Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 2, 254 – 274
https://doi.org/10.32782/1810-3200-2022-19-7

Обернена нерівність Полецького в одному класі відображень

Євген О. Севостьянов

(Представлена В.Я. Гутлянським)

Анотація. Досліджено диференційовні майже скрізь відображення, які мають N-властивість Лузіна, N^{-1}-властивість на сферах відносно $(n-1)$-вимірної міри Хаусдорфа та які мають нульову лебегову міру образу точок, де їх якобіан обертається в нуль. Доведено, що такі відображення задовольняють нижню оцінку спотворення типу Полецького в своїй області визначення. Зокрема, якщо гомеоморфізм має обернений з класу Орліча-Соболєва, то за умови Кальдерона на визначальну функцію він задовольняє обернену нерівність Полецького.

2010 MSC. 30C65, 31A15, 31B25.

Ключові слова та фрази. Модулі сімей кривих і поверхонь, обернена нерівність Полецького, відображення зі скінченним та обмеженим спотворенням.

1. Вступ

Одним з методів дослідження класів Соболєва та Орліча–Соболєва є використання оцінок спотворення модуля сімей кривих і поверхонь (див., напр., [8] і [22], див. також [3, 6, 18, 19, 21] і [26]). Зокрема, нижні оцінки спотворення модуля сімей концентричних сфер при відображенні становлять важливу роль при дослідженні їх локальної і межової поведінки. В даній статті мова йде про нерівності в класах, «обернених» до класів Орліча–Соболєва. Ми розглядаємо клас відображень, що можуть не мати обернених, але включає до себе обернені гомеоморфізми з класу Орліча–Соболєва. Слід відзначити, що отримання модульних нерівностей в класах Орліча–Соболєва пов'язано з N-властивістю на майже всіх сферах та диференційовністю майже скрізь (див., напр., [8, теорема 3]). Надалі ці властивості розглядаються як частина означень відповідного класу відображень.

Стаття надійшла в редакцію 24.01.2022

Основним результатом є отримання оберненої нерівності Полецького, тобто, верхньої оцінки модуля сімей кривих у прообразі при відображеннях. Зауважимо, що локальна і межова поведінка відображень з оберненою нерівністю Полецького та їх застосування до проблеми існування розв'язків рівнянь Бельтрамі достатньо докладно вивчена в [24] і [25].

Наведемо необхідні означення та формулювання основного результату. Нехай X та Y – два простори з мірами μ і μ', відповідно. Будемо говорити, що відображення $f : X \to Y$ має *N-властивість Лузіна,* якщо з умови $\mu(E) = 0$ випливає, що $\mu'(f(E)) = 0$. Аналогічно, будемо говорити, що відображення $f : X \to Y$ має *N^{-1}-властивість Лузіна,* якщо умова $\mu'(E) = 0$ тягне, що $\mu(f^{-1}(E)) = 0$. Покладемо в точках диференційовності $x \in D$ відображення f

$$l(f'(x)) = \min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|},$$

$$\|f'(x)\| = \max_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \tag{1.1}$$

$$J(x, f) = \det f'(x).$$

Зафіксуємо число $p > 1$. *Внутрішня* і *зовнішня дилатації відображення f в точці x порядку p* визначаються, відповідно, співвідношеннями

$$K_{I,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в інших випадках} \end{cases},$$

$$K_{O,p}(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{|J(x,f)|}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в інших випадках} \end{cases}.$$

Для відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, множини $E \subset D$ та $y \in \mathbb{R}^n$, визначимо *функцію кратності* $N(y, f, E)$ як кількість прообразів точки y у множині E, тобто

$$N(y, f, E) = \text{card}\,\{x \in E : f(x) = y\},$$

$$N(f, E) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} N(y, f, E).$$

Нехай точка $y \in \mathbb{R}^n$ не належить множині $f(A)$, де A – множина всіх точок, де відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, не має повного диференціалу. Припустимо, що $N(f,D)<\infty$. Тоді покладемо

$$Q(y):=K_{O,p}(y,f^{-1})=\sum_{x\in f^{-1}(y)}K_{I,p}(x,f)\,. \tag{1.2}$$

Нехай $y_0\in\mathbb{R}^n$, $0<r_1<r_2<\infty$ і

$$A=A(y_0,r_1,r_2)=\{y\in\mathbb{R}^n: r_1<|y-y_0|<r_2\}\,. \tag{1.3}$$

Для заданих множин E, $F\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D\subset\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E,F,D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a)\in E,\gamma(b)\in F$ і $\gamma(t)\in D$ при $t\in[a,b]$. Якщо $f:D\to\mathbb{R}^n$ – задане відображення, $y_0\in\overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, і $0<r_1<r_2<r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)$ позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma)\in\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),A(y_0,r_1,r_2))$. Нехай $Q_*:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція, а $M_\alpha(\Gamma)$ позначає α-модуль сімей кривих Γ (див. [28, розд. 6]). Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького в точці* $y_0\in\overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$ *відносно* α*-модуля* якщо співвідношення

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2))\leqslant\int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)}Q_*(y)\cdot\eta^\alpha(|y-y_0|)\,dm(y) \tag{1.4}$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такій, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,. \tag{1.5}$$

Справедлива наступна

Теорема 1.1. *Нехай $p>n-1$, $f:D\to\mathbb{R}^n$ – диференційовне майже скрізь відображення, яке має N-властивість Лузіна відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^n$, таке що $N(f,D)<\infty$, і нехай $y_0\in\overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, $r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|>0$. Нехай, крім того, $\overline{D}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$,*

$$\overline{f^{-1}(S(y_0,r_1))}\cap\overline{f^{-1}(S(y_0,r_2))}=\varnothing \tag{1.6}$$

для всяких $0<r_1<r_2<r_0$ і, крім того,

$$m(f(\{x\in D: J(x,f)=0\}))=0\,. \tag{1.7}$$

Нехай $0<\varepsilon<\varepsilon_0<r_0$. Припустимо, крім того, що f-має N^{-1}-властивість на $S(y_0,r)$ при майже всіх $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$ відносно міри

Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ *на* $S(y_0, r)$. *Якщо функція* Q, *визначена в* (1.2), *належить класу* $L^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(D))$, *то відображення* f *задовольняє обернену нерівність Полецького в точці* y_0 *при кожних* $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$ *і* $Q_*(y) := N^{\alpha}(f, D) \cdot Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(y)$.

Наслідок 1.1. *Твердження теореми 1.1 має місце, якщо в ньому замість умови* (1.7) *вимагати більш сильну умову:* $J(x, f) \neq 0$ *майже скрізь.*

Наслідок 1.2. *Твердження теореми 1.1 має місце, якщо в ньому замість умови* (1.6) *вимагати більш сильну умову:* f *має неперервне продовження на* ∂D.

2. Спотворення сімей множин при відображеннях

Наступні важливі відомості, які стосуються ємності пари множин відносно області, можуть бути знайдені в роботі В. Цимера [30]. Нехай G – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ і C_0, C_1 – непересічні компактні множини, які належать замиканню G. Покладемо $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ і $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$. Для числа $p > 1$ визначимо *p-ємність пари* C_0, C_1 *відносно замикання* G рівністю

$$C_p[G, C_0, C_1] = \inf \int\limits_R |\nabla u|^p \, dm(x),$$

де точна нижня межа береться по всіх функціях u, неперервних у R^*, $u \in ACL(R)$, таких що $u = 1$ на C_1 і $u = 0$ на C_0. Вказані функції називаються *допустимими* для $C_p[G, C_0, C_1]$. Будемо говорити, що множина $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ *розділяє* C_0 *і* C_1 *у* R^*, якщо $\sigma \cap R$ замкнено в R і знайдуться непересічні множини A і B, відкриті відносно $R^* \setminus \sigma$, такі що $R^* \setminus \sigma = A \cup B$, $C_0 \subset A$ і $C_1 \subset B$. Нехай Σ позначає клас всіх множин, які розділяють C_0 и C_1 в R^*. Для числа $p' = p/(p-1)$ визначимо величину

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = \inf_{\rho \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{p'} dm(x) \tag{2.1}$$

де запис $\rho \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ позначає, що ρ – невід'ємна борелева функція в $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\int\limits_{\sigma \cap R} \rho \, d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1 \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,. \tag{2.2}$$

Зауважимо, що згідно результату Цимера

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = C_p[G, C_0, C_1]^{-1/(p-1)}, \tag{2.3}$$

див. [30, теорема 3.13] при $p = n$ і [31, с. 50] при $1 < p < \infty$, крім того, за результатом Хессе

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) = C_p[D, E, F], \tag{2.4}$$

де $(E \cup F) \cap \partial D = \varnothing$ (див. [4, теорема 5.5]). Шлик показав, що вимогу $(E \cup F) \cap \partial D = \varnothing$ може буде знято, іншими словами, рівність (2.4) виконується для довільних непересічних непорожніх компактних множин $E, F \subset \overline{D}$ (див. [27, теорема 1]).

Нехай S – поверхня, тобто, $S : D_s \to \mathbb{R}^n$ – неперервне відображенням відкритої множини $D_s \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Покладемо $N(y, S) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in D_s : S(x) = y\}$ *функцію кратності* поверхні S відносно точки $y \in \mathbb{R}^n$. Для борелевої множини $B \subset \mathbb{R}^n$ її $(n-1)$-вимірна хаусдорфова площа, асоційована з поверхнею S, визначається за формулою $\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^{n-1}(B) = \int\limits_B N(y, S)\, d\mathcal{H}^{n-1}y$, див. [2, пункт 3.2.1]. Для борелевої функції $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ її інтеграл над поверхнею S визначається за формулою $\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(y, S)\, d\mathcal{H}^{n-1}y$. Надалі $J_k f(x)$ позначає k-вимірний якобіан відображення f в точці x (див. [2, § 3.2, гл. 3]).

Нехай $n \geqslant 2$, і Γ – сім'я поверхонь S. Борелеву функцію $\rho \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будемо назвати *допустимою* для сім'ї Γ, скор. $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{2.5}$$

для будь-якої поверхні $S \in \Gamma$. Для заданого $p \in (1, \infty)$ назвемо *p-модулем* сім'ї Γ величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x).$$

Мы також покладемо $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$. Будемо говорити, що деяка властивість P виконується для *p-майже всіх поверхонь* області D, якщо ця властивість виконується для всіх поверхонь у D, крім, може бути, деякої їх підсім'ї, p-модуль якої дорівнює нулю. Якщо мова йде про конформний модуль $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$, префікс "n" у виразі "n-майже всіх", як правило, забирається. Будемо говорити, що вимірна за Лебегом функція $\rho \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ є *p-узагальнено допустимою* для сім'ї Γ поверхонь S в $\mathbb{R}^n$, скор. $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\,\Gamma$, якщо співвідношення (2.5) виконано для p-майже всіх поверхонь S сім'ї Γ. Доведення наступної леми ґрунтується на підході, використаному при встановлені взаємозв'язку класів Орліча–Соболєва з нижніми оцінками спотворення модуля сімей поверхонь (див., напр., [8, теорема 5] та [22, теорема 4]).

Лема 2.1. *Нехай $p > n-1$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ – диференційовне майже скрізь відображення, яке має N-властивість Лузіна відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^n$, таке що $N(f, D) < \infty$ і нехай $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, $r_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0| > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < r_0$. Нехай, крім того, нехай виконано умову* (1.7). *Позначимо через Σ_ε сім'ю всіх множин вигляду*

$$\{f^{-1}(S(y_0, r))\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \tag{2.6}$$

Припустимо, крім того, що f-має N^{-1}-властивість на $S(y_0, r)$ при майже всіх $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$. Тоді

$$\widetilde{M}_{\frac{p}{n-1}}(\Sigma_\varepsilon) \geqslant \frac{1}{N^{\frac{p}{n-1}}(f, D)} \inf_{\rho \in \mathrm{ext}\,\mathrm{adm}_p f(\Sigma_\varepsilon)} \int\limits_{f(D) \cap A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{\rho^p(y)}{Q(y)}\, dm(y)\,, \tag{2.7}$$

де Q визначена співвідношенням (1.2).

Доведення. Позначимо через B (борелеву) множину всіх точок $x \in D$, де відображення f має повний диференціал $f'(x)$ і $J(x, f) \neq 0$. За теоремою Кірсбрауна та з огляду на єдиність апроксимативного диференціалу (див., напр., [2, 2.10.43 і теорема 3.1.2]) випливає, що множина B є зчисленним об'єднання борелевих множин B_k, $k = 1, 2, \ldots$, таких що відображення $f_k = f|_{B_k}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами (див. [2, лема 3.2.2 і теореми 3.1.4 і 3.1.8]). Без обмеження загальності, можна вважати, що множини B_k попарно не перетинаються. Позначимо також через B_* множину всіх точок $x \in D$, де f має повний диференціал, проте $J(x, f) = 0$.

Оскільки множина $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ має лебегову міру нуль, а відображення f має N-властивість Лузіна, то $m(f(B_0)) = 0$. За [12, теорема 9.3] $\mathcal{A}_{S_r}(f(B_0)) = 0$ для p-майже всіх сфер $S_r := S(y_0, r) \cap f(D)$ с центром в точке y_0, де "майже всіх" розуміється в сенсі p-модуля сімей поверхонь. Зауважимо, що $\psi(r) := \mathcal{H}^{n-1}(f(B_0) \cap S_r)$ є вимірною за Лебегом функцією з огляду на теорему Фубіні ([17, розд. 8.1, гл. III]), тому множина $E \subset \mathbb{R}$ усіх $r \in \mathbb{R}$ таких, що $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0) \cap S_r) = 0$, є вимірною за Лебегом. Тоді за [5, лема 4.1] $\mathcal{A}_{S_r}(f(B_0)) = 0$ для майже всіх сфер $S_r := S(y_0, r)$ с центром в точке y_0, де "майже всіх" розуміється в сенсі одновимірної міри Лебега відносно параметру $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Тоді за умовою леми

$$\mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(S_r) \cap B_0) = 0 \tag{2.8}$$

для майже всіх $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Міркуючи аналогічно, маємо:

$$\mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(S_r) \cap B_*) = 0 \tag{2.9}$$

для майже всіх $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Нехай $\rho^{n-1} \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma_\varepsilon$ і

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y) \cap D \setminus B_0} \rho_*(x)\,, & y \in f(D) \setminus f(B \cap B_*) \\ 0\,, & y \in f(B \cap B_*) \end{cases}, \tag{2.10}$$

де

$$\rho_*(x) = \begin{cases} \rho(x)/l(f'(x)), & x \in D \setminus B_0, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Зауважимо, що $\tilde{\rho} = \sup \rho_k$, де

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \rho_*(f_k^{-1}(y)), & y \in f(B_k), \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{2.12}$$

і кожне відображення $f_k = f|_{B_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ є ін'єктивним. Отже, функція $\tilde{\rho}$ є борелевою (див., напр., [17, теорема I (8.5)]).

Нехай $f^{-1}(S_r) := S_r^*$. Тоді

$$\int\limits_{S_r \cap f(D)} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y)\, d\mathcal{A}_* = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y) \chi_{S_r \cap f(D)}(y)\; d\mathcal{H}^{n-1}y$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{N(f,D)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y) \chi_{S_r \cap f(D)}(y) N(y, f, B_k \cap S_r^*)\, d\mathcal{H}^{n-1}y$$

$$= \frac{1}{N(f,D)} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} {\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y)) N(y, f, B_k \cap S_r^*)\, d\mathcal{H}^{n-1}y \tag{2.13}$$

$$= \frac{1}{N(f,D)} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{f(B_k \cap S_r^*)} {\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^{n-1}y\,.$$

Враховуючи (2.8) і (2.9), за [2, наслідок 3.2.20] при $m = n-1$ ми отримаємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{f(B_k\cap S_r^*)}{\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y))\,d\mathcal{H}^{n-1}y$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k\cap S_r^*}{\rho_*}^{n-1}(x)\ J_{n-1}f(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}x$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k\cap S_r^*}\frac{\rho^{n-1}(x)}{l^{n-1}(f'(x))}\,J_{n-1}f(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}x$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k\cap S_r^*}\rho^{n-1}(x)\ d\mathcal{H}^{n-1}x=\int\limits_{f^{-1}(S_r)}\rho^{n-1}(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}x\geqslant 1 \qquad (2.14)$$

для майже всіх $S_r=f\circ S_r^*\in f(\Sigma_\varepsilon)$. З (2.14) випливає, що $N^{\frac{1}{n-1}}(f,D)\tilde{\rho}\in \operatorname{ext}\operatorname{adm}_p f(\Sigma_\varepsilon)$ (див. [5, лема 4.1]).

Оскільки $\tilde{\rho}^p(y)=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\rho_k^p(y)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k^p(y)$ і $m(f(B_*))=m(f(B_0))=0$, то

$$\int\limits_{f(D)}\frac{\tilde{\rho}^p(y)}{Q(y)}\,dm(y)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{f(B_k)}\frac{\rho_k^p(y)}{Q(y)}\,dm(y)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{f(B_k)}\frac{\rho_k^p(y)}{K_{I,p}(f_k^{-1}(y),f)}\,dm(y)\,.$$

Використовуючи заміну змінних на кожному B_k, $k=1,2,\ldots$, див., напр., [2, теорема 3.2.5], будемо мати:

$$\int\limits_{f(B_k)}\frac{\rho_k^p(y)}{K_{I,p}(f_k^{-1}(y),f)}\,dm(y)$$

$$=\int\limits_{f(B_k)}\frac{\rho^p(f_k^{-1}(y))}{l^p(f'(f_k^{-1}(y)))K_{I,p}(f_k^{-1}(y),f)}\,dm(y)$$

$$=\int\limits_{B_k}\frac{\rho^p(x)\cdot|J(x,f)|}{l^p(f'(x))K_{I,p}(x,f)}\,dm(x)=\int\limits_{B_k}\rho^p(x)\,dm(x)\,.$$

З останніх співвідношень випливає, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\widetilde{\rho}^p(y)}{Q(y)}\,dm(y) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k} \rho^p(x)\,dm(x)\,. \tag{2.15}$$

Сумуючи (2.15) по $k=1,2,\ldots$ і використовуючи зчисленну адитивність інтеграла Лебега (див., напр., [17, теорема I.12.3]), ми отримаємо, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{1}{Q(y)}\widetilde{\rho}^p(y)\cdot\,dm(y) \leqslant \int\limits_{D} \rho^p(x)\,dm(x)\,. \tag{2.16}$$

Переходячи в (2.16) до inf по всіх функціях $\rho^{n-1}\in\widetilde{\rm adm}\,\Sigma_{\varepsilon}$, ми отримаємо, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{1}{Q(y)}\widetilde{\rho}^p(y)\cdot\,dm(y) \leqslant \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,,$$

звідки

$$\int\limits_{f(D)} \frac{N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)}{Q(y)}\widetilde{\rho}^p(y)\cdot\,dm(y) \leqslant N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)\cdot\widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,.$$

Позначимо $\widetilde{\rho}_1(y):=N^{\frac{1}{n-1}}(f,D)\cdot\widetilde{\rho}(y)$, тоді з останнього співвідношення випливає, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\widetilde{\rho}_1^p(y)}{Q(y)}\,dm(y) \leqslant N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)\cdot\widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,. \tag{2.17}$$

Оскільки за доведеним вище $\widetilde{\rho}_1(y)=N^{\frac{1}{n-1}}(f,D)\tilde{\rho}\in{\rm ext}\,{\rm adm}_p\,f(\Sigma_{\varepsilon})$, то з (2.17) і випливає бажане співвідношення (2.7). Лему доведено. $\Box$

Маємо наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *Нехай $p>n-1$, $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$ – диференційовне майже скрізь відображення, яке має N та N^{-1}-властивості Лузіна відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^n$, і нехай $y_0\in\overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, $r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|>0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0<r_0$. Позначимо через Σ_{ε} сім'ю всіх множин у (2.6). Припустимо, крім того, що f-має N^{-1}-властивість на $S(y_0,r)$ при майже всіх $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0,r)$. Тоді виконується співвідношення (2.7), де Q визначена в (1.2).*

Доведення. Оскільки f має N^{-1}-властивість Лузіна, за теоремою Пономарьова маємо, що $J(x,f)\neq 0$ майже скрізь (див., напр., [14, теорема 1]), ми можемо вважати, що $J(x,f)\neq 0$ на кожному B_k, $k=1,2,\ldots$. Тоді, оскільки відображення f має N-властивість, то умову (1.7) також виконано. Бажане твердження, в такому випадку, випливає з леми 2.1. $\square$

3. Доведення головного результату

Нехай $Q_*: D\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Через $q_{x_0}(r)$ ми позначаємо середнє інтегральне значення $Q_*(x)$ над сферою $|x-x_0|=r$,

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r} Q_*(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{3.1}$$

де ω_{n-1} – площа ($(n-1)$-вимірна міра Хаусдорфа) одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$. Нижче ми також вважаємо, що виконуються наступні стандартні співвідношення: $a/\infty=0$ при $a\neq\infty$, $a/0=\infty$ при $a>0$ і $0\cdot\infty=0$ (див., напр., [17, § 3, розд. I]). Наступний висновок отримано В.І. Рязановим спільно з автором у випадку $p=n$, див., напр., [12, лема 7.4] або [16, лема 2.2]. У випадку довільного $p>1$ див., напр., [20, лема 2].

Твердження 3.1. *Нехай $p>1$, $n\geqslant 2$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $r_1,r_2\in\mathbb{R}$, $r_1,r_2>0$, $Q_*(x)$ – вимірна за Лебегом функція, $Q_*:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$, $Q_*\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Покладемо*

$$I=I(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,,$$

і нехай $q_{x_0}(r)$ визначено співвідношенням (3.1). *Тоді*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\leqslant\int\limits_{A}Q_*(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{3.2}$$

для довільної вимірної функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, такої що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr=1\,, \tag{3.3}$$

де $A=A(x_0,r_1,r_2)$ визначено співвідношенням (1.3).

Зауваження 3.1. Зауважимо, що якщо (3.2) виконується для будь-якої функції η з умовою (3.3), то це ж співвідношення виконується і для будь-якої функції η з умовою (1.5). Справді, нехай η – невід'ємна вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє умову (1.5). Якщо $J := \int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(t)\,dt < \infty$, то ми покладемо $\eta_0 := \eta/J$. Очевидно, функція η_0 задовольняє умову (3.3). Тоді співвідношення (3.2) тягне, що

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} \leqslant \frac{1}{J^p}\int\limits_A Q_*(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \leqslant \int\limits_A Q_*(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)\,,$$

бо $J \geqslant 1$. Нехай тепер $J = \infty$. Тоді згідно [17, теорема I.7.4] функція η є границею неспадної послідовності невід'ємних простих вимірних функцій η_m, $m = 1, 2, \ldots$. Покладемо $J_m := \int\limits_{r_1}^{r_2}\eta_m(t)\,dt < \infty$ і $w_m(t) := \eta_m(t)/J_m$. Тоді з (3.3) випливає, що

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} \leqslant \frac{1}{J_m^p}\int\limits_A Q_*(x)\cdot\eta_m^p(|x-x_0|)\,dm(x)$$

$$\leqslant \int\limits_A Q_*(x)\cdot\eta_m^p(|x-x_0|)\,dm(x)\,, \tag{3.4}$$

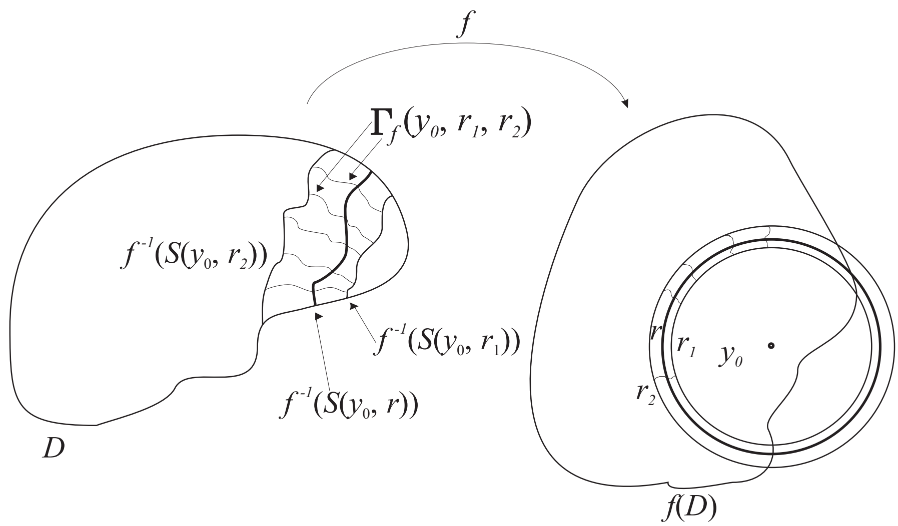
бо $J_m \to J = \infty$ при $m \to \infty$ (див. [17, лема I.11.6]). Зауважимо, що функціональна послідовність $f_m(x) = Q_*(x)\cdot\eta_m^p(|x-x_0|)$, $m = 1, 2\ldots$ є невід'ємною, монотонно зростаючою і такою, що збігається майже скрізь до функції $f(x) := Q_*(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)$. Тоді за теоремою Лебега про монотонну збіжність (див. [17, теорема I.12.6]) можливий перехід до границі в правій частині нерівності (3.4), який дає нам бажану нерівність (3.2).

Доведення теореми 1.1. Зафіксуємо $y_0 \in \overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, і $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0 < r_0 := \sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|$. Позначимо

$$C_0 := \overline{f^{-1}(S(y_0, r_1))}\,, \quad C_1 := \overline{f^{-1}(S(y_0, r_2))}$$

(див. малюнок 3). Зауважимо, що C_0 і C_1 є неперетинними компактами в $\overline{D}$ як замкнені підмножини компакту $\overline{D}$ і завдяки умові (1.6).

Доведемо, що C_1 і C_2 непорожні з огляду на вибір r_0, ε_0, r_1 та r_2. Доведемо, наприклад, що $C_1 \neq \varnothing$. Дійсно, за означенням числа r_0 існують $x_{r_1}^1 \in f(D)$ і $x_{r_1}^2 \in f(D)$ такі, що $|x_{r_1}^1 - y_0| < r_1$ і $|x_{r_1}^2 - y_0| > r_1$. Оскільки точки $x_{r_1}^1$ і $x_{r_1}^2$ лежать у зв'язній множині $f(D)$, то можна



Мал. 1. До доведення теореми 1.1

з'єднати ці точки деякою кривою γ в $f(D)$. Оскільки $|\gamma| \cap B(y_0, r_1) \neq \varnothing \neq (\mathbb{R}^n \setminus B(y_0, r_1)) \cap |\gamma|$, то за [10, теорема 1.I, гл. 5, § 46] існує точка на γ, що належить сфері $S(y_0, r_1)$. Отже, $S(y_0, r_1) \cap f(D) \neq \varnothing$, тому $f^{-1}(S(y_0, r_1)) \neq \varnothing$. Це і означає, що $C_1 \neq \varnothing$. Аналогічно можна довести, що $C_2 \neq \varnothing$.

Покажемо, що множина $\sigma_r := f^{-1}(S(y_0, r))$ відділяє C_0 від C_1 в D при довільному $r \in (r_1, r_2)$. Дійсно, σ_r є замкненим в D як прообраз замкненої множини $S(y_0, r)$ при неперервному відображенні f (див., напр., [9, теорема 1.IV.13, гл. 1]). Зокрема, σ_r також замкнено і відносно $R := D \setminus (C_0 \cup C_1)$. Покладемо

$$A := f^{-1}(B(y_0, r)) \cup \overline{f^{-1}(S(y_0, r_1))}$$

і

$$B := (D \setminus \overline{f^{-1}(B(y_0, r))}) \cup \overline{f^{-1}(S(y_0, r_2))}\,.$$

Зауважимо, що A і B не порожні за вибором r_0, r_1, r_2 та r. Оскільки відображення f є неперервним, $f^{-1}(B(y_0, r))$ і $(D \setminus \overline{f^{-1}(B(y_0, r))})$ є відкритими в D. Покажемо, що A і B є відкритими в

$$R^* := R \cup C_0 \cup C_1 = D \cup \overline{f^{-1}(S(y_0, r_1))} \cup \overline{f^{-1}(S(y_0, r_2))}\,.$$

Нехай, наприклад, $x_0 \in A$. Якщо $x_0 \in f^{-1}(B(y_0, r))$, то в силу відкритості $f^{-1}(B(y_0, r))$ в D, точка x_0 має окіл, що міститься в R^*. Нехай тепер $x_0 \in \overline{f^{-1}(S(y_0, r_1))}$. Тоді множина $A_* := B(x_0, \varepsilon_*) \cap R^*$ є відкритою в R^* і містить точку x_0 при будь-якому $\varepsilon_* > 0$. Таким чином, A відкрито в R^*. Аналогічно можна показати, що B відкрито в

R^*. Зауважимо, що $A\cap B=\varnothing$, причому $R^*\setminus\sigma_r=A\cup B$. Нехай Σ_{r_1,r_2} – сім'я всіх множин, які розділяють C_0 і C_1 в R^*. В такому випадку, за рівностями Цимера і Хессе (2.3) та (2.4), відповідно, будемо мати:

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2))=(\widetilde{M}_{p/(n-1)(\Sigma_{r_1,r_2})})^{1-\alpha}\,, \tag{3.5}$$

де $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$. Тоді за лемою 2.1 з рівності (3.5) маємо, що

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)) \tag{3.6}$$

$$\leqslant\left(\inf_{\rho\in\mathrm{ext\,adm}\,f(\Sigma_\varepsilon)}\int\limits_{f(D)\cap A(y_0,r_1,r_2)}\frac{\rho^p(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)\cdot Q(y)}\,dm(y)\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}},$$

де Q визначена співвідношенням (1.2). Використовуючи другу виносну формулу в доведенні теореми 9.2 у [12], будемо мати:

$$\inf_{\rho\in\mathrm{ext\,adm}\,f(\Sigma_\varepsilon)}\int\limits_{f(D)\cap A(y_0,r_1,r_2)}\frac{\rho^p(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)\cdot Q(y)}\,dm(y)$$

$$=\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\inf_{\alpha\in I(r)}\int\limits_{S(y_0,r)\cap f(D)}\frac{\alpha^q(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)\cdot Q(y)}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right)dr\,, \tag{3.7}$$

де $q=\frac{p}{n-1}$, а $I(r)$ позначає множину всіх вимірних невід'ємних функцій на сфері $S(y_0,r)\cap f(D)$ таких, що $\int\limits_{S(y_0,r)\cap f(D)}\alpha(x)\,\mathcal{H}^{n-1}=1$. Тоді обираючи $X=S(y_0,r)\cap f(D)$, $\mu=\mathcal{H}^{n-1}$ і $\varphi=\frac{1}{Q}|_{S(y_0,r)\cap f(D)}$ у [12, лема 9.2], будемо мати:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\inf_{\alpha\in I(r)}\int\limits_{S(y_0,r)\cap f(D)}\frac{\alpha^q(y)}{Q(y)}\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right)dr=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_s(r)}\,, \tag{3.8}$$

де $\|Q\|_s(r)=\left(\int\limits_{S(y_0,r)\cap f(D)}Q^s(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\right)^{1/s}$ і $s:=\frac{n-1}{p-n+1}$. Отже, з (3.6), (3.7) і (3.8) ми отримаємо, що

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2))\leqslant N^\alpha(f,D)\cdot\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_s(r)}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}}=$$

$$= \frac{N^{\alpha}(f,D)\cdot\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{y_0}^{1/(\alpha-1)}(r)}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}}} = \frac{N^{\alpha}(f,D)\cdot\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{y_0}^{1/(\alpha-1)}(r)}\right)^{\alpha-1}}, \qquad (3.9)$$

де $\widetilde{q}_{y_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(y_0,r)}\widetilde{Q}\,d\mathcal{H}^{n-1}$ і $\widetilde{Q}(y) = \begin{cases} Q^s(y)\,, & y\in f(D)\,,\\ 0\,, & y\notin f(D)\end{cases}$.
Остаточно, з (3.9), твердження 3.1 і зауваження 3.1 випливає, що співвідношення

$$M_{\alpha}(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2))$$
$$\leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^{\alpha}(f,D)\cdot Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(y)\cdot\eta^{\alpha}(|y-y_0|)\,dm(y)$$

виконується для функції $Q(y) = K_{O,p}(y,f^{-1}) := \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} K_{I,p}(x,f)$ і будь-якої невід'ємної вимірної за Лебегом функції η з умовою (1.5), що і треба було довести. $\Box$

Доведення наслідку 1.1 безпосередньо випливає з теореми 1.1 та додаткових аргументів, викладених при доведенні наслідку 2.1. $\Box$

Доведення наслідку 1.2. Покажемо, що за наявності неперервного продовження f на ∂D випливає умова (1.6). Дійсно, якщо існує $z_0\in\overline{f^{-1}(S(y_0,r_1))}\cap\overline{f^{-1}(S(y_0,r_2))}$, то існують і послідовності $x_k\to z_0$ при $k\to\infty$, $x_k\in f^{-1}(S(y_0,r_1))$, $k=1,2,\ldots$, і $y_k\to z_0$ при $k\to\infty$, $y_k\in f^{-1}(S(y_0,r_2))$, $k=1,2,\ldots$. За умовою відображення f має неперервне продовження в z_0. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) := A_0$. Оскільки $f(x_k)\in S(y_0,r_1)$ і $f(y_k)\in S(y_0,r_2)$, причому, $S(y_0,r_1)$ і $S(y_0,r_2)$ – замкнені множини в $\mathbb{R}^n$, то $A_0\in S(y_0,r_1)\cap S(y_0,r_2)$. Отримана суперечність вказує на невірність припущення $z_0\in\overline{f^{-1}(S(y_0,r_1))}\cap\overline{f^{-1}(S(y_0,r_2))}$. Решта випливає з теореми 1.1. $\Box$

Зауваження 3.2. Якщо $y_0\in f(D)$ – внутрішня точка множини $f(D)$ і $0<r_1<r_2<\operatorname{dist}(y_0,\partial f(D))$, твердження теореми 1.1 залишається справедливим, при цьому, умову (1.6) можна забрати з формулювання. Дійсно, міркуючи в цьому випадку саме так, як при доведенні теореми 1.1, маємо зазначену умову (1.6) автоматично виконаною. Решта доведення не зміниться.

Зауваження 3.3. Зауважимо, що достатньо докладно локальну і межову поведінку відображень описано в [25], що дає можливість перенести ці результати на відображення, які приймають участь в теоремі 1.1. Як відомо, відображення з оберненою нерівністю Полецького є частиною означення квазіконформності у випадку обмеженої функції Q (див. [28, розд. 13.1]), а в необмеженому випадку нерівності типу (1.4) були отримані різними авторами за різних умов щодо Q (див., напр., [1, лема 3.1], [7, лема 3.1], [12, теорема 8.5] і [23, теорема 1.3]). Зокрема, твердження, наведене нижче, безпосередньо випливає з теореми 1.1, зауваження 3.2 і [24, теорема 4.1].

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, числа $N \in \mathbb{N}$ і вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q(y) \equiv 0$ при $y \in \mathbb{R}^n \setminus D'$, позначимо через $\mathfrak{R}_{Q,N}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f : D \to D'$, які є диференційовними майже скрізь, задовольняють N-властивість Лузіна по відношенню до міри Лебега в $\mathbb{R}^n$, задовольняють співвідношення (1.7) і мають N^{-1}-властивість на $S(y_0, r) \cap D'$ для майже всіх $r \in (\varepsilon, r_0)$ по відношенню до міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$ при всякому $y_0 \in D'$ і $r_0 = \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0| > 0$ таких, що

1) $N(f, D) \leqslant N$,
2) $K_{O,n}(y, f^{-1}) = \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} K_{I,n}(x, f) \leqslant Q(y)$ при всякому $y \in D'$.

Якщо $Q^{n-1} \in L^1(D')$, область D' є обмеженою і K – компакт у D, то нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{C}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_*}{2|x-y|}\right)} \tag{3.10}$$

виконується для всяких $x, y \in K$ і всіх $f \in \mathfrak{R}_{Q,N}(D, D')$, де $C = C(n, N, K, \|Q\|_1, D, D') > 0$ – деяка стала, залежна тільки від n, N, K і $\|Q^{n-1}\|_1$, $\|Q^{n-1}\|_1$ позначає L^1-норму функції Q^{n-1} в D', а $r_* = d(K, \partial D)$.

Зауваження 3.4. Припустимо, що гомеоморфізм g належить класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в деякій області $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, а функція φ задовольняє умову Кальдерона

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{3.11}$$

при деякому $t_* \in (0, \infty)$ (див., напр., [8]). Тоді за умови, що $K_{O,n}(y, g) \in L^{n-1}(D')$ відображення $f = g^{-1}$ задовольняє співвідношення (1.4) в $D' = f(D)$ в кожній точці $y_0 \in D'$ при $\alpha = n$, всіх $0 < r_1 < r_2 < r_0$ і $r_0 = \operatorname{dist}(y_0, \partial D')$ (див. [8, наслідок 9]). Зауважимо, що вказаний результат може бути також отриманий як наслідок з основної теореми 1.1 за деяких “додаткових умов”: область D' є обмеженою; f має N-властивість Лузіна відносно лебегової міри в $\mathbb{R}^n$ та задовольняє умову $m(f(\{x \in D : J(x, f) = 0\})) = 0$. З огляду на сказане вище, ці умови є зайвими щодо гомеоморфізмів, проте, нам важко щось сказати про їх необхідність у випадку відображень з розгалуженням. Слід зауважити, що N^{-1}-властивість відображення f на $S(y_0, r)$ при майже всіх $r \in (\varepsilon, r_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$ є результатом наслідку 4 в [8] з урахуванням умови (3.11).

4. Приклади

Нагадаємо, що відображення $f : D \to D_*$, $f(D) = D_*$, називається *замкненим,* якщо f переводить довільну множину A, замкнену відносно D, у множину $f(A)$, замкнену відносно D_*. Доведемо спочатку наступне твердження.

Твердження 4.1. *Припустимо, що $f : D \to \mathbb{R}^n$ – локальний гомеоморфізм, який є замкненим в D. Тоді для кожної точки $y \in f(D)$ знайдеться число $r_y > 0$ таке, що*

$$f^{-1}(B(y, r_y)) = \bigcup_{i=1}^{N_0} U_i, \tag{4.1}$$

де U_i – області в D і f гомеоморфно відображає U_i на $B(y, r_y)$, крім того, N_0 – деяке число таке, що $1 \leqslant N_0 \leqslant N(f, D)$.

Доведення. Зауважимо, що $N(f, D) < \infty$, див. [13, теорема 2.8]. Оберемо r_y так, щоб $\overline{B(y, r_y)} \subset f(D)$. Тоді, оскільки відображення f є відкритим, дискретним і замкненим, то воно є власним, тобто, прообраз будь-якого компакту в $f(D)$ при відображенні f є компактом у D (див. [29, теорема 3.3]). Тоді $f^{-1}(B(y, r_y))$ є відкритою множиною, кожна компонента котрої має компактне замикання в D, причому f гомеоморфно відображає кожну з цих компонент на $B(y, r_y)$ (див. [11, лема 2.2]). Зауважимо, що $f^{-1}(y)$ складається не більше, ніж з $N(f, D)$ точок, кожна з котрих належить одній і тільки одній компоненті множини $f^{-1}(B(y, r_y))$. З цього випливає, що кількість таких компонент не може бути більшою ніж $N(f, D)$, тобто, виконується співвідношення (4.1). Твердження 4.1 доведено. □

Нижче побудовані приклади відображень, які задовольняють умови основної теореми 1.1.

Приклад 4.1. В одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ розглянемо відображення $f_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$. Доведемо, що це відображення задовольняє всі умови теореми 1.1 при $p = n = 2$. Очевидно, f_m є диференційовним в усіх точках $\mathbb{D}$ як аналітична функція. Також f_m

має N-властивість Лузіна як відображення класу $C^1(\mathbb{D})$. Умова (1.6) виконується з огляду на те, що f_m має неперервне продовження на $\partial\mathbb{D}$. Очевидно, $\overline{\mathbb{D}}$ – компакт у $\mathbb{C}$ і $N(f,D)=m<\infty$. Умова (1.7) виконана з огляду на те, що відображення f_m має нульовий якобіан лише в точці $z_0=0$. Шляхом прямих обчислень можна переконатися в тому, що $K_{I,n}(z,f_m)=1$, причому функція Q в (1.2) обчислюється як $Q(y):=m$ при $y\ne 0$ і $Q(0)=0$.

Покажемо, що f_m має N^{-1}-властивість на $S(y_0,r)$ для всіх $y_0\in\overline{\mathbb{D}}$ і майже всіх $r\in(0,r_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^1$ на $S(y_0,r)$, де $r_0=\sup\limits_{y\in\mathbb{D}}|y-y_0|$. Зафіксуємо таку точку y_0, і будемо вважати, що $r\ne|y_0|$. Тоді в околі кожної точки $y\in S(y_0,r)\cap\mathbb{D}$ відображення f_m є локальним гомеоморфізмом. Покладемо $D_1:=\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Зауважимо, що f_m відображає D_1 на себе, причому, f_m зберігає межу області D_1 і тому є замкненим відображенням в D_1 (див. [29, теорема 3.3]). За твердженням 4.1 кожна точка $y\in S(y_0,r)\cap D_1$ має окіл $B(y,r_y)$ такий, що $f_m^{-1}(B(y,r_y))=\bigcup\limits_{i=1}^{N_m}U_{y_i}$, причому f_m гомеоморфно відображає U_{y_i} на $B(y,r_y)$. Зауважимо, що $N_m=m$, бо для заданого відображення f_m прообраз кожної точки $y\ne 0$ містить рівно m різних точок. Зауважимо, що

$$S(y_0,r)\cap D_1=\bigcup\limits_{y\in S(y_0,r)\cap D_1}B(y,r_y)\cap S(y_0,r)\cap D_1\,.$$

За теоремою Ліндельофа (див. [9, пункт XI, гл. I, § 5]) останнє співвідношення можна переписати в вигляді

$$S(y_0,r)\cap D_1=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B(y_k,r_{y_k})\cap S(y_0,r)\cap D_1\,, \tag{4.2}$$

де $y_k\in S(y_0,r)\cap D_1$. Нехай E – множина $\mathcal{H}^1$-міри нуль на $S(y_0,r)$. Тоді з огляду на співвідношення (4.2) будемо мати, що

$$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B(y_k,r_{y_k})\cap E\,, \tag{4.3}$$

звідки будемо мати, що

$$f_m^{-1}(E\cap D_1)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f_m^{-1}\left(B(y_k,r_{y_k})\cap E\right)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{m}f_m^{-1}(E)\cap U_{ki}\,, \tag{4.4}$$

де U_{ki} – деякі області в $\mathbb{D}$, які відображення f_m гомеоморфно переводить у $B(y_k,r_{y_k})$.

Оскільки f_m є гомеоморфізмом U_{ki} на $B(y_k, r_{y_k})$, $i = 1, 2, \ldots m$, то прообраз $f_m^{-1}(E) \cap U_{ki}$ можна інтерпретувати як образ множини E при оберненому відображенні $f_{mi,k}^{-1} := (f_m|_{U_{ki}})^{-1}$. Зауважимо, що ці відображення явно обчислюються за формулою Муавра: $f_{ml,k}^{-1}(w) = |w|^{1/m} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi l}{m}}$, $l = 1, 2, \ldots m$, $k \in \mathbb{N}$. Шляхом безпосередніх обчислень можна переконатися, що відображення $f_{mi,k}^{-1}$ мають локально обмежені частинні похідні, тому вони є локально ліпшицевими і мають N-властивість відносно хаусдорфової міри будь-якого порядку (див. [2, теорема 3.2.5]). В такому випадку, за формулою (4.4) будемо мати:

$$\mathcal{H}^1(f_m^{-1}(E)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1\left(f_m^{-1}\left(B(y_k, r_{y_k}) \cap E\right)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^1\left(f_m^{-1}(E) \cap U_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^1\left(f_{mi,k}^{-1}(E)\right) = 0\,. \qquad (4.5)$$

Отже, відображення f_m задовольняє всі умови теореми 1.1, причому в якості функції $Q_*(y)$ у (1.4) можна взяти m^3.

Приклад 4.2. Міркуючи аналогічно до прикладу 4.1 можна показати, що відображення $f_m(x) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \mapsto re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, також задовольняє всі умови теореми 1.1, причому в якості функції $Q_*(y)$ у (1.4) можна взяти m^{3n-2}. Тут ми врахували, що $K_{I,n}(x, f_m) = m$ (див. [15, пункт 4.1, гл. I]).

Приклад 4.3. Нехай тепер $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – гомеоморфізм, обернений до якого $g = f^{-1}$ належить до класу Соболєва $W_{\rm loc}^{1,1}(f(\mathbb{D}))$ та має скінченне спотворення, тобто, існує функція $K : \mathbb{D} \to [1, \infty)$ така що $\|g'(z)\|^2 \leqslant K(z) \cdot |J(z, g)|$ для майже всіх $z \in f(\mathbb{D})$. Нехай також відображення f має N та N^{-1}-властивості Лузіна, $N(f, \mathbb{D}) < \infty$, крім того, припустимо, що f має неперервне продовження в $\overline{\mathbb{D}}$ і $K_{O,2}(y, g) \in L^1$. З доведення теореми 4 у [22] випливає, що відображення f має N^{-1}-властивість на майже всіх колах $S(y_0, r)$, $y_0 \in f(\mathbb{D})$. В такому випадку, f задовольняє всі умови теореми 1.1 при $p = n = 2$, причому можна покласти $Q_*(y) = K_{O,2}(y, g)$.

Нехай тепер f_m – відображення з прикладу 4.1. Тоді відображення $F_m := f \circ f_m$ також задовольняє всі умови теореми 1.1 в кожній точці $y_0 \in f(\mathbb{D})$. Дійсно, N та N^{-1}-властивості Лузіна очевидні, так само, як і умова $N(F_m, \mathbb{D}) < \infty$. Далі, для майже всіх $y \in f(\mathbb{D})$ будемо мати:

$$Q(y) := \sum_{z \in F_m^{-1}(y)} K_{I,2}(z, F_m) = \sum_{z \in F_m^{-1}(y)} K_{I,2}(f_m(z), f) =$$

$$= m \cdot K_{I,2}(f^{-1}(y), f) = m \cdot K_{O,2}(y, g) \in L^1(f(\mathbb{D}))\,.$$

Нарешті, оскільки відображення f_m мають локально обернені відображення, які є локально ліпшицевими (див. приклад 4.1), то міркуючи аналогічно до співвідношень (4.3), (4.4) і (4.5) заключаємо, що ці відображення мають N^{-1}-властивість відносно міри $\mathcal{H}^1$ (див. [2, наслідок 3.2.20]). В такому випадку, з огляду на сказане вище, F_m мають N^{-1}-властивість на майже всіх колах з центрами $y_0 \in f(\mathbb{D})$. Зауважимо, що в теоремі 1.1 можна покласти $Q_*(y) := m^2 \cdot m \cdot K_{O,2}(y, g) = m^3 \cdot K_{O,2}(y, g)$.

Приклад 4.4. Нехай тепер $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, – гомеоморфізм, обернений до якого $g = f^{-1}$ належить до класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(f(\mathbb{B}^n))$ та має скінченне спотворення, тобто, існує функція $K : \mathbb{B}^n \to [1, \infty)$ така що $\|g'(z)\|^n \leqslant K(z) \cdot |J(z, g)|$ для майже всіх $z \in f(\mathbb{B}^n)$. Припустимо, що φ задовольняє умову Кальдерона (3.11). Нехай також відображення f має N та N^{-1}-властивості Лузіна, $N(f, D) < \infty$, крім того, припустимо, що f має неперервне продовження в $\overline{\mathbb{B}^n}$ і $K_{O,n}(y, g) \in L^{n-1}$. За [8, наслідок 4] відображення f має N^{-1}-властивість на майже всіх сферах $S(y_0, r)$, $y_0 \in f(\mathbb{B}^n)$. В такому випадку, f задовольняє всі умови теореми 1.1 при $p = n$, причому можна покласти $Q_*(y) = K_{O,n}(y, g)$.

Нехай тепер f_m – відображення з прикладу 4.2. Тоді відображення $H_m := f \circ f_m$ також задовольняє всі умови теореми 1.1 для всіх $y_0 \in f(\mathbb{B}^n)$. Дійсно, N та N^{-1}-властивості Лузіна очевидні, так само, як і умова $N(H_m, \mathbb{B}^n) < \infty$. Далі, для майже всіх $y \in f(\mathbb{B}^n)$, враховуючи правило обчислення дилатацій для суперпозицій відображень (див. [15, рівність (4.14), пункт 4.1, гл. I]), будемо мати:

$$Q(y) := \sum_{x \in H_m^{-1}(y)} K_{I,n}(x, H_m) \leqslant \sum_{x \in H_m^{-1}(y)} K_{I,n}(x, f_m) \cdot K_{I,n}(f_m(x), f)$$

$$= m^2 \cdot K_{I,2}(f^{-1}(y), f) = m^2 \cdot K_{O,n}(y, g) \in L^1(f(\mathbb{B}^n))\,.$$

Нарешті, оскільки відображення f_m мають локально обернені відображення, які є локально ліпшицевими (див. приклад 4.2), то міркуючи аналогічно до співвідношень (4.3), (4.4) і (4.5) заключаємо, що ці відображення мають N^{-1}-властивість відносно міри $\mathcal{H}^{n-1}$ (див. [2, наслідок 3.2.20]). В такому випадку, з огляду на сказане вище, H_m мають N^{-1}-властивість на майже всіх сферах з центрами $y_0 \in f(\mathbb{B}^n)$. Зауважимо, що в теоремі 1.1 можна покласти $Q_*(y) := m^n \cdot m^{2(n-1)} \cdot K^{n-1}_{O,n}(y, g) = m^{3n-2} \cdot K^{n-1}_{O,n}(y, g)$.

Література

[1] Cristea, M. (2018). On the lightness of the mappings satisfying generalized inverse modular inequalities. *Israel J. Math., 227*, 545–562.

[2] Federer, H. (1969). *Geometric Measure Theory.* Berlin etc., Springer.

[3] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes. *Complex Analysis and Operator Theory, 10*(5), 881–901.

[4] Hesse, J. (1975). A $p-$extremal length and p-capacity equality. *Ark. Mat., 13*, 131–144.

[5] Ilyutko, D.P., Sevost'yanov, E.A. (2018). Boundary behaviour of open discrete mappings on Riemannian manifolds. *Sb. Math., 209*(5), 605–651.

[6] Klishchuk, B.A., Salimov, R.R. (2019). Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal, 71*(5), 883–895.

[7] Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2008). On the theory of mappings with finite area distortion. *J. Anal. Math., 104*, 291–306.

[8] Kovtonyuk, D., Ryazanov, V., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). Toward the theory of Orlicz-Sobolev classes. *St. Petersburg Math. J., 25*(6), 929–963.

[9] Куратовский, К. (1966). *Топология*, т. 1. Мир, М.

[10] Куратовский, К. (1969). *Топология*, т. 2. Мир, М.

[11] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1971). Topological and metric properties of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 488*, 1–31.

[12] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Science + Business Media, LLC, New York.

[13] Martio, O., Srebro, U. (1975). Automorphic quasimeromorphic mappings in $\mathbb{R}^n$. *Acta Math., 135*, 221–247.

[14] Ponomarev, S.P. (1995). The $N^{-1}-$property of mappings, and Lusin's (N) condition. *Math. Notes., 58*(3), 960–965.

[15] Reshetnyak, Yu.G. (1989). *Space mappings with bounded distortion.* Transl. Math. Monogr., vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[16] Ryazanov, V.I., Sevost'yanov, E.A. (2007). Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms. *Siberian Math. J., 48*(6), 1093–1105.

[17] Saks, S. (1964). *Theory of the Integral.* New York, Dover Publ. Inc.

[18] Salimov, R.R. (2018). Logarithmic Asymptotics of a Class of Mappings. *Ukr. Math. Bull., 15*(1), 65–79; transl. in (2018). *Journal of Mathematical Sciences, 235*(1), 52–62.

[19] Salimov, R.R., Klishchuk, B.A. (2018). An extremal problem for volume functionals. *Mat. Stud., 50*, 36–43.

[20] Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2012). Analogs of the Ikoma-Schwartz lemma and Liouville theorem for mappings with unbounded characteristic. *Ukrainian Math. J., 63*(10), 1551–1565.

[21] Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2014). The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion. *Complex Variables and Elliptic Equations, 59*(2), 217–231.

[22] Sevost'yanov, E.A. (2017). On the local behavior of Open Discrete Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes. *Ukr. Math. J., 68*(9), 1447–1465.

[23] Sevost'yanov, E.A. (2019). An analog of the Väisälä inequality for surfaces. *Complex Analysis and Operator Theory, 13*(6), 2939–2948.

[24] Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.O. (2021). Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation. *Analysis and Mathematical Physics, 11*(3), article number 138.

[25] Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S., Dovhopiatyi, O.P. (2020). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Ukr. Math. Bull., 17*(3), 414–436; transl. in (2021). *Journal of Mathematical Sciences, 252*(4), 541–557.

[26] Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A., Markysh, A.A. (2019). On the Lower Estimate of the Distortion of Distance for One Class of Mappings. *Ukr. Math. J., 70*(11), 1791–1802.

[27] Shlyk, V.A. (1993). The equality between p-capacity and p-modulus. *Siberian Mathematical Journal, 34*(6), 1196–1200.

[28] Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math., 229, Berlin etc., Springer–Verlag.

[29] Vuorinen, M. (1976). Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes, 11*, 1–44.

[30] Ziemer, W.P. (1967). Extremal length and conformal capacity. *Trans. Amer. Math. Soc., 126*(3), 460–473.

[31] Ziemer, W.P. (1969). Extremal length and p-capacity. *Michigan Math. J., 16*, 43–51.

Відомості про авторів

Євген Олександрович Севостьянов

Житомирський державний університет ім. І. Франко,
Житомир, Україна,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: `esevostyanov2009@gmail.com`