Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 3, 373 – 381
https://doi.org/10.32782/1810-3200-2022-19-3-5

Про степеневу поведінку на нескінченності одного класу відображень

Богдан А. Кліщук

(*Представлена В. І. Рязановим*)

Анотація. В роботі розглядаються Q-гомеоморфізми відносно p-модуля на комплексній площині при $p > 2$. Досліджено поведінку на нескінченності такого класу відображень. Отримано оцінку для нижнього степеневого порядку.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключові слова та фрази. Q-гомеоморфізми, p-модуль сім'ї кривих, конденсатор, p-ємність конденсатора.

1. Вступ

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \;\geqslant\; 1$$

для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma \in \Gamma$.
Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді *p–модулем* сім'ї Γ називають величину

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\, dm(z)\,.$$

Тут m – міра Лебега в $\mathbb{C}$.

Припустимо, що D – область в комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна відкрита підмножина $\mathbb{C}$ і $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна функція. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ будемо називати Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля, якщо

Стаття надійшла в редакцію 20.05.2022

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma)\ \leqslant\ \int\limits_{D} Q(z)\,\varrho^p(z)\,dm(z) \tag{1.1}$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих в D і будь-якої допустимої функції ϱ для Γ.

Теорія Q-гомеоморфізмів в просторі $\mathbb{R}^n$ при $p=n$ досліджувалась в роботах [1–5], при $1<p<n$ див. [6–13] і при $p>n$ див. в [14–18]. Більш загальні класи відображень досліджувались в [19–25].

Дослідження нерівностей типу (1.1) при $p=2$ є в роботах Л. Альфорса (див., напр., теорему 3, пункт D, розд. I, [28]), а також О. Лехто і К. Вертанена (див. нерівність (6.6), пункт 6.3, розд. V в [29]). В роботі В.Я. Гутлянського (спільно з К. Бішопом, О. Мартіо і М. Вуоріненом) доведено багатовимірний аналог нерівності (1.1) для квазіконформних відображень (див. [30]).

Відмітимо також, що якщо в (1.1) вважати, що функція Q обмежена м.с. деякою сталою $K\in[1,\infty)$ і $p=2$, то ми приходимо до класичних квазіконформних відображень, які були вперше введені в роботах Грьотча, Лаврентьєва і Моррі.

Нехай $\alpha>0$, тоді *нижнім степеневим α-порядком* гомеоморфізму $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ будемо називати величину

$$P_f(z_0,\alpha)=\varliminf_{R\to\infty}\ \frac{\max\limits_{|z-z_0|=R}|f(z)-f(z_0)|}{R^{\alpha}}.$$

У роботі буде встановлено оцінку для нижнього степеневого α-порядку $P_f(z_0,\alpha)$ для Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Нехай $Q:D\to[0,\infty]$ – вимірна функція. Для будь-якого числа $r>0$ позначимо

$$q_{z_0}(r)=\frac{1}{2\pi\, r}\int\limits_{S(z_0,r)} Q(z)\,|dz|$$

– середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|=r\}$.

Наведемо деякі допоміжні відомості про p-ємність конденсатора. Згідно роботи [32], пару $\mathcal{E}=(A,C)$, де $A\subset\mathbb{C}$ – відкрита множина і C – непорожня компактна множина, що міститься в A, називаємо *конденсатором.* Конденсатор $\mathcal{E}$ називається *кільцевим конденсатором*, якщо $\mathfrak{R}=A\setminus C$ – кільцева область, тобто, якщо $\mathfrak{R}$ – область, доповнення до якої $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathfrak{R}$ складається в точності із двох компонент.

Конденсатор $\mathcal{E}$ називається *обмеженим конденсатором*, якщо множина A обмежена. Говорять також, що конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежить в області D, якщо $A \subset D$. Очевидно, що якщо $f : D \to \mathbb{C}$ – неперервне, відкрите відображення і $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) також конденсатор в fD. Далі $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Нехай $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор. Позначимо через $\mathcal{C}_0(A)$ множину неперервних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ з компактним носієм. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ – сім'я невід'ємних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, що 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x, y) \geqslant 1$ для $(x, y) \in C$ і 3) u належить класу ACL. При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(z)\,,$$

де

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

називають *p-ємністю* конденсатора $\mathcal{E}$.

В подальшому ми будемо використовувати встановлену в роботі [33] рівність

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{1.2}$$

де для множин $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}$ в $\mathbb{C}$, $\Delta(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2; \mathcal{F})$ позначає сім'ю всіх неперервних кривих, що з'єднують $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ в $\mathcal{F}$.

При $p > 2$ має місце нерівність

$$\operatorname{cap}_p (A, C) \geqslant 2\,\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left[m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(A) - m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(C)\right]^{1-p} \tag{1.3}$$

(див., напр., нерівність 8.7 в [34]). Тут m – міра Лебега в $\mathbb{C}$.

2. Основні результати

Для фіксованих чисел $\alpha > 0$, $r_0 > 0$, $p > 2$, $z_0 \in \mathbb{C}$ та функції $q_{z_0}(t)$ визначимо наступну величину

$$\mu_q = \mu_q(\alpha, p, r_0) = \varliminf_{R \to \infty} \frac{1}{R^{\frac{\alpha(p-2)}{p-1}}} \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\,,$$

де $q_{z_0}(t) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S(z_0,t)} Q(z)\,|dz|$ – середнє інтегральне значення по колу $S(z_0, t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = t\}$.

Теорема 1. *Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці z_0 при $p > 2$, де z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$. Тоді виконується оцінка*

$$P_f(z_0, \alpha) \geqslant \left(\frac{p-2}{p-1} \cdot \mu_q(\alpha, p, r_0)\right)^{\frac{p-1}{p-2}}. \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай $0 < r_0 < R < \infty$ та $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$. Розглянемо конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ в $\mathbb{C}$, де

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r_0\}.$$

Тоді $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ – кільцевий конденсатор в $\mathbb{C}$ і згідно (1.2) маємо рівність

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E} = \mathcal{M}_p\left(\Delta(\partial fA, \partial fC; f(A \setminus C))\right). \tag{2.2}$$

Внаслідок нерівності (1.3) одержимо

$$\operatorname{cap}_p(fA, fC) \geqslant c_p \left[m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fA) - m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fC)\right]^{1-p}, \tag{2.3}$$

де $c_p = 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}$.

Позначимо функцію

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}, & t \in (r_0, R) \\ 0, & t \notin (r_0, R) \end{cases}$$

та функцію $\varrho(z) = \frac{\psi(|z-z_0|)}{I}$, де $I = \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}$. Легко перевірити, що функція ϱ є допустимою для сім'ї кривих

$$\Gamma_{\mathbb{A}} = \Delta(S(z_0, R), S(z_0, r_0); \mathbb{A}).$$

За означенням Q-гомеоморфізму відносно p-модуля маємо

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma_{\mathbb{A}}) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} Q(z)\, \varrho^p(z)\, dm(z).$$

Далі, зауважимо

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} Q(z)\, \varrho^p(z)\, dm(z) = \frac{1}{I^p} \int\limits_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} Q(z)\, \psi^p(|z - z_0|)\, dm(z).$$

З останньої рівності за теоремою Фубіні (див. [35], с. 119) отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,r_0,R)} Q(z)\,\varrho^p(z)\,dm(z) = \frac{2\pi}{I^{p-1}}\,.$$

Таким чином, приходимо до оцінки

$$\mathcal{M}_p(f\Gamma_{\mathbb{A}}) \leqslant \frac{2\pi}{I^{p-1}}\,.$$

Внаслідок рівності (2.2), маємо

$$\mathrm{cap}_p\,(fA, fC) \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,. \tag{2.4}$$

Комбінуючи нерівності (2.3) і (2.4), одержимо

$$c_p\,\left[m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fA) - m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fC)\right]^{1-p} \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,,$$

де $c_p = 2\,\pi^{\frac{p}{2}}\,\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}$. Останню оцінку можна переписати у наступному вигляді

$$c_p'\,\left[m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fA) - m^{\frac{p-2}{2(p-1)}}(fC)\right]^{1-p} \leqslant \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{1-p},$$

де $c_p' = \pi^{\frac{p}{2}-1}\,\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}$. Таким чином, отримаємо

$$m(fA) \geqslant \pi\,\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}\,\left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}\,. \tag{2.5}$$

Застосовуючи оцінку

$$m(fB(z_0,R)) \leqslant \pi\,\left(\max_{|z-z_0|=R}\,|f(z)-f(z_0)|\right)^2,$$

із нерівності (2.5) випливає

$$\max_{|z-z_0|=R} |f(z)-f(z_0)| \geqslant \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} .$$

Поділивши останню нерівність на R^{α}, отримаємо

$$\frac{\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)-f(z_0)|}{R^{\alpha}} \geqslant \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\frac{1}{R^{\frac{\alpha(p-2)}{p-1}}} \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} .$$

Перейшовши в останній нерівності до нижньої границі при $R \to \infty$, приходимо до висновку

$$P_f(z_0,\alpha) \geqslant \left(\frac{p-2}{p-1} \cdot \mu_q(\alpha,p,r_0)\right)^{\frac{p-1}{p-2}} ,$$

де $\mu_q(\alpha,p,r_0) = \varliminf\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\frac{\alpha(p-2)}{p-1}}} \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}$. □

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми 1 при $\mu_q(\alpha,p,r_0)=\infty$, то $\varliminf\limits_{R\to\infty} \frac{M_f(z_0,R)}{R^{\alpha}} = \infty$.

Приклад. Нехай $f_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, де

$$f_0(z) = k\, z\, |z|^{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 .$$

Покажемо, що відображення, визначене таким чином, є Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з $Q(z) = k^{2-p}\, \alpha\, |z|^{(\alpha-1)(2-p)}$. Дійсно,

$$l(z,f_0) = \frac{|f_0(z)|}{|z|} = k\, |z|^{\alpha-1} , \qquad L(z,f_0) = \frac{\partial |f_0(z)|}{\partial |z|} = k\, \alpha\, |z|^{\alpha-1} .$$

Далі, знаходимо якобіан та внутрішню p-дилатацію відображення f_0.

$$J(z,f_0) = l(z,f_0) \cdot L(z,f_0) = k^2\, \alpha\, |z|^{2\alpha-2} ,$$

$$K_{I,p}(z,f_0) = \frac{J(z,f_0)}{l^p(z,f_0)} = k^{2-p}\, \alpha\, |z|^{(\alpha-1)(2-p)} .$$

Згідно з теоремою 1.1 з роботи [36] відображення f_0 є Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією

$$Q(z) = K_{I,p}(z,f_0) = k^{2-p}\, \alpha\, |z|^{(\alpha-1)(2-p)} .$$

Очевидно, що

$$\max_{|z|=R} |f_0(z)| = k\,R^{\alpha}\,, \qquad P_{f_0}(z_0,\alpha) = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\max\limits_{|z|=R} |f_0(z)|}{R^{\alpha}} = k$$

та

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi\, r} \int\limits_{|z|=r} Q(z)\,|dz| = k^{2-p}\,\alpha\, r^{(\alpha-1)(2-p)}, \quad z_0 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\mu_q(\alpha,p,r_0) = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\frac{\alpha(p-2)}{p-1}}} \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \frac{p-1}{(p-2)\,k^{\frac{2-p}{p-1}}\,\alpha^{\frac{p}{p-1}}}\,.$$

Очевидно, що нерівність (2.1) виконується для відображення f_0.

Література

[1] Ryazanov, V.I., Sevost'yanov, E.A. (2007). Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms. *Siberian Mathematical Journal, 48*(6), 1093–1105.

[2] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Q-homeomorphisms. *Complex analysis and dynamical systems Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 364*, 193–203.

[3] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann.Acad. Sci. Fenn. Math., 30*(1), 49–69.

[4] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory.* Springer Math. Monogr., New York.

[5] Salimov, R. (2008). ACL and differentiability of a generalization of quasi-conformal maps. *Izvestiya: Mathematics, 72*(5), 977–984.

[6] Golberg, A. (2009). Differential properties of (α,Q)-homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, 218–228.

[7] Golberg, A. (2010). Integrally quasiconformal mappings in space. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine, 7*(2), 53–64.

[8] Golberg, A., Salimov, R. (2014). Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module. *Complex Variables and Elliptic Equations, 59*(1), 91–98.

[9] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). Distortion estimates under mappings with controlled p-module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math 5 (LXIII)*, 95–114.

[10] Salimov, R. (2011). On finitely Lipschitz space mappings. *Siberian Elecronic Mathematical Reports, 8*, 284–295.

[11] Salimov, R. (2012). Estimation of the measure of the image of the ball. *Siberian Mathematical Journal, 53*(4), 920–930.

[12] Salimov, R. (2013). To a theory of ring Q-homeomorphisms with respect to a p-modulus. *Ukrainian Mathematical Bulletin, 10*(3), 379–396.

[13] Salimov, R. (2013). One property of ring Q-homeomorphisms with respect to a p-module. *Ukrainian Mathematical Journal, 65*(5), 728–733.

[14] Salimov, R., Klishchuk, B. (2016). The extremal problem for the area of an image of a disc. *Reports of the NAS of Ukraine, 10*, 22–27.

[15] Klishchuk, B., Salimov, R. (2017). Lower bounds for the area of the image of a circle. *Ufa Mathematical Journal, 9*(2), 55–61.

[16] Salimov, R., Klishchuk, B. (2017). Extremal problem for the area of the image of a disk. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 456*, 160–171.

[17] Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii, 50*(1), 36–43.

[18] Klishchuk, B., Salimov, R. (2019). Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal, 71*(6), 774–785.

[19] Cristea, M. (2014). Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Var. Eliptic Equ., 59*(2), 232–246.

[20] Cristea, M. (2016). Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Var. Eliptic Equ., 61*(5), 623–643.

[21] Cristea, M. (2019). Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Var. Eliptic Equ., 64*(4), 676–684.

[22] Маркиш, А.А., Салимов, Р.Р., Севостьянов, Е.А. (2018). Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений. *Укр. мат. журн., 70*(11), 1553–1562.

[23] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled p-module. *J. Anal. Math., 127*, 303–328.

[24] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes. *Complex Analysis and Operator Theory, 10*, 881–901.

[25] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2017). Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module. *Complex Anal. Oper. Theory, 11*(7), 1521–1542.

[26] Bojarski, B., Gutlyanskii, V., Martio, O., Ryazanov, V. (2013). *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane.* EMS Tracts in Mathematics, 19. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013.

[27] Салимов, Р.Р. (2014). Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева. *Алгебра и анализ, 26*(6), 143–171.

[28] Альфорс, Л. (1969). *Лекции по квазиконформным отображениям.* Москва, Мир.

[29] Lehto, O., Virtanen, K. (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane. New York etc., Springer.

[30] Bishop, C.J., Gutlyanskii, V.Ya., Martio, O., Vuorinen, M. (2003). On conformal dilatation in space. *Intern. J. Math. and Math. Scie., 22*, 1397–1420.

[31] Gehring, F.W. (1971). Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space. *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, 66*, 175–193.

[32] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1969). Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 448*, 1–40.

[33] Shlyk, V.A. (1993). On the equality between p-capacity and p-modulus. *Sibirsk. Mat. Zh., 34*(6), 216–221.

[34] Maz'ya, V. (2003). Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces. *Contemp. Math., 338*, 307–340.

[35] Сакс, С. (1949). *Теория интеграла.* Издательство ИЛ, М.

[36] Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). The Poletskii and Vaisala inequalities for the mappings with (p,q)-distortion. *Complex Variables and Elliptic Equations, 59*(2), 217–231.

Відомості про авторів

Богдан Анатолійович Кліщук

Інститут математики НАН України,
Київ, Україна
E-Mail: `kban1988@gmail.com`