Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 3, 413 – 425
https://doi.org/10.32782/1810-3200-2022-19-3-7

Диференціально-символьний метод розв'язування задачі Діріхле у нескінченній смузі для системи диференціальних рівнянь зі зсувами

Зіновій М. Нитребич

(Представлена І. І. Скрипніком)

Анотація. Виділено клас квазіполіномів як клас існування та єдиності розв'язку задачі Діріхле у нескінченній смузі $\{(t,x)\colon t\in(0,\tau),\ x\in\mathbb{R}\}$. Задача полягає у знаходженні розв'язку системи двох однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та зсувами за просторовою змінною. Розв'язок на межі смуги задовольняє неоднорідні умови Діріхле. Запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку. Подано приклади реалізації методу.

2010 MSC. 35G45.

Ключові слова та фрази. Диференціально-символьний метод, задача Діріхле, диференціальні рівняння зі зсувами, квазіполіномні розв'язки.

1. Вступ

Вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь зі зсувами становить інтерес не лише з точки зору побудови загальної теорії крайових задач. Дослідження таких задач стимулюється проблемами практики. Крайові задачі зі зсувами аргументів виникають при моделюванні різноманітних процесів, зокрема, процесів біологічної енергетики [1], газової динаміки [2], лазерних систем [3] та інших.

Диференціальним рівнянням зі зсувами, а також їх узагальненням присвячено чимало літератури (див. монографії [1, 4] та бібліографію в них).

Стаття надійшла в редакцію 02.05.2022

Розв'язності задач для рівнянь зі зсувами за просторовими змінними у шкалі просторів Соболєва з нелокальними умовами присвячені праці [5–7], з інтегральними умовами – [8], з умовами типу Діріхле – [9].

У цій праці за допомогою диференціально-символьного методу [10–12] досліджено розв'язність задачі Діріхле для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними зі зсувами та вказано метод побудови розв'язку задачі.

2. Формулювання задачі

У нескінченній смузі $S_\tau = \{(t,x):\ t \in (0,\tau),\ x \in \mathbb{R}\}$, де $\tau > 0$, досліджується розв'язність задачі Діріхле для системи диференціальних рівнянь зі зсувами

$$\frac{\partial^2 U_j(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{k=1}^{2} a_{jk} U_k(t, x + c_{jk})\right\} + \sum_{k=1}^{2} b_{jk} U_k(t, x + d_{jk}) = 0, \quad j = 1,2, \quad (t,x) \in S_\tau, \tag{2.1}$$

з неоднорідними умовами на межі смуги

$$U_k((j-1)\tau, x) = \Phi_{jk}(x), \quad j,k = 1,2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

У системі (2.1) $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} \in \mathbb{R}$, в умовах (2.2) $\Phi_{jk}(x)$ – задані функції, $j,k = 1,2$.

З урахуванням формули

$$e^{c\frac{d}{dx}} F(x) = F(x+c), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

яка справджується для довільної аналітичної в точці $x = 0$ функції $F(x)$, систему (2.1) можна записати у вигляді

$$D\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) U(t,x) \equiv \Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \frac{\partial}{\partial t} A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) + B\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big] U(t,x) = \overline{O}, \tag{2.4}$$

де

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} e^{c_{11}\frac{\partial}{\partial x}} & a_{12} e^{c_{12}\frac{\partial}{\partial x}} \\ a_{21} e^{c_{21}\frac{\partial}{\partial x}} & a_{22} e^{c_{22}\frac{\partial}{\partial x}} \end{pmatrix}, B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} b_{11} e^{d_{11}\frac{\partial}{\partial x}} & b_{12} e^{d_{12}\frac{\partial}{\partial x}} \\ b_{21} e^{d_{21}\frac{\partial}{\partial x}} & b_{22} e^{d_{22}\frac{\partial}{\partial x}} \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ U(t,x) = \begin{pmatrix} U_1(t,x) \\ U_2(t,x) \end{pmatrix}.$$

Замінивши похідну $\frac{\partial}{\partial x}$ на параметр ν, запишемо матричне звичайне диференціальне рівняння

$$D\Big(\frac{d}{dt},\,\nu\Big)L(t,\nu)\equiv\Big[\frac{d^2}{dt^2}E_2+\frac{d}{dt}A(\nu)+B(\nu)\Big]L(t,\nu)=O_2, \tag{2.5}$$

де O_2 – нульова матриця другого порядку. Вважаючи, що ν – комплексний параметр, маємо, що елементи матриць $A(\nu)$ та $B(\nu)$ є цілими функціями.

Позначимо через $L(t,\nu)=\big(L_0(t,\nu)\ L_1(t,\nu)\big)$ нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.5), де $L_0(t,\nu)$ та $L_1(t,\nu)$ – матриці другого порядку. Отже, ці матриці є розв'язками рівняння (2.5) і задовольняють початкові умови

$$\begin{aligned} &L_0(0,\nu)=E_2, \qquad \frac{dL_0}{dt}\bigg|_{t=0}=O_2,\\ &L_1(0,\nu)=O_2, \qquad \frac{dL_1}{dt}\bigg|_{t=0}=E_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Розглянемо тепер таку фундаментальну систему $M(t,\nu)=\big(M_0(t,\nu)\ M_1(t,\nu)\big)$ розв'язків матричного рівняння (2.5), що задовольняє умови

$$\begin{aligned} &M_0(0,\nu)=E_2, \qquad M_0(\tau,\nu)=O_2,\\ &M_1(0,\nu)=O_2, \qquad M_1(\tau,\nu)=E_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Шукаючи $M_0(t,\nu)$ та $M_1(t,\nu)$ у вигляді лінійної комбінації матриць $L_0(t,\nu)$ та $L_1(t,\nu)$, тобто у вигляді

$$M_j(t,\nu)=\sum_{k=0}^{1}L_k(t,\nu)C_{jk}(\nu),\quad j=0,1,$$

де $C_{jk}(\nu)$ – невідомі матриці, залежні від параметра ν, згідно з умовами (2.7) знаходимо

$$M_0(t,\nu)=L_0(t,\nu)-L_1(t,\nu)L_1^{-1}(\tau,\nu)L_0(\tau,\nu), \tag{2.8}$$

$$M_1(t,\nu)=L_1(t,\nu)L_1^{-1}(\tau,\nu). \tag{2.9}$$

Очевидно, що матриці $M_0(t,\nu)$, $M_1(t,\nu)$ можна побудувати лише для тих ν, які належать до множини вигляду

$$P=\{\nu\in\mathbb{C}\colon\ \ \det L_1(\tau,\nu)\neq 0\}\,. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що нормальну фундаментальну систему $\{L_0(t,\nu), L_1(t,\nu)\}$ можна побудувати у такий спосіб. Спочатку $L_1(t,\nu)$ знайдемо за формулою

$$L_1(t,\nu) = \widetilde{D}\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)\big(W(t,\nu)E_2\big), \tag{2.11}$$

де $\widetilde{D}(\lambda,\nu)$ – приєднана матриця для $D(\lambda,\nu) = \lambda^2 E_2 + \lambda A(\nu) + B(\nu)$, оператор-матриця $\widetilde{D}(\frac{d}{dt},\nu)$ одержується з $\widetilde{D}(\lambda,\nu)$ заміною λ на $\frac{d}{dt}$, а $W(t,\nu)$ – розв'язок такої задачі Коші:

$$\Big[\det \widetilde{D}\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)\Big]W(t,\nu) = 0, \tag{2.12}$$

$$W(0,\nu) = \frac{dW}{dt}(0,\nu) = \frac{d^2W}{dt^2}(0,\nu) = 0, \quad \frac{d^3W}{dt^3}(0,\nu) = 1. \tag{2.13}$$

Матрицю $L_0(t,\nu)$ знайдемо через $L_1(t,\nu)$ за такою формулою:

$$L_0(t,\nu) = \frac{dL_1(t,\nu)}{dt} + L_1(t,\nu)A(\nu). \tag{2.14}$$

Функція W, а також елементи матриць L_0 та L_1 є цілими функціями параметра ν. Елементи ж матриць M_0 і M_1 – аналітичні в області P, якщо $P \neq \varnothing$.

3. Приклади побудови фундаментальних систем для матричного рівняння

У цьому пункті розглянемо побудову матриць $L_0(t,\nu)$, $L_1(t,\nu)$, $M_0(t,\nu)$, $M_1(t,\nu)$ для випадків $P \neq \mathbb{C}$ та $P = \mathbb{C}$.

<u>*Випадок 1.*</u> Нехай $A(\nu) = O_2$, $B(\nu) = \begin{pmatrix} -2e^{2\nu} & e^{5\nu} \\ -e^{-\nu} & 0 \end{pmatrix}$, $\tau = 1$. Тоді маємо:

$$D(\lambda,\nu) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2e^{2\nu} & e^{5\nu} \\ -e^{-\nu} & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D}(\lambda,\nu) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -e^{5\nu} \\ e^{-\nu} & \lambda^2 - 2e^{2\nu} \end{pmatrix},$$

$$\det \widetilde{D}(\lambda,\nu) = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -e^{5\nu} \\ e^{-\nu} & \lambda^2 - 2e^{2\nu} \end{vmatrix} = \big(\lambda^2 - e^{2\nu}\big)^2.$$

Звичайне диференціальне рівняння (2.12) набуває вигляду

$$\Big(\frac{d^2}{dt^2} - e^{2\nu}\Big)^2 W(t,\nu) = 0. \tag{3.1}$$

Розв'язком задачі Коші для рівняння (3.1) з умовами (2.13) є така функція

$$W(t,\nu) = \frac{e^{\nu}\, t \operatorname{ch}(e^{\nu}t) - \operatorname{sh}(e^{\nu}t)}{2e^{3\nu}}.$$

Знайдемо матрицю $L_1(t,\nu)$ за формулою (2.11):

$$L_1(t,\nu) = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2} & -e^{5\nu} \\ e^{-\nu} & \dfrac{d^2}{dt^2} - 2e^{2\nu} \end{pmatrix} (W(t,\nu)E_2) = \begin{pmatrix} W'' & -e^{5\nu}W \\ e^{-\nu}W & W'' - 2e^{2\nu}W \end{pmatrix},$$

де $W \equiv W(t,\nu)$, $W'' \equiv \dfrac{d^2}{dt^2} W(t,\nu)$.

Неважко переконатися безпосередньо, що $W'' = e^{2\nu}W + e^{-\nu}\operatorname{sh}(e^{\nu}t)$, тому

$$L_1(t,\nu) = \begin{pmatrix} e^{2\nu}W + e^{-\nu}\operatorname{sh}(e^{\nu}t) & -e^{5\nu}W \\ e^{-\nu}W & -e^{2\nu}W + e^{-\nu}\operatorname{sh}(e^{\nu}t) \end{pmatrix}.$$

За формулою (2.14) знаходимо

$$L_0(t,\nu) = \frac{dL_1(t,\nu)}{dt} = \begin{pmatrix} e^{2\nu}W' + \operatorname{ch}(e^{\nu}t) & -e^{5\nu}W' \\ e^{-\nu}W' & -e^{2\nu}W' + \operatorname{ch}(e^{\nu}t) \end{pmatrix},$$

де $W' \equiv \dfrac{d}{dt} W(t,\nu)$.

Обчислюємо цілу функцію – визначник

$$\det L_1(1,\nu) = e^{-2\nu}\operatorname{sh}^2(e^{\nu}).$$

Множина (2.10) має такий вигляд:

$$P = \big\{\nu \in \mathbb{C}\colon\ e^{-2\nu}\operatorname{sh}^2(e^{\nu}) \neq 0\big\} = \big\{\nu \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{sh}(e^{\nu}) \neq 0\big\}.$$

Ця множина не збігається з $\mathbb{C}$, оскільки існує зліченна множина комплексних чисел $\nu \in \big\{ \ln(\pi k) + \frac{1}{2} i\pi(4r \pm 1),\quad (k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\big\}$, для яких $\operatorname{sh}(e^{\nu}) = 0$.

Для $\nu \in P$ побудуємо тепер матрицю $M_1(t,\nu)$ за формулою (2.9):

$$M_1(t,\nu) = L_1(t,\nu)L_1^{-1}(1,\nu) = \begin{pmatrix} m_{11}^1(t,\nu) & m_{12}^1(t,\nu) \\ m_{21}^1(t,\nu) & m_{22}^1(t,\nu) \end{pmatrix},$$

$$m_{11}^1(t,\nu) = \frac{e^{\nu}}{2\operatorname{sh}^2(e^{\nu})}\Big\{t\operatorname{ch}(e^{\nu}t)\operatorname{sh}(e^{\nu}) - \operatorname{sh}(e^{\nu}t)\operatorname{ch}(e^{\nu})\Big\} + \frac{\operatorname{sh}(e^{\nu}t)}{\operatorname{sh}(e^{\nu})},$$

$$m_{12}^1(t,\nu) = \frac{e^{4\nu}}{2\operatorname{sh}^2(e^{\nu})}\Big\{\operatorname{sh}(e^{\nu}t)\operatorname{ch}(e^{\nu}) - t\operatorname{ch}(e^{\nu}t)\operatorname{sh}(e^{\nu})\Big\},$$

$$m_{21}^1(t,\nu)=\frac{1}{2\,e^{2\nu}\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{t\,\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)-\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)\Big\},$$
$$m_{22}^1(t,\nu)=\frac{e^\nu}{2\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)-t\,\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)\Big\}+\frac{\mathrm{sh}(e^\nu t)}{\mathrm{sh}(e^\nu)}.$$

Обчислюємо тепер $M_0(t,\nu)$ за формулою (2.8):

$$M_0(t,\nu)=L_0(t,\nu)-M_1(t,\nu)L_0(1,\nu)=\begin{pmatrix} m_{11}^0(t,\nu) & m_{12}^0(t,\nu)\\ m_{21}^0(t,\nu) & m_{22}^0(t,\nu)\end{pmatrix},$$

$$m_{11}^0(t,\nu)=\frac{t\,e^\nu}{2\,\mathrm{sh}(e^\nu)}\Big\{\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)-\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)\Big\}+\mathrm{ch}(e^\nu t)$$
$$+\frac{\mathrm{sh}(e^\nu t)}{2\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{e^\nu\,\mathrm{ch}^2(e^\nu)-e^\nu\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)-2\,\mathrm{ch}(e^\nu)\,\mathrm{sh}(e^\nu)\Big\},$$

$$m_{12}^0(t,\nu)=\frac{t\,e^{4\nu}}{2\,\mathrm{sh}(e^\nu)}\Big\{\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)-\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)\Big\}$$
$$+\frac{e^{4\nu}\,\mathrm{sh}(e^\nu t)}{2\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{\mathrm{sh}^2(e^\nu)-\mathrm{ch}^2(e^\nu)\Big\},$$

$$m_{21}^0(t,\nu)=\frac{t}{2e^{2\nu}\,\mathrm{sh}(e^\nu)}\Big\{\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)-\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)\Big\}$$
$$+\frac{\mathrm{sh}(e^\nu t)}{2e^{2\nu}\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{\mathrm{ch}^2(e^\nu)-\mathrm{sh}^2(e^\nu)\Big\},$$

$$m_{22}^0(t,\nu)=\frac{t\,e^\nu}{2\,\mathrm{sh}(e^\nu)}\Big\{\mathrm{ch}(e^\nu t)\,\mathrm{ch}(e^\nu)-\mathrm{sh}(e^\nu t)\,\mathrm{sh}(e^\nu)\Big\}+\mathrm{ch}(e^\nu t)$$
$$+\frac{\mathrm{sh}(e^\nu t)}{2\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)}\Big\{e^\nu\,\mathrm{sh}^2(e^\nu)-e^\nu\,\mathrm{ch}^2(e^\nu)-2\,\mathrm{ch}(e^\nu)\,\mathrm{sh}(e^\nu)\Big\}.$$

Випадок 2. Нехай $A(\nu)=\begin{pmatrix} -2e^\nu & -2e^{2\nu}\\ 2 & 2e^\nu\end{pmatrix}$, $B(\nu)=O_2$, τ – довільне додатне число. Тоді

$$D(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda e^\nu & -2\lambda e^{2\nu}\\ 2\lambda & \lambda^2+2\lambda e^\nu\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{D}(\lambda,\nu)=\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda e^\nu & 2\lambda e^{2\nu}\\ -2\lambda & \lambda^2-2\lambda e^\nu\end{pmatrix},$$

$$\det\widetilde{D}(\lambda,\nu)=\lambda^4,\ \ \det\widetilde{D}\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)=\frac{d^4}{dt^4}.$$

Розв'язком задачі (2.12), (2.13) є функція $W(t,\nu) = t^3/6$, яка не залежить від ν. За формулами (2.11) і (2.14) знаходимо:

$$\begin{aligned} L_1(t,\nu) &= \begin{pmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2} + 2e^{\nu}\dfrac{d}{dt} & 2e^{2\nu}\dfrac{d}{dt} \\ -2\dfrac{d}{dt} & \dfrac{d^2}{dt^2} - 2e^{\nu}\dfrac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{6} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^3}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t + e^{\nu}t^2 & e^{2\nu}t^2 \\ -t^2 & t - e^{\nu}t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$L_0(t,\nu) = \frac{dL_1(t,\nu)}{dt} + L_1(t,\nu)A(\nu) = E_2.$$

Тоді

$$\det L_1(\tau,\nu) = \begin{vmatrix} \tau + e^{\nu}\tau^2 & e^{2\nu}\tau^2 \\ -\tau^2 & \tau - e^{\nu}\tau^2 \end{vmatrix} = \tau^2 > 0.$$

Отже, множина (2.10), тобто

$$P = \{\nu \in \mathbb{C}\colon\ \det L_1(\tau,\nu) \neq 0\},$$

збігається з $\mathbb{C}$. Тому для довільного $\nu \in \mathbb{C}$ матриці $M_0(t,\nu)$ і $M_1(t,\nu)$ знаходимо однозначно за формулами (2.8) і (2.9):

$$M_1(t,\nu) = L_1(t,\nu)L_1^{-1}(\tau,\nu) = \frac{t}{\tau}\begin{pmatrix} 1 - (\tau - t)e^{\nu} & -(\tau - t)e^{2\nu} \\ \tau - t & 1 + (\tau - t)e^{\nu} \end{pmatrix},$$

$$M_0(t,\nu) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{t}{\tau} + \dfrac{t}{\tau}(\tau - t)e^{\nu} & \dfrac{t}{\tau}(\tau - t)e^{2\nu} \\ -\dfrac{t}{\tau}(\tau - t) & 1 - \dfrac{t}{\tau} - \dfrac{t}{\tau}(\tau - t)e^{\nu} \end{pmatrix}.$$

4. Клас існування та єдиності розв'язку задачі Діріхле

Розглянемо такі класи квазіполіномів: K_E – клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)e^{\alpha_j x}, \quad x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні комплексні числа з множини $E \subseteq \mathbb{C}$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами; $K_{\mathbb{C},E}$ – клас квазіполіномів вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} R_{ij}(t,x)e^{\beta_i t + \alpha_j x}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ m, N \in \mathbb{N},$$

де $(\beta_1, \alpha_1), \ldots, (\beta_N, \alpha_m)$ – довільні попарно різні вектори з $\mathbb{C} \times E$, $R_{11}(t,x), \ldots, R_{Nm}(t,x)$ – ненульові поліноми змінних t та x.

Вважаємо також, що функції $\varphi(x) \equiv 0$ і $f(t,x) \equiv 0$ належать до класів K_E та $K_{\mathbb{C},\,E}$ відповідно. Отже, ці класи є лінійними просторами для довільної множини E.

Кожному квазіполіному $\varphi(x)$ з K_E можна поставити у відповідність диференціальний вираз $\varphi\big(\frac{d}{d\nu}\big)$, дію якого на аналітичну в деякій області функцію $\chi(\nu)$ задає формула

$$\varphi\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\chi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} \Big[Q_j\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)e^{\alpha_j \frac{d}{d\nu}}\Big]\chi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\chi(\nu + \alpha_j).$$

Теорема 4.1. *Нехай для задачі* (2.1), (2.2) *множина* P *вигляду* (2.10) *є непорожньою. Якщо функції* $\Phi_{11}(x), \Phi_{12}(x), \Phi_{21}(x), \Phi_{22}(x)$ *в умовах* (2.2) *належать до* K_P, *то у класі вектор-функцій* $U(t,x)$, *компоненти яких належать до* $K_{\mathbb{C},\,P}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2), *який можна знайти за формулою*

$$\begin{aligned} U^T(t,x) = &\left\{\Big(\Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big) \quad \Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[M_0^T(t,\nu)e^{\nu x}\Big]\right\}\Big|_{\nu=0} \\ &+ \left\{\Big(\Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big) \quad \Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[M_1^T(t,\nu)e^{\nu x}\Big]\right\}\Big|_{\nu=0}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

де T *– символ транспонування.*

Доведення. Покажемо спочатку, що вектор-функція (4.1) задовольняє систему (2.1). Для цього у нижчеподаному ланцюжку рівностей використаємо: 1) комутування диференціальних виразів зі сталими коефіцієнтами, що містять символи $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial \nu}$ та $\dfrac{\partial}{\partial x}$;

2) матричну рівність

$$D\big[\Phi K^T\big]^T = \big[\Phi\big(DK\big)^T\big]^T,$$

в якій D, K – квадратні матриці, Φ – рядок;

3) неперервність відповідних функцій відносно ν в околі $\nu = 0$.

Маємо

$$\begin{aligned}
&D\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x)\\
&\quad=\bigg\{\Big(\Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[D\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)M_0(t,\nu)e^{\nu x}\Big]^T\bigg|_{\nu=0}\bigg\}^T\\
&\quad+\bigg\{\Big(\Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[D\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)M_1(t,\nu)e^{\nu x}\Big]^T\bigg|_{\nu=0}\bigg\}^T\\
&\quad=\bigg\{\Big(\Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[e^{\nu x}D\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)M_0(t,\nu)\Big]^T\bigg|_{\nu=0}\bigg\}^T\\
&\quad+\bigg\{\Big(\Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[e^{\nu x}D\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)M_1(t,\nu)\Big]^T\bigg|_{\nu=0}\bigg\}^T=\overline{O}.
\end{aligned}$$

Отже, вектор-функція (4.1) задовольняє систему рівнянь (2.1). Крім того, для (4.1) справджуються умови (2.2). Дійсно,

$$\begin{aligned}
U^T(0,x)&=\bigg\{\Big(\Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[M_0^T(0,\nu)e^{\nu x}\Big]\bigg\}\bigg|_{\nu=0}\\
&+\bigg\{\Big(\Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[M_1^T(0,\nu)e^{\nu x}\Big]\bigg\}\bigg|_{\nu=0}\\
&=\bigg\{\Big(\Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[e^{\nu x}E_2\Big]\bigg\}\bigg|_{\nu=0}\\
&+\bigg\{\Big(\Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\quad\Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big)\Big[e^{\nu x}O_2\Big]\bigg\}\bigg|_{\nu=0}=\Big(\Phi_{11}(x)\quad\Phi_{12}(x)\Big).
\end{aligned}$$

В останніх рівностях використано співвідношення

$$\varphi\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big\{e^{\nu x}\big\}\Big|_{\nu=0}=\varphi(x),$$

яке справджується для довільного квазіполінома $\varphi(x)$.

Аналогічно доводиться, що $U^T(\tau,x)=\Big(\Phi_{21}(x)\quad\Phi_{22}(x)\Big)$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (2.1), (2.2) у класі вектор-функцій $U(t,x)$, компоненти яких належать до $K_{\mathbb{C},P}$.

Припустимо, що існує два розв'язки $U^1(t,x)$, $U^2(t,x)$ задачі (2.1), (2.2). Тоді їх різниця $U(t,x)=U^1(t,x)-U^2(t,x)$ задовольняє систему (2.1) та однорідні умови Діріхле

$$U(0,x)=U(\tau,x)=\overline{O}.$$

Позначимо $\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\Phi(x)$. Тоді компоненти вектор-функції $\Phi(x)$ належать до K_P.

Вектор-функцію $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші для системи (2.1) з початковими умовами

$$U(0,x)=\overline{O},\quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\Phi(x)$$

запишемо за допомогою диференціально-символьного методу у вигляді

$$U(t,x)=\Big\{\Phi^T\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big[M_1^T(t,\nu)e^{\nu x}\big]\Big|_{\nu=0}\Big\}^T.$$

Оскільки $U(\tau,x)=\overline{O}$, то маємо таку тотожність:

$$\Big\{\Phi^T\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big[M_1^T(\tau,\nu)e^{\nu x}\big]\Big|_{\nu=0}\Big\}^T\equiv\overline{O}.$$

Для $\nu\in P$ існує матриця $M_1^{-1}(\tau,\nu)$. Подіємо на ліву та праву частини останньої тотожності матричним диференціальним виразом $M_1^{-1}\big(\tau,\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$. Маємо

$$\begin{aligned}\overline{O}&\equiv\Big\{\Phi^T\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big[M_1^{-1}(\tau,\nu)M_1(\tau,\nu)e^{\nu x}\big]^T\Big|_{\nu=0}\Big\}^T\\&\equiv\Big\{\Phi^T\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\big[e^{\nu x}E_2\big]\Big|_{\nu=0}\Big\}^T\equiv\Phi(x).\end{aligned}$$

Отже, $\Phi(x)=\overline{O}$, а тому $U(t,x)=\overline{O}$. Теорему доведено. □

5. Приклади розв'язування задач Діріхле

Вкажемо приклади дослідження задач Діріхле для конкретних систем диференціальних рівнянь зі зсувами за змінною x.

Приклад 5.1. Розв'язати задачу Діріхле

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2U_1(t,x)}{\partial t^2}-2U_1(t,x+1)+U_2(t,x+5)=0,\\&\frac{\partial^2U_2(t,x)}{\partial t^2}-U_1(t,x-1)=0,\qquad (t,x)\in S_1,\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$U_1(0,x)=U_2(0,x)=0,\quad U_1(1,x)=e^x,\ \ U_2(1,x)=x,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{5.2}$$

Систему (5.1) запишемо у вигляді (2.3), у якій

$$A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)=O_2,\quad B\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)=\begin{pmatrix}-2e^{\frac{\partial}{\partial x}} & e^{5\frac{\partial}{\partial x}}\\ -e^{-\frac{\partial}{\partial x}} & 0\end{pmatrix}.$$

Для дослідження задачі (5.1), (5.2) використаємо <u>*Випадок 1*</u>.

Оскільки множина P не є порожньою, то згідно з теоремою 4.1 існує єдиний розв'язок задачі (5.1), (5.2) у класі вектор-функцій, компоненти яких належать до $K_{\mathbb{C},\,P}$, якщо e^x та x належать до K_P. Остання умова справджується, бо для квазіполіномів $e^x = e^{1\cdot x}$ та $x = xe^{0\cdot x}$ не дорівнюють нулеві вирази $e^{-2}\mathrm{sh}^2(e)$, $e^0\mathrm{sh}^2(1)$.

Розв'язок задачі (5.1), (5.2) знаходимо за формулою (4.1):

$$U(t,x) = \left\{ \left(e^{\frac{\partial}{\partial\nu}} \quad \frac{\partial}{\partial\nu} \right) \Big[M_1^T(t,\nu) e^{\nu x} \Big] \Big|_{\nu=0} \right\}^T$$

$$= \left\{ \left(e^{\frac{\partial}{\partial\nu}} \quad \frac{\partial}{\partial\nu} \right) \left[e^{\nu x} \begin{pmatrix} m_{11}^1(t,\nu) & m_{21}^1(t,\nu) \\ m_{12}^1(t,\nu) & m_{22}^1(t,\nu) \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{\nu=0} \right\}^T$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{\partial}{\partial\nu}} \big[e^{\nu x} m_{11}^1(t,\nu) \big] \Big|_{\nu=0} + \dfrac{\partial}{\partial\nu} \big[e^{\nu x} m_{12}^1(t,\nu) \big] \Big|_{\nu=0} \\ e^{\frac{\partial}{\partial\nu}} \big[e^{\nu x} m_{21}^1(t,\nu) \big] \Big|_{\nu=0} + \dfrac{\partial}{\partial\nu} \big[e^{\nu x} m_{22}^1(t,\nu) \big] \Big|_{\nu=0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x m_{11}^1(t,1) + x\, m_{12}^1(t,0) + \dfrac{\partial m_{12}^1(t,\nu)}{\partial\nu} \Big|_{\nu=0} \\ e^x m_{21}^1(t,1) + x\, m_{22}^1(t,0) + \dfrac{\partial m_{22}^1(t,\nu)}{\partial\nu} \Big|_{\nu=0} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи вигляд функцій $m_{11}^1(t,\nu)$, $m_{12}^1(t,\nu)$, $m_{21}^1(t,\nu)$ і $m_{22}^1(t,\nu)$, які знайдено у *Випадку 1*, маємо:

$$m_{11}^1(t,1) = \frac{e}{2\,\mathrm{sh}^2(e)} \Big\{ t\,\mathrm{ch}(et)\,\mathrm{sh}(e) - \mathrm{sh}(et)\,\mathrm{ch}(e) \Big\} + \frac{\mathrm{sh}(et)}{\mathrm{sh}(e)},$$

$$m_{12}^1(t,0) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2(1)} \Big\{ \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(1) - t\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(1) \Big\},$$

$$\frac{\partial m_{12}^1(t,\nu)}{\partial\nu} \Big|_{\nu=0} = \frac{2\,\mathrm{sh}(1) - \mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}^3(1)} \Big\{ \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(1) - t\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(1) \Big\} + \frac{(1-t^2)\mathrm{sh}(t)}{2\,\mathrm{sh}(1)},$$

$$m_{21}^1(t,1) = \frac{1}{2e^2\,\mathrm{sh}^2(e)} \Big\{ t\,\mathrm{ch}(et)\,\mathrm{sh}(e) - \mathrm{sh}(et)\,\mathrm{ch}(e) \Big\},$$

$$m_{22}^1(t,0) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2(1)} \Big\{ \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(1) - t\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(1) \Big\} + \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)},$$

$$\frac{\partial m_{22}^1(t,\nu)}{\partial\nu} \Big|_{\nu=0} = \frac{-\mathrm{sh}(1) - 2\,\mathrm{ch}(1)}{2\,\mathrm{sh}^3(1)} \Big\{ \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(1) - t\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(1) \Big\} + \frac{(1-t^2)\mathrm{sh}(t)}{2\,\mathrm{sh}(1)}.$$

Приклад 5.2. Розв'язати задачу для системи рівнянь вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U_1(t,x)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial U_1}{\partial t}(t,x+1) - 2\frac{\partial U_2}{\partial t}(t,x+2) = 0,\\ \frac{\partial^2 U_2(t,x)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U_1}{\partial t}(t,x) + 2\frac{\partial U_2}{\partial t}(t,x+1) = 0, \qquad (t,x)\in S_\tau,\end{gathered} \tag{5.3}$$

з умовами Діріхле (2.2).

Згідно з *Випадком 2* множина P збігається з $\mathbb{C}$. Тому за теоремою 4.1 для довільних квазіполіномних правих частин умов (2.2) розв'язок задачі (5.3), (2.2) існує і є єдиним у класі вектор-функцій, компоненти яких є квазіполіномами. За формулою (4.1) маємо:

$$\begin{aligned} U_j(t,x) \;=&\; \Phi_{11}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big\{m^0_{j1}(t,\nu)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} + \Phi_{12}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big\{m^0_{j2}(t,\nu)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}\\ &+\; \Phi_{21}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big\{m^1_{j1}(t,\nu)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0}\\ &+\; \Phi_{22}\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)\Big\{m^1_{j2}(t,\nu)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0},\ j=1,2. \end{aligned}$$

Враховуючи вигляд функцій $m^0_{jk}(t,\nu)$ та $m^1_{jk}(t,\nu)$, де $j,k=1,2$, знаходимо:

$$\begin{aligned} U_1(t,x) \;=&\; \left(1-\frac{t}{\tau}\right)\Phi_{11}(x) + \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{11}(x+1) + \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{12}(x+2)\\ &+\; \frac{t}{\tau}\Phi_{21}(x) - \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{21}(x+1) - \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{22}(x+2),\\ U_2(t,x) \;=&\; -\frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{11}(x) + \left(1-\frac{t}{\tau}\right)\Phi_{12}(x) - \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{12}(x+1)\\ &+\; \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{21}(x) + \frac{t}{\tau}\Phi_{22}(x) + \frac{t}{\tau}(\tau-t)\Phi_{22}(x+1). \end{aligned}$$

Зауваження 5.1. *Знайдений розв'язок задачі* (5.3), (2.2) *існує не лише для довільних квазіполіномних функцій* $\Phi_{11}(x)$, $\Phi_{12}(x)$, $\Phi_{21}(x)$, $\Phi_{22}(x)$. *Розв'язок задачі існує також для довільних неперервних на* $\mathbb{R}$ *правих частин умов* (2.2).

Висновки

Досліджено розв'язність задачі Діріхле у нескінченній смузі для системи двох однорідних диференціальних рівнянь другого порядку за t зі зсувами за змінною x. Виділено клас вектор-функцій квазіполіномного вигляду, у якому розв'язок задачі існує і є єдиним. Вказано диференціально-символьний метод побудови розв'язку задачі. Подано приклади застосування методу для конкретних систем рівнянь. У прикладі 5.2 показано, що для існування розв'язку задачі досить вимагати лише неперервності від правих частин умов Діріхле.

Література

[1] Нахушев, А.М. (2006). *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М., Наука.

[2] Bers, L. (2016). *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics.* Dover Publications, Mineola, New York.

[3] Skubachevskii, A.L. (1997). *Elliptic functional-differential equations and applications.* Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser.

[4] Репин, О.А. (1992). *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.* Самара, Изд-во Самарского ун-та.

[5] Ільків, В.С. (2010). Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів, *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія мат. і інформ., 21*, 72–85.

[6] Ільків, В.С. (2011). Розв'язність нелокальної задачі для лінійних неоднорідних рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів. *Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки, 718,* 46–53.

[7] Кожанов, А.И., Пулькина, Л.С. (2009). О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений, *Мат журнал, 92*(32), 78–92.

[8] Медвідь, О., Симотюк, М. (2007). Задача з інтегральними умовами для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу, *Матем. вісник НТШ, 4,* 414–427.

[9] Бобик, І.О., Симотюк, М.М. (2017). Задача типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленим аргументом, *Наук. вісник Ужгород. ун-ту, 2(31),* 21–27.

[10] Nytrebych, Z.M. (2021). The differential-symbol method of solving the problem with local two-point in time conditions for a partial differential equation, *Journ. Math. Sciences, 254*(3), 406–415.

[11] Nytrebych, Z., Malanchuk, O. (2017). The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for nonhomogeneous partial differential equation, *Journ. Math. Sciences, 227*(1), 68–80.

[12] Nytrebych, Z.M., Malanchuk, O.M. (2019). The differential-symbol method of constructing the quasi-polynomial solutions of two-point problem, *Demonstratio Math., 52*(1), 88–96.

Відомості про авторів

Зіновій Миколайович Нитребич

Національний університет
"Львівська політехніка",
Львів, Україна
E-Mail: `znytrebych@gmail.com`