Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 3, 355 – 372
https://doi.org/10.32782/1810-3200-2022-19-3-4

Наближення класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ тригармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці (мала гладкість)

Уляна З. Грабова, Інна В. Кальчук

(Представлена Р. М. Тригубом)

Анотація. Одержано асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона в рівномірній метриці на класах неперервних (ψ,β)-диференційовних функцій малої гладкості. Встановлені рівності дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для тригармонійних інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці.

2010 MSC. 42A05, 41A60.

Ключові слова та фрази. Тригармонійний інтеграл Пуассона, (ψ,β)-похідна, рівномірна метрика.

1. Постановка задачі та деякі історичні відомості

Нехай L – простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій f з нормою $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; L_∞ – простір 2π-періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$; C – простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай $U(\rho;x) = U_n(\rho;x)$ є полігармонічною функцією порядку n в одиничному крузі $|z|<1$ $\ (z=\rho e^{ix})$, тобто є розв'язком рівняння

$$\Delta^n U(\rho;x) = 0, \tag{1.1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – оператор Лапласа в полярних координатах і $\Delta^n := \Delta\left(\Delta^{n-1}\right)$.

Стаття надійшла в редакцію 04.07.2022

Розв'язок рівняння (1.1) із заданими граничними умовами

$$U\left(\rho;x\right)\Big|_{\rho=1}=f(x);\ \frac{\partial^k}{\partial\rho^k}U\left(\rho;x\right)\Big|_{\rho=1}=0,\quad k=1,2,\ldots,n-1,\qquad(1.2)$$

де $f(x)$ – сумовна 2π-періодична функція, далі будемо позначати $P_n(\rho;f;x)=U_n(\rho;x)$, $n\in\mathbb{N}$. Згідно з формулою (3.127.5) [1] розв'язок крайової задачі (1.1)–(1.2) можна записати у вигляді

$$P_n(\rho;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n(\rho;k)\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\ 0\leq\rho<1,\quad(1.3)$$

де $a_k,\ b_k$ – коефіцієнти Фур'є функції f,

$$\lambda_n\left(\rho;k\right)=\rho^k\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(1-\rho^2)^m}{m!2^m}\prod_{j=0}^{m-1}(k+2j).\qquad(1.4)$$

Якщо покласти в (1.3) $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta>0$, то величину $P_n(e^{-\frac{1}{\delta}};f;x)$ будемо позначати через $P_{n,\delta}(f;x)$, тобто

$$P_{n,\delta}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,\delta}(k)\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\qquad(1.5)$$

$$\lambda_{n,\delta}\left(k\right)=e^{-\frac{k}{\delta}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^m}{m!2^m}\prod_{j=0}^{m-1}(k+2j).$$

Нехай $f\in L$ і $S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$ – її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ – довільна фіксована функція натурального аргументу і β – фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi\left(k\right)}\bigg(a_k\cos\Big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\Big)+b_k\sin\Big(kx+\frac{\pi\beta}{2}\Big)\bigg)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}, при цьому кажуть, що f належить множині L^{ψ}_{β}. Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$, і, крім того, $f^{\psi}_{\beta}\in\mathfrak{N}\subset L$, то вважають, що $f\in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі покладемо $L^{\psi}_{\beta}\cap C=C^{\psi}_{\beta}$ і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}\cap C=C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Множини L^{ψ}_{β} та C^{ψ}_{β} введено О.І. Степанцем (див., наприклад, [2, с. 25, 29]). В роботі в якості $\mathfrak{N}$ виступає множина $U_{\infty}=\{\varphi\in L_{\infty}:\|\varphi\|_{\infty}\leq1,\ \varphi\perp1\}$, тому покладемо $C^{\psi}_{\beta}U_{\infty}{=}C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ перетворюються у відомі класи Вейля-Надя $W^r_{\beta,\infty}$, а їх (ψ, β)-похідні f^{ψ}_{β} майже скрізь збігаються з похідними в сенсі Вейля-Надя $f^{(r)}_{\beta}$ [2, с. 24]. У випадку $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, класи $W^r_{\beta,\infty}$ співпадають з класами Соболєва W^r_{∞}, а у випадку $\beta = r+1, r \in \mathbb{N}$, – з класами спряжених функцій $\overline{W}^r_{\infty}$.

Послідовності $\psi\,(k)$, що входять в означення (ψ, β)-похідних, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Але, як показав О.І. Степанець [2, с. 93], в багатьох випадках можна обмежитись без істотних втрат загальності лише додатними опуклими донизу послідовностями $\psi\,(k)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{k\to\infty} \psi\,(k) = 0$.

Будемо вважати, що послідовність $\psi\,(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел функцій неперервного аргументу $t \geq 1$ з множини

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \quad \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1+t_2)/2\right) + \psi(t_2) \geq 0,$$

$$\forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Як показано в [3, с. 156], будь-яка сумовна (неперервна) функція f обов'язково має (ψ, β)-похідну, яка теж є сумовною (неперервною) і при цьому $\psi \in \mathfrak{M}$.

Оскільки функції з множини $\mathfrak{M}$ неоднорідні за швидкістю спадання до нуля, то з цієї множини, згідно з О. І. Степанцем [3, с. 159], виділимо підмножини функцій ψ

$$\mathfrak{M}' = \big\{\psi \in \mathfrak{M} : \int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty\big\},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \big\{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu\,(\psi; t) \leq K, \ \forall t \geq 1\big\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \eta\,(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, а K – деяка стала, яка, можливо, залежить від ψ. Далі покладемо $\mathfrak{M}'_0 := \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; P_{n,\delta})_C = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(\cdot) - P_{n,\delta}(f; \cdot)\|_C. \tag{1.6}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; \delta)$ таку, що $\mathcal{E}\,(\mathfrak{N}; P_{n,\delta})_C = \varphi\,(\delta) + o\,(\varphi\,(\delta))$ при $\delta \to \infty$, то, наслідуючи О.І. Степанця [3, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ та полігармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Оцінки відхилень довільних полігармонійних інтегралів Пуассона $P_{n,\delta}(f;x)$ від граничих функцій $f \in S^p$ $(1 \le p < \infty)$ в метриці простору S^p, встановлені М.П. Тіманом (див. [1, с. 248–260]).

При $n = 1, 2, 3$ з формули (1.5) отримуємо величини

$$P_{1,\delta}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$P_{2,\delta}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\Big) e^{-\frac{k}{\delta}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$P_{3,\delta}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{3,\delta}(k) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

де $\lambda_{3,\delta}(k) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big) e^{-\frac{k}{\delta}}$. Цими формулами визначаються інтеграл Пуассона [4], бігармонійний інтеграл Пуассона [5] та тригармонійний інтеграл Пуассона [6] функції f відповідно.

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{3,\delta})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - P_{3,\delta}(f;\cdot)\|_C. \tag{1.7}$$

На класах (ψ, β)-диференційовних функцій задача Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона $P_{1,\delta}$ та $P_{2,\delta}$ розв'язувалась в роботах [7–10] та [11–13] відповідно. У вказаних дослідженнях використовується метод поділу множини $\mathfrak{M}$ на підмножини за швидкістю спадання до нуля функцій ψ, що запропонований О.І. Степанцем. Зазначимо, що в роботі [14] використано інший метод дослідження, а саме метод мультиплікаторів Фур'є, що був запропонований та розвинений в роботах Р.М. Тригуба [15, 16]. Це дозволило вивчати наближення класів (ψ, β)-диференційовних функцій поліномами без накладання умови опуклості функцій ψ (її замінено умовою Берлінга) та без поділу множини додатних і спадних до нуля на нескінченності функцій ψ на підмножини, тобто без поділу функцій f з класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ на підкласи за порядком гладкості.

Перші результати, пов'язані з вивченням апроксимативних властивостей тригармонійних інтегралів Пуассона були отримані в роботі [6]. Пізніше дослідження в цьому напрямку було продовжено в роботах [17–19]. Зокрема, в [17] для тригармонійного інтеграла Пуассона розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського на класах $W^r_{\beta,\infty}$,

$r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а в [18, 19] на класах $W^r_\beta H^\alpha$, $r > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, де $W^r_\beta H^\alpha = \{f \in C: \ |f^{(r)}_\beta(x+h) - f^{(r)}_\beta(x)| \le |h|^\alpha\}$.

Що ж стосується дослідження апроксимативних властивостей тригармонійних інтегралів Пуассона на класах (ψ, β)-диференційовних функцій, то дане питання вивчене недостатньо. Зокрема, цікавим є питання про порівняння швидкостей наближення інтегралом Пуассона, бігармонійним та тригармонійним інтегралом Пуассона на класах (ψ, β)-диференційовних функцій. Зазначимо, що ідея порівняння лінійних методів виникла ще в 1968 році в роботах [20, 21]. Як відомо (див., наприклад, [7, 11]) величини наближення інтегралами Пуассона та бігармонійними інтегралами Пуассона не можуть прямувати до нуля при $\delta \to \infty$ швидше ніж $\frac{1}{\delta}$ та $\frac{1}{\delta^2}$ відповідно. В той же час, як випливає з робіт [17–19], при наближенні тригармонійними інтегралами можна отримати швидкість наближення $\frac{1}{\delta^3}$, $\delta \to \infty$. Тому ми ставимо за мету вивчення асимптотичної поведінки величин $\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; P_{3,\delta})_C$ при $\delta \to \infty$. В даній роботі розглянемо наближення класів (ψ, β)–диференційовних функцій малої гладкості.

2. Наближення класів $C^\psi_{\beta,\infty}$ тригармонійними інтегралами Пуассона

Аналогічно до роботи [13] для тригармонічного інтеграла Пуассона розглянемо неперервну на $[0, \infty)$ функцію $\tau(u)$ вигляду

$$\tau(u) = \begin{cases} \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $\gamma = \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\delta$, $\quad \theta = \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 \delta^2$, функція $\psi(u)$ визначена і неперервна для всіх $u \ge 1$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція $\psi(u)$ така, що має неперервну другу похідну на $[1, \infty)$.

Для підсумовуючої функції $\tau(u)$ згідно Л.І. Баусова [22] означимо величину

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt. \tag{2.2}$$

Домовимося далі через K, $K_i, i = 1, 2, ...$, позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Справедливе твердження.

Теорема 2.1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є опуклою догори або донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$. Тоді при $\delta \to \infty$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{3,\delta})_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\biggl(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du\biggr), \tag{2.3}$$

де величина $A(\tau)$ означається за допомогою рівності (2.2) *і для неї справедлива оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\biggl(\frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\biggr)$$

$$+O\biggl(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u\psi(u)du\biggr). \tag{2.4}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 [22, с. 24] для збіжності інтеграла (2.2) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\left|d\tau'(u)\right|, \tag{2.5}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du, \qquad \int\limits_0^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \tag{2.6}$$

Отже, для оцінки першого інтеграла з (2.5) розіб'ємо відрізок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0, \frac{1}{\delta}\right]$ і $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$ $(\delta > 2)$. Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ при $u \in \left[0, \frac{1}{\delta}\right]$, а також нерівності

$$e^{-u} \leq 1, \quad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad u \geq 0, \tag{2.7}$$

отримуємо співвідношення

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u\left|d\tau'(u)\right| = \bigl(u\tau'(u) - \tau(u)\bigr)\Big|_0^{\frac{1}{\delta}}$$

$$= \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\biggl(\frac{1}{\delta}\Bigl(1 - \gamma + \frac{1}{\delta}(\gamma - 2\theta) + \frac{\theta}{\delta^2}\Bigr)e^{-\frac{1}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{1}{\delta}} + \frac{\gamma}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}} + \frac{\theta}{\delta^2}e^{-\frac{1}{\delta}}\biggr)$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\bigg(\frac{1}{\delta^2}(\frac{1}{2}-\theta)+\frac{1}{\delta^3}(\frac{\gamma}{2}+\theta)\bigg).$$

Враховуючи оцінки $\frac{1}{2}-\theta \leq \frac{1}{\delta}$, $\quad \frac{\gamma}{2}+\theta \leq \frac{3}{2}$, одержуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u\left|d\tau'(u)\right| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{2.8}$$

Нехай тепер $u \in \left[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u)=\bigg(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\bigg)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{2.9}$$

$$\tau_2(u) = \left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{2.10}$$

$$\tau_3(u) = \frac{1}{6}u^3\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{2.11}$$

тоді $\tau(u) = \tau_1(u)+\tau_2(u)+\tau_3(u)$ і

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau'(u)\right| \leq \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau_1'(u)\right| + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau_2'(u)\right| + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau_3'(u)\right|. \tag{2.12}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла із правої частини нерівності (2.12). Для цього зауважимо, що для функції

$$\widetilde{\mu}(u) = 1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3. \tag{2.13}$$

справедливі оцінки

$$|\widetilde{\mu}(u)| \leq \frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4, \tag{2.14}$$

$$\left|\widetilde{\mu}'(u)\right| \leq \frac{3}{\delta^3}+\frac{3}{2\delta^2}u+\frac{6}{\delta}u^2+2u^3, \tag{2.15}$$

$$\left|\widetilde{\mu}''(u)\right| \leq \frac{6}{\delta^2}+\frac{12}{\delta}u+3u^2, \tag{2.16}$$

(див., наприклад, [18]). Згідно з рівностями (2.9), (2.13) при $u \geq \frac{1}{\delta}$

$$|d\tau_1'(u)| \leq \bigg(|\widetilde{\mu}(u)|\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}+2|\widetilde{\mu}'(u)|\frac{\delta|\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)}+|\widetilde{\mu}''(u)|\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\bigg)\,du.$$

Тоді з урахуванням співвідношень (2.14)–(2.16), отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{\delta^3}u^2 + \frac{3}{\delta^2}u^3 + \frac{2}{\delta}u^4 + u^5\Big)\delta^2\psi''(\delta u)du$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{2\delta^2}u^2 + \frac{6}{\delta}u^3 + 2u^4\Big)\delta|\psi'(\delta u)|du$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{6}{\delta^2}u + \frac{12}{\delta}u^2 + 3u^3\Big)\psi(\delta u)du.$$

Проінтегруємо перший інтеграл в правій частині останньої нерівності частинами та застосуємо теореми 3.12.1 та 3.16.1 [3], дістанемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^4\psi(\delta)} + \frac{K_3}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\delta} u^3\psi(u)du. \tag{2.17}$$

Для оцінки інтеграла із правої половини (2.17) розіб'ємо проміжок інтегрування $[1,\delta]$ на дві частини: $[1,b]$ і $[b,\delta]$, $\delta > b$.

Оскільки функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є неперервною на $[1,b]$, а отже, обмеженою, то

$$\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{b} u^3\psi(u)du \leq \frac{K}{\delta^4\psi(\delta)}. \tag{2.18}$$

Далі, функція $g(u) = u^3\psi(u)$ є опуклою догори або донизу при $u \geq b$, тому

$$\frac{1}{\delta^4\psi(\delta)} \int\limits_{b}^{\delta} u^3\psi(u)du \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^3\psi(\delta)}. \tag{2.19}$$

З урахуванням (2.18) і (2.19), із (2.17) отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{2.20}$$

Оцінимо другий інтеграл з правої частини нерівності (2.12). Оскільки при $u \geq \frac{1}{\delta}$, згідно з рівністю (2.10),

$$\tau_2''(u) = \left(\frac{4}{\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2\right)\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2\left(\frac{4}{\delta^2} + \frac{2}{\delta}u\right)\frac{\delta\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \frac{2}{\delta}\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)},$$

то

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{\delta^2}u^2 + \frac{1}{\delta}u^3\right)\psi''(\delta u)du$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2\right)|\psi'(\delta u)|du + \frac{2}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u\psi(\delta u)du.$$

Далі, проінтегрувавши частинами перший інтеграл в правій частині останньої нерівності та застосувавши теореми 3.12.1 та 3.16.1 [3], одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| \leq \frac{K_1}{\delta^2} + \frac{K_2}{\delta} + \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{K_4}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du.$$

Отже, справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right). \tag{2.21}$$

Оцінимо тепер третій інтеграл з правої частини нерівності (2.12). Для цього проміжок інтегрування $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$ розіб'ємо на дві частини: $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{b}{\delta}, \frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2b$.

Згідно з (2.11) $\tau_3''(u) = u\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)} + u^2\frac{\delta\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \frac{u^3}{6}\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}$, і тому можемо записати

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| \leq \frac{\delta^2}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^4\psi''(\delta u)du + \frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^3|\psi'(\delta u)|du$$

$$+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi(\delta u)du.$$

Інтегруючи частинами перший інтеграл в правій частині останньої нерівності та застосовуючи теореми 3.12.1 та 3.16.1 [3], отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| \le \frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{K_2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2\psi(\delta u)du \le \frac{K_1}{\delta^3\psi(\delta)}$$

$$+\frac{K_2\psi(1)}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u^2 du = \frac{K_3}{\delta^3\psi(\delta)}.$$

Таким чином, справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u|d\tau_3'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{2.22}$$

З (2.11) та опуклості функції $g(u) = u^3\psi(u)$ випливає, що

$$\int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_3'(u)| = \left| \int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\frac{1}{2}} ud\tau_3'(u) \right| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\right). \tag{2.23}$$

Із співвідношень (2.8), (2.12), (2.20)–(2.23), остаточно одержимо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u|d\tau'(u)| = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\delta} u\psi(u)du\right). \tag{2.24}$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з (2.5). При $u \in [\frac{1}{\delta}, \infty)$

$$\psi(\delta)d\tau'(u) = \Big(e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\psi(\delta u)$$

$$+2e^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)\delta\left|\psi'(\delta u)\right|$$

$$+(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})\delta^2\psi''(\delta u)\Big)du. \tag{2.25}$$

Враховуючи (2.25) та властивості функції $\psi \in \mathfrak{M}$, можемо записати

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\tau'(u)|$$

$$
\leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\psi(\delta u)du
$$

$$
+ \frac{2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}((1 - \gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)\delta|\psi'(\delta u)|du
$$

$$
+ \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})\delta^2\psi''(\delta u)du. \tag{2.26}
$$

Оскільки при $u \geq 0$ справедливі оцінки:

$$
1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} \leq 1, \tag{2.27}
$$

$$
ue^{-u}((1 - \gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2) \leq 2,
$$

$$
(2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2 \leq 8, \tag{2.28}
$$

і $\psi(\delta u) \leq \psi(\delta/2)$ при $u \in [\frac{1}{2}, \infty)$, $\delta \geq 2$, то з (2.26) отримуємо

$$
\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u - 1|\, |d\tau'(u)| \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi''(\delta\psi u)du
$$

$$
+ \frac{4\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\psi'(\delta u)|du + \frac{8\psi(\delta/2)}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}du. \tag{2.29}
$$

Далі, інтегруючи частинами перший інтеграл в правій частині нерівності (2.29) та застосовуючи теореми 3.12.1 та 3.16.1 [3], одержуємо

$$
\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u - 1||d\tau'(u)| = O(1). \tag{2.30}
$$

Для оцінки першого інтеграла з (2.6) розіб'ємо проміжок інтегрування $[0, \infty)$ на три частини: $[0, \frac{1}{\delta}]$, $[\frac{1}{\delta}, 1]$ та $[1, \infty)$. Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ на $[0, \frac{1}{\delta}]$, та використовуючи співвідношення (2.1) і нерівність

$$
1 - e^{-u} - \gamma ue^{-u} - \theta u^2 e^{-u} \leq \frac{2}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2 + u^3, \quad u \geq 0, \tag{2.31}
$$

отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} (1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \theta u^2 e^{-u}) \frac{du}{u}$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + u^2 \right) du \leq \frac{K}{\delta^3 \psi(\delta)}. \tag{2.32}$$

Отже, із формул (2.1), (2.13), (2.14) випливають співвідношення

$$\Bigg| \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{\tau(u)}{u} du - \frac{4}{3\delta^2 \psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \psi(\delta u) du - \frac{1}{\delta \psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} u\psi(\delta u) du$$

$$- \frac{1}{6\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} u^2 \psi(\delta u) du \Bigg| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\widetilde{\mu}(u)|}{u} \psi(\delta u) du$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \left(\frac{3}{\delta^3} + \frac{3}{\delta^2} u + \frac{2}{\delta} u^2 + u^3 \right) \psi(\delta u) du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \right).$$

Звідси маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\tau(u)|}{u} du = \frac{4}{3\delta^3 \psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} \psi(u) du + \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u\psi(u) du$$

$$+ \frac{1}{6\delta^3 \psi(\delta)} \int\limits_1^{\delta} u^2 \psi(u) du + O\left(1 + \frac{1}{\delta^3 \psi(\delta)} \right). \tag{2.33}$$

Із співвідношення (2.1), взявши до уваги, що функція $\psi(u)$ є спадною при $u \geq 1$, отримуємо

$$\left| \int\limits_1^{\infty} \frac{\tau(u)}{u} - \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du \right| \leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-u}(1 + \gamma u + \theta u^2)}{u} \psi(\delta u) du$$

$$\leq \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} + \gamma e^{-u} + \theta u e^{-u} \right) \psi(\delta u) du \leq K. \tag{2.34}$$

Із співвідношень (2.32)–(2.34), враховуючи, що

$$\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta \psi(u)du \le \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u\psi(u)du \le \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du$$

і $\lim\limits_{\delta\to\infty}\int\limits_1^\delta u\psi(u)du \ge K$, будемо мати

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{1}{6\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u^2\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du$$

$$+O\Bigg(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u\psi(u)du\Bigg). \qquad (2.35)$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з (2.6). Аналогічно до формули (43) [7] можна показати, що для функції $\tau(u)$, заданої за допомогою співвідношення (2.1), для всіх $\psi\in\mathfrak{M}_0$ справедлива рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = \int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du + O(H(\tau)), \qquad (2.36)$$

де $H(\tau)$ визначається за допомогою формули

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int\limits_0^{\frac12} u\left|d\tau'(u)\right| + \int\limits_{\frac12}^\infty |u-1|\left|d\tau'(u)\right|,$$

а $\lambda(u) = (1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}$. Скориставшись тим, що

$$\int\limits_0^1 |\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u} = \int\limits_0^1 |e^{-1+u} - e^{-1-u} + \gamma(1-u)e^{-1+u}$$

$$-\gamma(1+u)e^{-1-u} + \theta(1-u)^2e^{-1+u} - \theta(1+u)^2e^{-1-u}|\frac{du}{u} = O(1),$$

а також співвідношеннями (2.24), (2.30), (2.36), матимемо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = O\Bigg(1+\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^\delta u\psi(u)du\Bigg). \qquad (2.37)$$

Таким чином, застосовуючи теорему 1 [22, с. 24], приходимо до висновку, що перетворення $\widehat{\tau}_{\beta}(t)$ функції $\tau(u)$, заданої у вигляді (2.1), сумовне на всій числовій осі. Із нерівностей (2.14) і (2.15) цієї ж роботи, з урахуванням формул (2.24), (2.30), (2.35) і (2.37), отримуємо співвідношення (2.4).

Провівши міркування аналогічні як і в роботі [7] можна показати, що для оператора $P_{3,\delta}$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{3,\delta})_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\biggl(\psi\,(\delta) \int\limits_{|t|\geq \frac{\delta\,\pi}{2}} |\widehat{\tau}_{\beta}(t)|\,dt\biggr), \qquad (2.38)$$

де $A(\tau)$ означається рівністю (2.2), $\tau(u)$ задана за допомогою співвідношення (2.1), і її перетворення $\widehat{\tau}_{\beta}(t)$ є сумовним на всій числовій осі.

Використовуючи методи дослідження залишкового члена в правій частині рівності (2.38), що представлені в роботі [17], одержимо наступну оцінку

$$\int\limits_{|t|\geq \frac{\delta\pi}{2}} |\widehat{\tau}_{\beta}(t)|dt = O\biggl(\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)} + \frac{1}{\delta^4\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du\biggr). \qquad (2.39)$$

Із співвідношень (2.39) та (2.38) випливає рівність (2.3). Теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.1. *Якщо виконуються умови теореми,* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, *де* $\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, *то при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{2}{\pi}\Bigl|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigr|\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du + O\left(\psi(\delta)\right). \qquad (2.40)$$

Доведення. Якщо $\psi\in\mathfrak{M}'_0$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $u_0\geq 1$, що при $u > u_0$ $(u^{\varepsilon}\psi(u))' > 0$, тобто функція $u^{\varepsilon}\psi(u)$ зростає, починаючи з деякого числа u_0 і $\lim\limits_{u\to\infty}u^{\varepsilon}\psi(u) = \infty$. А тому, при достатньо великих δ і $0<\varepsilon<3$

$$\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du = \frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}\frac{u^{\varepsilon+2}\psi(u)}{u^{\varepsilon}}du$$

$$\leq \frac{\delta^{\varepsilon}\psi(\delta)}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\varepsilon}du = O(1). \qquad (2.41)$$

Використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_x^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|} = \infty. \qquad (2.42)$$

Тепер враховуємо, що

$$\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{\delta^4}\int\limits_1^{\delta} u^2\psi(u)du = o(\psi(\delta)), \qquad (2.43)$$

а також співвідношення (2.41) та (2.42), тоді із (2.3), (2.4) отримуємо (2.40). □

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 2.1 є функції вигляду $\psi(u)=\frac{1}{\ln^{\alpha}(u+K)}$, де $\alpha>1$, $K>0$.

Наслідок 2.2. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, функція $u^3\psi(u)$ є опукла вгору або донизу на $[b,\infty), b\geq 1$, та існує $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$, де $\alpha(t)=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, і*

$$\lim_{u\to\infty}u^3\psi(u)=\infty, \qquad (2.44)$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta^3\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du=\infty, \qquad (2.45)$$

тоді при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta^3}\int\limits_1^{\delta}u^2\psi(u)du + O\left(\psi(\delta)\right). \qquad (2.46)$$

Доведення. Якщо функція ψ задовольняє умови (2.44) і (2.45), то використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_1^{x}u^2\psi(u)du}{x^3\psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\psi(x)}{3x^2\psi(x)+x^3\psi'(x)} = \frac{1}{3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}} = \infty.$$

Звідси випливає

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = -3. \qquad (2.47)$$

Враховуючи (2.42) та (2.47), одержуємо, що $\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du = O(\psi(\delta))$.

Використовуючи останню оцінку та співвідношення (2.3), (2.4), (2.43)–(2.45), отримуємо (2.46). □

Відмітимо, що умови наслідку 2.2 задовольняють, наприклад, функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^3} \ln^{\alpha}(u+K), K > 0, \alpha > 0$.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u^3\psi(u)$ *є опукла донизу на* $[b,\infty), b \geq 1$, *і*

$$\lim_{u\to\infty} u^3\psi(u) = K < \infty, \tag{2.48}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \int\limits_{1}^{\delta} u^2\psi(u)du = \infty, \tag{2.49}$$

тоді при $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{3\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta^3} \int\limits_{1}^{\delta} u^2\psi(u)du + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right). \tag{2.50}$$

Доведення. Оскільки функція $u^3\psi(u)$ опукла донизу на проміжку $[b,\infty)$, $b \geq 1$, та задовольняє умову (2.48), то можемо зробити висновок, що вона монотонно спадає при $u \geq b$. Отже, при $\delta > b$ будемо мати

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du = \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{u^3\psi(u)}{u^4} du \leq \delta^3\psi(\delta) \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{1}{u^4} du = O(\psi(\delta)),$$

$$\psi(\delta) = O\Big(\frac{1}{\delta^3}\Big).$$

Використовуючи останні оцінки та співвідношення (2.3), (2.4), (2.48) та (2.49) отримуємо (2.50). □

Прикладом функцій ψ, для яких має місце наслідок 3, є функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u^3} \operatorname{arctg}^{-1} u$, $\psi(u) = \frac{1}{u^3}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \frac{1}{u^3 \ln^{\alpha}(u+K)}$, $K > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Слід відмітити, що при виконанні умов наслідків 2.1–2.3 рівності (2.40), (2.46) та (2.50) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці, коли функції ψ мають незначну швидкість спадання до нуля.

Література

[1] Тиман, М.Ф. (2009). *Аппроксимация и свойства периодических функций.* Київ, Наукова думка.

[2] Степанец, А.И. (1987). *Классификация и приближение периодических функций.* Киев, Наукова думка.

[3] Степанец, А.И. (2002). *Методы теории приближения. Ч.I.*. Киев: Ин-т математики НАН Украины.

[4] Ryazanov, V.I. (2019). Stieltjes integrals in the theory of harmonic functions. *J. Math. Sci., 243*(6), 922–933.

[5] Каниев, С. (1963). Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений. *Докл. АН СССР, 153*(5), 995–998.

[6] Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I. (2001). On the approximation of functions of the Holder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J., 53*(6), 1012–1018.

[7] Zhyhallo, T.V., Kharkevych, Yu.I. (2009). Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J., 61*(11), 1757–1779.

[8] Zhyhallo, T.V., Kharkevych, Yu.I. (2009). Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J., 61*(12), 1893–1914.

[9] Kharkevich, Y.I., Stepanyuk, T.A. (2014). Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta} H^{\alpha}$. *Math Notes, 96*(5–6), 1008–1019.

[10] Zhyhallo, T.V., Kharkevych, Yu.I. (2022). On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel-Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ., 14*(1), 223–229.

[11] Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I. (2011). Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J., 63*(7), 1083–1107.

[12] Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I. (2012). Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J., 63*(12), 1820–1844.

[13] Abdullayev, F.G., Kharkevych, Yu.I. (2020). Approximation of the classes $C^{\psi}_{\beta} H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J., 72*(1), 21–38.

[14] Швецова, А.М. (2001). Приближение частными суммами Фурье и наилучшее приближение некоторых классов функций. *Analysis Math., 27*, 201–222.

[15] Тригуб, Р.М. (1989). Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L. *Докл. АН СССР, 306*(2), 292–296.

[16] Trigub, R.M. (1991). Multipliers of Fourier series. *Ukr. Math. J., 43*(12), 1572–1578.

[17] Hrabova, U.Z., Kal'chuk, I.V. (2019). Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ., 11*(2), 321–334.

[18] Kal'chuk, I.V., Kravets, V.I., Hrabova, U.Z. (2019). Approximation of the classes $W^{r}_{\beta} H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. Bull., 16*(3), 357–371.

[19] Hrabova, U.Z., Kal'chuk, I.V., Filozof, L.I. (2020). Approximative properties of the three-harmonic Poisson integrals on the classes $W^{r}_{\beta} H^{\alpha}$. *Ukr. Math. Bull., 17*(4), 538–548.

[20] Shapiro, H.S. (1968). Some Tauberian teorems with applications to approximation theory. *Bull. Amer. Math. Soc., 74*, 499–504.

[21] Тригуб, Р.М. (1968). Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье. *Изв. АН СССР. Сер. матем., 32*(1), 24–49.

[22] Баусов, Л.И. (1965). Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I. *Изв. вузов., 46*(3), 15–31.

Відомості про авторів

Уляна Зеновіївна Грабова

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: grabova_u@ukr.net

Інна Володимирівна Кальчук

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: k.inna.80@gmail.com