Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 3, 315 – 326
https://doi.org/10.32782/1810-3200-2022-19-3-2

Умови розв'язності задачі, оберненої до лінійної автономної нетерової крайової задачі

Сергій М. Чуйко

(Представлена В. Я. Гутлянським)

Анотація. У статті знайдені умови розв'язності задачі, оберненої до лінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь.

2010 MSC. 34B15.

Ключові слова та фрази. Нетерові крайові задачі, обернені задачі.

1. Постановка задачі

Дослідження лінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь започатковане у статті О.А. Бойчука [1]. Як відомо, лінійні нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь некоректно поставлені, оскільки не завжди розв'язні, а у разі розв'язності, не завжди однозначно [2]. Класичним прикладом некоректно поставлених задач є обернені задачі [3]. Обернені задачі актуальні для різноманітних прикладних проблем обробки даних, наприклад, у задачах обчислювальної томографії [4], або ж у задачах поновлення та покращення зображень [5]. Обернені задачі для нетерових крайових задач для системи звичайних диференціальних рівнянь належать до некоректно поставлених [3, 6] і мало досліджені. Таким чином, досліджуємо задачу про відновлення лінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z'(t) = A\,z(t) + f, \quad \ell z(\cdot) = \alpha \tag{1}$$

за відомою $(m \times p)$ – вимірною матрицею $\Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ та величиною $\alpha \in \mathbb{R}^m$; стовпці матриці $\Phi(t)$:

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots\ ,\ \varphi_p(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

Стаття надійшла в редакцію 04.04.2022

являють собою лінійно-незалежні розв'язки цієї задачі. Тут $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невідома стала матриця, $f \in \mathbb{R}^n$ — невідомий сталий вектор, $\ell z(\cdot)$ — невідомий лінійний обмежений векторний функціонал:

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m, \quad m \neq n.$$

Дотримуючись схеми методу найменших квадратів, вимагатимемо мінімізації величини нев'язки [7, 8]

$$\Delta := \sum_{i=1}^{p} \Big|\Big| \varphi_i'(t) - A\,\varphi_i(t) - f \Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \sum_{i=1}^{p} \Big|\Big| \ell\varphi_i(\cdot) - \alpha \Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min .$$

Позначимо оператор [9, 10]

$$\mathcal{M}[A] : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A]$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big] : \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Оператор $\mathcal{M}[A]$, як і обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]$, можуть бути зображені явно [10]. Позначимо також

$$\Big\{\Xi_j\Big\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \Big\{\theta_j\Big\}_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$$

природні базиси [11] просторів $\mathbb{R}^{n\times n}$ та $\mathbb{R}^n$.

2. Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

Мінімізацію величини нев'язки Δ забезпечує мінімізація величини нев'язки

$$\Delta_0 := \sum_{i=1}^{p} \Big|\Big| \varphi_i'(t) - A\,\varphi_i(t) - f \Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]}.$$

Матрицю A та вектор f шукатимемо у вигляді сум

$$A = \sum_{j=1}^{n^2} \Xi_j\, a_j, \quad f = \sum_{j=1}^{n} \theta_j\, f_j, \quad a_j, f_j \in \mathbb{R}^1,$$

при цьому

$$\varphi_i'(t) - A\,\varphi_i(t) - f = \varphi_i'(t) - \Omega_i(t)\gamma_0, \quad i = 1, 2, \; \dots \;, \; p;$$

тут

$$\Omega_i(t) := \begin{pmatrix} \Xi_1\,\varphi_i(t) & \dots & \Xi_{n^2}\,\varphi_i(t) & I_n \end{pmatrix}, \; \gamma_0 := \mathrm{col}\;(\mathcal{M}A, \; f) \in \mathbb{R}^{n(n+1)}.$$

Позначимо матрицю Грама [7, 8]

$$\Gamma_0 := \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t)\Omega_i(t)\,dt \in \mathbb{R}^{n(n+1)\times n(n+1)}.$$

Невідомий вектор γ_0 визначає рівняння

$$\Gamma_0\,\gamma_0 = \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t)\varphi'(t)\,dt, \tag{2}$$

однозначно розв'язне за умови

$$\det \Gamma_0 \neq 0. \tag{3}$$

За умови (3) рівняння (2) має єдиний розв'язок

$$\gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t)\varphi'(t)\,dt,$$

який визначає матрицю

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\gamma_0), \quad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_{n^2} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n(n+1)}$$

та вектор

$$f = \mathcal{P}_1\,\gamma_0, \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n(n+1)}.$$

Умова (3) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_0; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_0 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_0. В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_0 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_0. Таким чином, доведено наступну лему.

Лема. *За умови* (3)*, у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_0*, задача про відновлення автономної системи звичайних диференціальних рівнянь* (1) *за відомою* $(m \times p)$ *– вимірною матрицею* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ *має єдиний розв'язок*

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\gamma_0), \quad f = \mathcal{P}_1\,\gamma_0,$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_0 у сенсі найменших квадратів.

Приклад 1. *Умови доведеної леми справджуються у задачі про відновлення задачі Коші для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$z'(t) = A\,z(t) + f, \quad z(0) = \alpha \tag{4}$$

за відомим розв'язком $\varphi(t) := \begin{pmatrix} t\,e^t & (t+1)\,e^t \end{pmatrix}^*$ *та величиною* $\alpha := \varphi(0)$.

Природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$ складають матриці [11]

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\Omega_1(t) = \begin{pmatrix} t\,e^t & 0 & (t+1)\,e^t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t\,e^t & 0 & (t+1)\,e^t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо невироджену

$$\det\Gamma_0 = \frac{25}{256} - \frac{55\,e^2}{64} + \frac{5\,e^3}{8} + \frac{227\,e^4}{128} - \frac{11\,e^5}{4} + \frac{97\,e^6}{64} - \frac{3\,e^7}{8} + \frac{9\,e^8}{256}$$

додатно визначену матрицю

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1+e^2 & 0 & 2\,e^2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1+e^2 & 0 & 2e^2 & 0 & 4 \\ 2\,e^2 & 0 & -1+5\,e^2 & 0 & 4e & 0 \\ 0 & 2\,e^2 & 0 & -1+5\,e^2 & 0 & 4e \\ 4 & 0 & 4e & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4e & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

яка забезпечує виконання умови (3), тому задача про відновлення задачі Коші для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь (4) за відомим розв'язком цієї задачі $z(t) := \varphi(t)$ та величиною α однозначно розв'язна; тут

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Умови розв'язності задачі, оберненої до лінійної автономної нетерової крайової задачі

Як відомо, загальний вигляд

$$\ell z(\cdot) := \int_a^b dW(t)\, z(t), \quad W(t) \in \mathbb{V}_{m\times n}[a,b]$$

лінійного функціоналу [12, с. 362]

$$\ell z(\cdot) : \ \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

визначає $W(t)$ – $(m \times n)$ – вимірна матриця, елементи якої – функції обмеженої на відрізку $[a,b]$ варіації; інтеграл тут – інтеграл Рімана–Стілтьєса [13, с. 10]. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів, вимагатимемо мінімізації величини нев'язки [7, 8]

$$\Delta_1 := \sum_{i=1}^p \left|\left|\ell\varphi_i(\cdot) - \alpha\right|\right|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min .$$

Матрицю $W(t)$ шукатимемо у вигляді добутку

$$W(t) := \Psi(t)\, V, \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad V \in \mathbb{R}^{q\times n};$$

тут $\Psi(t)$ – фіксована $(m \times q)$ – вимірна матриця, V – невідома стала матриця. Позначимо

$$\left\{\check{\Xi}_j\right\}_{j=1}^{q\,n} \in \mathbb{R}^{q\times n}$$

природний базис [11] простору $\mathbb{R}^{q\times n}$ та матрицю Грама [7, 8]

$$\Gamma_1 := \sum_{i=1}^p \int_a^b \check{\Omega}_i^*(t)\, dt \, \sum_{i=1}^p \int_a^b \check{\Omega}_i(t)\, dt \in \mathbb{R}^{q\,n\times q\,n};$$

тут

$$\check{\Omega}_i(t) := \int_a^b \Big(\Psi'(t)\check{\Xi}_1\varphi_i(t) + \Psi(t)\check{\Xi}_1\varphi_i'(t) ... \Psi'(t)\check{\Xi}_{q\,n}\varphi_i(t) + \Psi(t)\check{\Xi}_{q\,n}\varphi_i'(t)\Big) dt.$$

Невідомий вектор γ_1 визначає рівняння

$$\Gamma_1\, \gamma_1 = \sum_{i=1}^p \int_a^b \check{\Omega}_i^*(t)\, dt\, \alpha, \tag{5}$$

однозначно розв'язне за умови [2]

$$\det \Gamma_1 \neq 0. \tag{6}$$

За умови (6) рівняння (5) має єдиний розв'язок

$$\gamma_1 = \Gamma_1^{-1} \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \check{\Omega}_i^*(t)\, dt\, \alpha,$$

який визначає матрицю

$$V = \mathcal{M}^{-1} \left(\Gamma_1^{-1} \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \check{\Omega}_i^*(t)\, dt\, \alpha \right).$$

Умова (6) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_1; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_1 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_1. В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_1 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_1. Таким чином, отримуємо лінійний обмежений функціонал

$$\ell z(\cdot) := \int_a^b dW(t)\, z(t) : \ \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m, \quad W(t) := \Psi(t)\, V.$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *За умови* (3), *у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_0, *задача про відновлення автономної системи звичайних диференціальних рівнянь* (1) *за відомою* $(m \times p)$ *– вимірною матрицею* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ *має має єдиний розв'язок*

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\, \gamma_0), \quad f = \mathcal{P}_1\, \gamma_0,$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_0 *у сенсі найменших квадратів. За додаткової умови* (6), *у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_1, *задача про відновлення крайової умови* (1) *має єдиний розв'язок*

$$\ell z(\cdot) := \int_a^b dW(t)\, z(t) : \ \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m, \quad W(t) := \Psi(t)\, V,$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_1 *у сенсі найменших квадратів.*

Приклад 2. *Умови доведеної теореми справджуються у задачі про відновлення двоточкової задачі для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$z'(t) = A\, z(t) + f, \quad \ell z(\cdot) := M\, z(0) + N\, z(2\pi) = \alpha := \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

за відомими розв'язками

$$\varphi_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

та величиною α.

Матриця Грама Γ_0 у випадку задачі про відновлення автономної системи звичайних диференціальних рівнянь (7) невироджена

$$\det \Gamma_0 = 256\,\pi^6$$

і додатно визначена, тому умова (3) виконується, отже, задача про відновлення системи (7) за відомим розв'язком цієї системи однозначно розв'язна; тут

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\Gamma_0 = 2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Покладемо

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Матриця Грама Γ_1 у випадку задачі про відновлення крайової умови (7) невироджена

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

і додатно визначена, отже умову (6) розв'язності цієї задачі виконано, таким чином, отримуємо

$$W(t) = \Psi(t)\,V, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

отже

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = -\begin{pmatrix} 2\pi & 2\pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Схему відновлення автономної системи звичайних диференціальних рівнянь (1) за відомим розв'язком цієї задачі може бути перенесено на відновлення крайової задачі для матричного диференціального рівняння [14, 15]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu} \tag{8}$$

за відомими лінійно-незалежними розв'язками цієї задачі

$$Z_1(t), Z_2(t), \ \dots\ , \ Z_p(t), \in \mathbb{C}^1_{m\times n}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Тут $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ та $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невідомі сталі матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{m\times n}[a;b] \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

Умови розв'язності та структура розв'язків однорідної частини системи (8) наведені у монографії [16]. Конструктивні умови розв'язності та структура періодичного розв'язку неоднорідної системи (8) за умови $m = n = \lambda = \mu$ отримані у статті [14]. Позначивши

$$\ell z(\cdot) := \mathcal{M}\left[\mathcal{L}Z(\cdot)\right],$$

приходимо до висновку, що схема відновлення крайової умови (8) за відомим розв'язком цієї задачі не відрізняється від схеми, визначеної доведеною вище теоремою, тому зосередимося на задачі для матричного диференціального рівняння (8) за відомим розв'язком цієї задачі. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів, вимагатимемо мінімізації величини нев'язки [7, 8]

$$\Delta_2 := \sum_{i=1}^{p} \left|\left| z_i'(t) - \mathcal{M}\left[AZ_i(t)\right] - \mathcal{M}\left[Z_i(t)B\right] - f \right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} \to \min;$$

тут

$$z_i(t) := \mathcal{M}\left[Z_i(t)\right], \quad f := \mathcal{M}\left[F\right] \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Позначимо матрицю Грама [7, 8]

$$\Gamma_2 := \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t)\, dt \, \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i(t)\, dt \in \mathbb{R}^{(n^2+m^2+mn)\times(n^2+m^2+mn)}.$$

Позначимо також

$$\left\{\Xi_j\right\}_{j=1}^{m^2} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \left\{\Theta_j\right\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \left\{\theta_j\right\}_{j=1}^{mn} \in \mathbb{R}^{n}$$

природні базиси [11] просторів $\mathbb{R}^{m\times m}, \mathbb{R}^{n\times n}$ та $\mathbb{R}^{mn}$. Невідомий вектор γ_2 визначає рівняння

$$\Gamma_2\, \gamma_2 = \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t) z_i'(t)\, dt, \tag{9}$$

розв'язне за умови [2]

$$\det \Gamma_2 \neq 0; \tag{10}$$

тут

$$\Omega_i(t) := \left(\mathcal{M}\left[\Xi_1 Z_i(t)\right] \ \dots\ \mathcal{M}\left[\Xi_{m^2} Z_i(t)\right] \ \mathcal{M}\left[Z_i(t)\Theta_1\right] \ \dots\ \mathcal{M}\left[Z_i(t)\Theta_{n^2}\right] \ I_{mn}\right),$$

крім того

$$\gamma_2 := \mathrm{col}\ \left(\mathcal{M}A,\ \mathcal{M}B,\ f\right) \in \mathbb{R}^{n^2+m^2+mn}.$$

За умови (10) рівняння (9) має єдиний розв'язок

$$\gamma_2 = \Gamma_2^{-1} \sum_{i=1}^{p} \int_a^b \Omega_i^*(t) z_i'(t)\, dt,$$

який визначає матриці

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\, \gamma_2), \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} I_{m^2} & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m^2\times(n^2+m^2+mn)},$$

$$B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\, \gamma_2), \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & I_{n^2} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times(n^2+m^2+mn)},$$

та

$$F = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_3\, \gamma_2), \quad \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} O & O & I_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times(n^2+m^2+mn)}.$$

Умова (10) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_2; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_2 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_2. В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_2 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_2.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Наслідок. *За умови* (10)*, у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_2*, задача про відновлення автономного матричного диференціального рівняння* (8) *за відомими розв'язками цього рівняння*

$$Z_1(t), Z_2(t),\ \dots\ ,\ Z_p(t), \in \mathbb{C}^1_{m\times n}[a;b]$$

має єдиний розв'язок $A,\ B,\ F$*, який мінімізує величину нев'язки* Δ_2 *у сенсі найменших квадратів.*

Приклад 3. *Умови доведеного наслідку справджуються у задачі про відновлення автономного матричного диференціального рівняння*

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F, \quad t \in [0, 1] \tag{11}$$

за відомим розв'язком

$$Z(t) := \begin{pmatrix} 2t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для спрощення припустимо, що $A := 0$. Матриця Грама

$$\Gamma_2 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 40 & 15 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 15 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 30 & 10 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

у випадку задачі про відновлення автономного матричного диференціального рівняння (11) невироджена, тому умову (10) розв'язності цієї задачі виконано. Таким чином, однозначно отримуємо

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отже

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– точний розв'язок задачі про відновлення автономного матричного диференціального рівняння (11).

Запропонована у статті схема дослідження задач, обернених до лінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно [17] може бути перенесена на задачі, обернені до лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння, а також на задачі, обернені до крайових задач у частинних похідних [18, 19]. У разі нерозв'язності задачі про відновлення лінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь, запропонована схема може бути перенесена на задачі, обернені до лінійної автономної нетерової крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь [20, 21].

Література

[1] Бойчук, А.А. (1988). Функция Грина линейной однородной краевой задачи. *Докл. АН УССР. Сер. А*, 7, 2–6.

[2] Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. Berlin, Boston, De Gruyter.

[3] Самарский, А.А., Вабищевич, П.Н. (2009). Численные методы решения обратных задач математической физики. М., Изд. ЛКИ.

[4] Наттерер, Ф. (1990). Математические аспекты компьютерной томографии. М., Мир.

[5] Stanimirovic, P.S., Stojanovic, I., Pappas, D., Chountasis, S. (2016). On removing blur in images using least squares solutions. *Filomat, 30*(14), 3855–3866.

[6] Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я. (1986). *Методы решения некорректных задач.* М., Наука.

[7] Ахиезер, Н.И. (1965). Лекции по теории аппроксимации. М., Наука.

[8] Chuiko, S.M. (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations (N.Y.), 11*(4), 585–604.

[9] Magnus, J.R., Neudecker, H. (1999). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, 2nd Edition.* Wiley.

[10] Chuiko, S.M. (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210*(1), 9–21.

[11] Воеводин, В.В., Кузнецов, Ю.А. (1984). *Матрицы и вычисления.* М., Наука.

[12] Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. (1968). *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., Наука.

[13] Бойчук, А.А. (1990). *Конструктивные методы анализа краевых задач.* Киев, Наук. думка.

[14] Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (2001). A Critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equation. *Differential Equations, 37*(4), 464–471.

[15] Chuiko, S.M. (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics, 60*(8), 64–73.

[16] Беллман, Р. (1969). *Введение в теорию матриц.* М., Наука.

[17] Чуйко, С.М., Несмєлова, О.В., Калініченко, Я.В. (2021). Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння. *Нелінійні коливання, 24*(3), 422–434.

[18] Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2020). The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Доповіді Національної академії наук України, 5*, 10–16.

[19] Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163–179.

[20] Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program.

[21] Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences, 235*(1), 2–14.

Відомості про авторів

Сергій Михайлович Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

E-Mail: `chujko-slav@ukr.net`