K\subset\mathfrak{G}$ добутки (7.5) та (7.6) збігаються рівномірно.

8. Зображення твірної функції многочленів Бернуллі квазі–оберненими ланцюговими дробами

Нехай $z_0\in\mathbf{G}$ є деяка фіксована точка. Визначимо обернені похідні 2–го типу допоміжної функції $\mathbf{B}$, яка визначена в (7.1). В [9] доведено, що обернені похідні 2–го типу функції $e^t, t\in\mathbb{R}$, визначаються наступним чином

$${}^{\{2k-1\}}e^t=(-1)^k\cdot k\cdot e^t,\quad {}^{\{2k\}}e^t=\frac{(-1)^k}{e^t},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси та із теореми 5.4 маємо, що

$${}^{\{2k-1\}}e^{z_0x}=\frac{(-1)^k}{z_0}\cdot k\cdot e^{z_0x},\quad {}^{\{2k\}}e^{z_0x}=\frac{(-1)^k}{e^{z_0x}},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Врахуємо властивість обернених похідних 2–го типу (5.3). Кінцеве отримуємо:

$${}^{\{2k-1\}}\mathbf{B}(x)=\frac{(-1)^k k}{z_0}\,\mathfrak{b}(z_0)e^{z_0x}=\frac{(-1)^k k}{z_0}\mathbf{B}(x),$$

$${}^{\{2k\}}\mathbf{B}(x)=\frac{(-1)^k}{\mathfrak{b}(z_0)\cdot e^{z_0x}}=\frac{(-1)^k}{\mathbf{B}(x)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Згідно із (5.5) коефіцієнти розвинення функції $\mathbf{B}$ в Т–КЛД (5.1) в околі точки $x=x_*$ будуть рівні

$$d_0(x_*)=\frac{1}{\mathbf{b}_*},\quad d_{2k-1}(x_*)=\frac{(-1)^k(2k-1)}{z_*}\mathbf{b}_*,$$

$$d_{2k}(x_*) = \frac{(-1)^k \cdot 2}{\mathbf{b}_*}, \quad \mathbf{b}_* = \mathbf{B}(x_*), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставимо коефіцієнти в (5.1). Після еквівалентних перетворень отримаємо

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{b}_* \Big(1 + \frac{x - x_*}{-1/z_0 +} \frac{x - x_*}{-2 \ +} \frac{x - x_*}{3/z_0 \ +} \frac{x - x_*}{2 \ +} \frac{x - x_*}{-5/z_0 +}$$

$$+ \frac{x - x_*}{-2 \ +} \cdots + \frac{x - x_*}{(-1)^k(2k-1)/z_0 +} \frac{x - x_*}{(-1)^k 2 + \ \cdots}\Big)^{-1}.$$

Точка z_0 — довільна точка множини $\mathbf{G}$. Тоді

$$\mathfrak{B}(z, x) = \mathfrak{b}(z) \cdot e^{x_* z} \Big(1 + \frac{x - x_*}{-1/z \ +} \frac{x - x_*}{-2 \ +} \frac{x - x_*}{3/z \ +} \frac{x - x_*}{2 \ +} \frac{x - x_*}{-5/z \ +}$$

$$+ \frac{x - x_*}{-2 \ +} \cdots + \frac{x - x_*}{(-1)^k(2k-1)/z +} \frac{x - x_*}{(-1)^k 2 + \ \cdots}\Big)^{-1}. \tag{8.1}$$

Повторивши міркування аналогічні вище наведеним, отримуємо, що розвинення функції $e^{x_* z}$ при фіксованому значенні x_* в околі точки $z = z_*$ в Т–КЛД після еквівалентних перетворень має вигляд

$$e^{x_* z} = e^{x_* z_*} \Big(1 + \frac{z - z_*}{-1/x_* +} \frac{z - z_*}{-2 \ +} \frac{x - x_*}{3/x_* \ +} \frac{x - x_*}{2 \ +}$$

$$+ \cdots + \frac{z - z_*}{(-1)^k(2k-1)/x_* +} \frac{z - z_*}{(-1)^k 2 + \ \cdots}\Big)^{-1}. \tag{8.2}$$

Підставимо в (8.1) розвинення (8.2) та зображення твірної функції чисел Бернуллі (6.1). Отримаємо зображення твірної функції многочленів Бернуллі $\mathfrak{B}$ у вигляді добутку трьох квазі–обернених ланцюгових дробів типу Тіле:

$$\mathfrak{B}(z, x) = e^{x_* z_*} \Big(\frac{((e^{2z_*} - 1)/e^{z_*})z}{(e^{z_*} + 1)/e^{z^*} \ +} \frac{z - z_*}{-\frac{e^{z_*} - 1}{e^{z_*} + 1} +} \frac{z - z_*}{-2 \ +} \frac{z - z_*}{3\frac{e^{z_*} + 1}{e^{z_*} - 1} +}$$

$$+ \frac{z - z_*}{2 \ +} \cdots + \frac{z - z_*}{(-1)^k(2k-1)\big(\frac{e^{z_*} - 1}{e^{z_*} + 1}\big)^{(-1)^{k+1}} +} \frac{z - z_*}{(-1)^k 2 + \ \cdots}\Big) \times$$

$$\times \Big(1 + \frac{z - z_*}{-1/x_* +} \frac{z - z_*}{-2 \ +} \frac{z - z_*}{-3/x_* +} \frac{z - z_*}{2 \ +} \frac{z - z_*}{5/x_* \ +} \cdots +$$

$$+ \frac{z - z_*}{(-1)^k(2k-1)/x_* +} \frac{z - z_*}{(-1)^k 2 + \ \cdots}\Big)^{-1} \cdot \Big(1 + \frac{x - x_*}{-1/z \ +} \frac{x - x_*}{-2 \ +}$$

$$+\ \cdots + \frac{x-x_*}{(-1)^k(2k-1)/z+}\ \frac{x-x_*}{(-1)^k 2+\ \cdots}\Big)^{-1}. \tag{8.3}$$

Можна записати кожен із квазі–обернених ланцюгових дробів через еквівалентні ланцюгові дроби із частинними знаменниками рівними одиниці, тобто

$$\mathfrak{B}(z,x) = e^{x_* z_*}\Big(\frac{(e^{z_*}-1)z}{1+}\ \frac{-\frac{e^{z_*}}{e^{z_*}-1}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{e^{z_*}+1}{2(e^{z_*}-1)}(z-z_*)}{1+}$$
$$+\ \frac{-\frac{e^{z_*}-1}{6(e^{z_*}+1)}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{e^{z_*}-1}{6(e^{z_*}+1)}(z-z_*)}{1+\ \cdots+}$$
$$+\ \frac{\frac{-1}{2(2k-1)}\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k+1}}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{1}{2(2k-1)}\left(\frac{e^{z_*}-1}{e^{z_*}+1}\right)^{(-1)^{k}}(z-z_*)}{1+\ \cdots}\Big)\times$$
$$\times\Big(1+\frac{-x_*(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{x_*}{2}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{-x_*}{6}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{x_*}{6}(z-z_*)}{1+\ \cdots+}$$
$$+\ \frac{\frac{-x_*}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1+}\ \frac{\frac{x_*}{2(2k-1)}(z-z_*)}{1+\ \cdots}\Big)\cdot\Big(1+\frac{-z(x-x_*)}{1+}$$
$$+\ \frac{\frac{z}{2}(x-x_*)}{1+}\ \frac{\frac{-z}{6}(x-x_*)}{1+}\ \frac{\frac{z}{6}(x-x_*)}{1+}$$
$$+\ \cdots + \frac{\frac{-z}{2(2k-1)}(x-x_*)}{1+}\ \frac{\frac{z}{2(2k-1)}(x-x_*)}{1+\ \cdots}\Big). \tag{8.4}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2(2k-1)} = 0$, то згідно із теоремою 5.5 ланцюгові дроби із добутку (8.4) та еквіваленті їм ланцюгові дроби із добутку (8.3) є збіжними і на довільному компакті $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{G}$ збіжність буде рівномірна.

9. Прикінцеві зауваження

В даній роботі отримано розвинення твірної функції чисел Бернуллі в ланцюговий дріб Тіле та правильний С–дріб в околі деякої точки $z_*\in\mathbf{G}$. Встановлено області збіжності та рівномірної збіжності розвинень.

Запропоновано також розвинення твірної функції чисел Бернуллі в квазі–обернені ланцюгові дроби. Доведено збіжність та рівномірну збіжність таких розвинень.

Зображення твірної функції многочленів Бернуллі отримано у вигляді добутку трьох ланцюгових дробів та у вигляді добутку трьох квазі–обернених ланцюгових дробів.

Подяка. Автор вдячний рецензенту за потрачений час, цінні зауваження та поради.

Література

[1] Dzyadyk, V.K., Shevchuk, I.O. (2008). *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Berlin–New York, Walter de Gruyter.

[2] Бейкер, Дж., Грейвс–Моррис, П. (1986). *Аппроксимации Паде*. М., Мир.

[3] Уолш, Дж. Л. (1961). *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*. М., ИЛ.

[4] Cuyt, A., Brevik Petersen, V., Verdonk, B., Waadeland, H., Jones, W.B. (2008). *Handbooks of Continued Fractions for Special Functions*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer.

[5] Хованский, А.Н. (1956). *Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа*. М., ГИТТЛ.

[6] Джоунс, У., Трон, В. (1985). *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*. М., Мир.

[7] Thiele, T.N. (1909). *Interpolationsprechnung*. Leipzig, Commission von B. G. Teubner.

[8] Скоробогатько, В.Я. (1983). *Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике*. М., Наука.

[9] Пагіря, М.М. (2016). *Наближення функцій ланцюговими дробами*. Ужгород, Ґражда.

[10] Flajolet, P. (1980). Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Mathematics, 32*, 125–161.

[11] Komatsu, T. (2019). *Continued fraction expansions of the generating functions of Bernoulli and related numbers*. arXiv preprint arXiv:1904.02330.

[12] Гельфонд, А.О. (1967). *Исчисление конечных разностей*. М., Наука.

[13] Nörlund, N.E. (1924). *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Springer.

[14] Pahirya, M.M. (2019). Representation of a one class functions of two variables by bicontinued fractions. *Researches in Mathematics, 27*(2), 13–27.

[15] Pahirya, M.M., Katsala, R.A. (2009). Equivalence of two methods for construction of regular continued C-fractions. *Ukr. Mat. Zh., 61*(7), 1192–1198.

Відомості про авторів

Михайло Михайлович Пагіря

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

E-Mail: `pahirya@gmail.com`