Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 4, 462 – 477
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2022-19-4-2

Умови розв'язості нелінійних матричних рівнянь

Сергій М. Чуйко, Катерина С. Шевцова

(Представлена О.В. Нєсмеловою)

Анотація. Знайдені умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійних матричних рівнянь. Як приклад застосування побудованих ітераційних схем знайдені наближення до розв'язку нелінійного матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті. Для перевірки ефективності побудованих ітераційних схем знайдені похибки отриманих наближень до розв'язку нелінійного матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті.

2010 MSC. 34B15.

Ключові слова та фрази. Нелінійні матричні рівняння, матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті, метод Ньютона–Канторовича, метод декомпозиції Адомяна.

Вивчення нелінійних матричних рівнянь [1], зокрема, матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті [2, 3], пов'язане з численними застосуваннями таких рівнянь при розв'язанні матричного диференціального рівняння Ріккаті [4, 5], теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування та стійкості руху [6, 7]. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої квадратної матриці застосовний метод Ньютона [8,9]. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої прямокутної матриці у статті використовуються методи Ньютона–Канторовича [10] та метод декомпозиції Адомяна [11]. Для порівняння ефективності методів Ньютона – Канторовича та методу декомпозиції Адомяна обчислені наближені розв'язки узагальненого матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті.

Стаття надійшла в редакцію 12.10.2022

1. Постановка задачі

Досліджуємо задачу про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad \alpha \neq \beta$$

нелінійного рівняння

$$F(Z) = 0. \tag{1.1}$$

Матричну функцію

$$F(Z): \ \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \to \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$$

припускаємо визначеною у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ і двічі неперервно диференційовною по Z на множині $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Визначимо оператор

$$\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

як такий, що ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор [12]

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{B}\right]: \ \mathbb{R}^{m \cdot n} \to \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

2. Побудова наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь методом Ньютона–Канторовича

Актуальність дослідження задачі про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad \alpha \neq \beta$$

нелінійного матричного рівняння (1.1) пов'язана з тим фактом, що переважна більшість досліджень умов розв'язності цього рівняння [2–7] передбачає рівність $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої квадратної матриці застосовний метод Ньютона [8, 10]. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої прямокутної матриці застосуємо метод Ньютона – Канторовича [12]. Позначимо вектор-функцію

$$f(z) := \mathcal{M}[F(Z)]: \ \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \to \mathbb{R}^{\gamma \cdot \delta}, \quad z := \mathcal{M}[Z].$$

Функція $f(z)$ двічі неперервно диференційовна по z у відкритій області $\check{D} \subset \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$. Задача про знаходження розв'язку $Z \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ нелінійного матричного рівняння (1.1) приводить до задачі про знаходження розв'язку $z \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$ рівняння

$$f(z) = 0. \tag{2.2}$$

Припустимо, що рівняння (2.2) в околі точки z_0 має корінь $z^* \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$ і в околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності

$$\left|\left|J_k^+\right|\right| \le \sigma_1(k), \quad \left|\left|d^2 f(\xi_k\,; z^* - z_k)\right|\right| \le \sigma_2(k) \cdot ||z^* - z_k||. \tag{2.3}$$

Тут ξ_k – точка, розташована на відрізку, який сполучає точки z^* та z_k. Крім того, припустимо, що в околі точки z_0 існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{\gamma \cdot \delta \times \alpha \cdot \beta}, \quad \theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \tag{2.4}$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (2.2) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ f(z_k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots , \tag{2.5}$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (2.2) квадратична. Тут

$$P_{J_k^*} : \ \mathbb{R}^{\gamma \cdot \delta} \to \mathbb{N}(J_k^*)$$

– ортопроектор матриці J_k^*, крім того, J_k^+ – псевдообернена матриця за Муром–Пенроузом [13]. Таким чином, за умови (2.4) для знаходження розв'язку Z^* рівняння (1.1) отримуємо збіжну послідовність

$$Z_k := \mathcal{M}^{-1}\Big[z_k\Big], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Зауважимо, що умова (2.4) рівнозначна до вимоги повноти рангу матриці J_k і можлива лише у випадку $\gamma\delta \le \alpha\beta$. Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. *Припустимо, що для рівняння* (2.2) *виконані наступні умови*

1. *Рівняння* (2.2) *в околі точки* z_0 *має корінь* $z^* \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$

2. *В околі нульового наближення* z_0 *мають місце нерівності* (2.3).

3. Існує константа θ.

Тоді за умови (2.4) для знаходження розв'язку Z^* рівняння (1.1) може бути використана ітераційна схема

$$Z_{k+1} = Z_k - \mathcal{M}^{-1}\left[J_k^+ f(z_k)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ , \tag{2.6}$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{Z_k\}$ до розв'язку Z^* рівняння (1.1) квадратична.

Для оцінки ефективності ітераційної схеми, побудованої на основі методу Ньютона–Канторовича, побудуємо аналогічну ітераційну схему на основі методу декомпозиції Адомяна.

3. Побудова наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь методом декомпозиції Адомяна

Припустимо далі матричну функцію

$$F(Z):\ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

аналітичною у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Для знаходження розв'язку

$$Z = Z_0 + U_1 + U_2 +\ ..\ , \quad \mathcal{M}[Z_0] := z_0 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$$

нелінійного матричного рівняння (1.1) застосовний метод Адомяна [11]. Розв'язок

$$z = z_0 + u_1 + u_2 +\ ..\ , \quad u_k := \mathcal{M}[U_k] \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

нелінійного матричного рівняння (2.2) шукаємо в околі розв'язку $z_0 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ лінеаризації

$$\mathcal{F}(z_0) := R\,z_0 + q_0 = 0, \quad q_0 \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \tag{3.7}$$

рівняння (2.2). Рівняння (3.7) розв'язне тоді і тільки тоді, коли [13]

$$P_{R^*}\,q_0 = 0, \tag{3.8}$$

зокрема, за умови повноти рангу матриці $R \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}$. У випадку повноти рангу матриці R принаймні один розв'язок системи (3.7) має вигляд

$$z_0 = R^+\,q_0.$$

Матриця $P_{R_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{R^*}:\ \mathbb{R}^{\gamma\delta} \to \mathbb{N}(R^*),$$

а матриця P_{R_r} – з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора [13]

$$P_R: \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{N}(R).$$

За умови $P_{R^*} \neq 0$ будемо казати, що для алгебраїчної системи (3.7) має місце критичний випадок, і навпаки за умови $P_{R^*} = 0$ будемо говорити, що для алгебраїчної системи (3.7) має місце некритичний випадок. У некритичному випадку алгебраїчна система (3.7) розв'язна для будь яких векторів $q_0 \in \mathbb{R}^{\gamma\delta}$.

Вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7) має місце розклад [11, с. 502]

$$f(z_0 + u_1 + u_2 + \ \dots\ ) = f(z_0) + f_1(z_0, u_1) + f_2(z_0, u_1, u_2) + \ \dots\ .$$

Розклади багатьох нелінійних функцій та формули для їх обчислення наведені у статтях [11, 14, 15]. Нелінійна вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7) має місце рівність [11, с. 502]

$$f(z_0 + u_1 + u_2 + \ \dots\ )\Bigg|_{\substack{u_1 \ = \ 0, \\ u_2 \ = \ 0, \ \dots}} = f(z_0).$$

Взагалі кажучи,

$$f(z_0) \neq 0.$$

Перше наближення $z_1 := z_0 + u_1$ до розв'язку рівняння (2.2) визначає перший диференціал невідомої $dz := u_1$. Вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7) існує перший диференціал

$$df(z_0, u_1) := A_1(z_0)u_1: \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\delta}.$$

Друге наближення

$$z_2 := z_0 + u_1 + u_2$$

до розв'язку рівняння (2.2) визначає другий диференціал невідомої

$$d^2z := u_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}.$$

Вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7) існує другий диференціал

$$d^2f(z_0, u_2) := d\Big[f'(z_0)u_1, u_2\Big] := A_2(z_0, u_1)u_2: \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\delta}.$$

Продовжуючи, отримуємо

$$d^{k+1}f(z_0, u_{k+1}) := d\left[f^{(n)}(z_0)u_k, u_{k+1}\right] := A_{k+1}(z_0, u_1, \ \dots \ , \ u_k)\, u_{k+1}$$

– диференціал векторної функції $f(z) : \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\delta}$ у точці z_0 порядку $k+1$. Вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7) вона зображується рівномірно і абсолютно збіжним рядом Тейлора [17, с. 386]

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, d^k f(z_0, h).$$

Перше наближення $z_1 := z_0 + u_1$ до розв'язку рівняння (2.2) визначає розв'язок системи першого наближення

$$f(z_0) + f_1(z_0, u_1) = 0.$$

Останнє рівняння, як і рівняння (3.7), лінійне. Дійсно, позначимо вектор

$$\xi(\varepsilon) := z_0 + \varepsilon\, u_1 + \ \dots \ + \varepsilon^k\, u_k + \ \dots \ ,$$

при цьому [16]

$$f_1(z_0, u_1) := f'_\varepsilon(\xi(\varepsilon))\Big|_{\ \varepsilon \ = 0} = Q\, u_1,$$

отже, система першого наближення набуває вигляду

$$f(z_0) + Q\, u_1 = 0.$$

Останнє рівняння розв'язне тоді і тільки тоді, коли [13]

$$P_{Q^*}\, f(z_0) = 0,$$

зокрема, за умови повноти рангу матриці $Q := f'(z_0)$. За умови повноти рангу матриці

$$Q := A_1(z_0)$$

принаймні один розв'язок системи першого наближення має вигляд

$$u_1 = -Q^+\, f(z_0).$$

Друге наближення

$$z_2 := z_0 + u_1 + u_2$$

до розв'язку рівняння (2.2) визначає розв'язок системи другого наближення

$$f_2(z_0, u_1, u_2) = 0.$$

Останнє рівняння, як і рівняння (3.7), лінійне. Дійсно [16], систему другого наближення визначає функція

$$f_2(z_0, u_1, u_2) := \frac{1}{2!}\, f''_{\varepsilon^2}(\xi(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon\ =0} = Q\, u_2 + q_1(z_0, u_1).$$

За умови повноти рангу матриці Q принаймні один розв'язок системи другого наближення має вигляд

$$u_2 = -Q^+ q_1(z_0, u_1), \quad q_1(z_0, u_1) := \frac{1}{2!}\, A_2(z_0, u_1) u_1.$$

Третє наближення

$$z_3 := z_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

до розв'язку рівняння (2.2) визначає розв'язок системи третього наближення

$$f_3(z_0, u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Останнє рівняння, як і рівняння (3.7), лінійне. Дійсно [16], систему третього наближення визначає функція

$$f_3(z_0, u_1, u_2, u_3) := \frac{1}{3!}\, f'''_{\varepsilon^3}(\xi(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon\ =0} = Q\, u_3 + q_2(z_0, u_1, u_2);$$

тут

$$q_2(z_0, u_1, u_2) := \frac{1}{3!} A_3(z_0, u_1, u_2) u_1 + A_2(z_0, u_1) u_2.$$

За умови повноти рангу матриці Q принаймні один розв'язок системи третього наближення набуває вигляду

$$u_3 = -Q^+\, q_2(z_0, u_1, u_2) = -Q^+ \left\{ \frac{1}{3!} A_3(z_0, u_1, u_2) u_1 + A_2(z_0, u_1) u_2 \right\}.$$

Припустимо, що умова (3.8) виконується, а вектор-функція $f(z)$ аналітична по z в околі розв'язку z_0 рівняння (3.7). За умови повноти рангу матриці Q послідовність наближень до розв'язку рівняння (2.2) визначає ітераційна схема

$$z_1 = z_0 + u_1, \quad u_1 = -Q^+\, f(z_0),$$

$$z_2 = z_0 + u_1 + u_2, \quad u_2 = -Q^+ q_1(z_0, u_1),$$

$$z_3 = z_0 + u_1 + u_2 + u_3, \quad u_3 = -Q^+ \, q_2(z_0, u_1, u_2),$$
$$z_{k+1} = z_0 + u_1 + \ \dots \ + u_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ \dots \ . \tag{3.9}$$
$$u_{k+1} = -Q^+ \, q_k(z_0, u_1, \ \dots \ , u_k).$$

Умова збіжності ітераційної схеми (3.9) до розв'язку рівняння (2.2) аналогічна [15, 16]. Таким чином, доведено наступне твердження.

Лема. *Припустимо, що умова* (3.8) *виконується, а вектор-функція* $f(z)$ *аналітична по* z *в околі розв'язку* z_0 *рівняння* (3.7). *За умови повноти рангу матриці* Q *послідовність наближень*

$$Z_k := \mathcal{M}^{-1}\Big[z_k\Big], \quad k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots$$

до розв'язку рівняння (1.1) *визначає ітераційна схема* (3.9). *Якщо для кожного фіксованого значення* k *має місце нерівність*

$$||u_{k+1}|| \leq \gamma ||u_k||, \quad 0 < \gamma < 1, \quad k = 1, 2, \ \dots \ , \tag{3.10}$$

то ітераційна схема (3.9) *збігається до розв'язку рівняння* (1.1).

Приклад. *Продемонструємо ефективність доведеної теореми, а також леми на прикладі задачі про знаходження розв'язку*

$$Z \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

узагальненого матричного рівняння Ріккаті

$$F(Z) := A\,Z\,B\,Z^*\,C + D\,Z\,E + G = 0. \tag{3.11}$$

Тут

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := D := \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G := -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язку нелінійного матричного рівняння (3.11) приводить до задачі про знаходження розв'язку $z \in \mathbb{R}^6$ рівняння (2.2). Для знаходження розв'язку рівняння (2.2) може бути використана ітераційна схема (2.6). Дійсно, покладемо

$$z_0 := \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 23 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^*,$$

при цьому виконується вимога повноти рангу матриці

$$J_0 = \frac{1}{288}\begin{pmatrix} -1 & 23 & 0 & 47 & -1 & 23 \\ 0 & -1 & 24 & 24 & 0 & -1 \\ 22 & 47 & 46 & 47 & 22 & 47 \\ 24 & 23 & 24 & 47 & 24 & 23 \end{pmatrix}.$$

У просторі $\mathbb{R}^n$ використовуватимемо "кубічну" норму [8, 13, 18]

$$||z||_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\le i\le n} |z_i|, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

У просторі $\mathbb{R}^{m\times n}$ дійсних $(m \times n)$ – матриць використовуватимемо норму [8, 13, 18]

$$||Z||_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |z_{ik}|, \quad Z := \{z_{ik}\} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

як відомо, підпорядковану "кубічній" нормі у просторі $\mathbb{R}^n$. Таким чином, отримуємо

$$z_1 = \begin{pmatrix} -\frac{599}{2\ 042\ 356} \\ \frac{517495}{12\ 254\ 136} \\ \frac{24\ 523\ 247}{24\ 508\ 272} \\ -\frac{288}{510\ 589} \\ -\frac{599}{2\ 042\ 356} \\ -\frac{503\ 683}{12\ 254\ 136} \end{pmatrix},$$

$$F(Z_1) = \begin{pmatrix} \frac{587\ 514\ 587}{300\ 327\ 698\ 212\ 992} & \frac{1\ 072\ 920\ 988\ 657}{7\ 207\ 864\ 757\ 111\ 808} \\ \frac{662\ 401}{25\ 027\ 308\ 184\ 416} & -\frac{2\ 044\ 681}{1\ 042\ 804\ 507\ 684} \end{pmatrix},$$

при цьому

$$||F(Z_1)||_\infty = \frac{1\ 087\ 021\ 338\ 745}{7\ 207\ 864\ 757\ 111\ 808} \approx 0,00\ 015\ 081,$$

причому виконується вимога повноти рангу матриці J_1. Для перевірки виконання умови збіжності (2.4) ітераційної схеми (2.6) до розв'язку нелінійного матричного рівняння (3.11) знаходимо

$$\left|\left|J_1^+\right|\right|_\infty := \sigma_1(1) \approx 20,0332.$$

Задля оцінки величини $\sigma_2(1)$ обчислюємо матриці Гессе [19, 20] для функції $f(z_k)$:

$$H_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&2 \end{pmatrix},$$

а також

$$H_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи підпорядкованість [8, 13, 18] норми у просторі $\mathbb{R}^{m\times n}$ "кубічній" нормі у просторі $\mathbb{R}^n$, отримуємо

$$\sigma_2(k) := \left|\left| d^2 f(z_k\,; h)\right|\right|_\infty := \left|\left|\begin{pmatrix} h^* H_1(z_k) h \\ ..... \\ h^* H_4(z_k) h \end{pmatrix}\right|\right|_\infty \equiv \left|\left|\begin{pmatrix} h^* H_1 h \\ ..... \\ h^* H_4 h \end{pmatrix}\right|\right|_\infty =$$

$$= \left|\left|\begin{pmatrix} h^* H_1 \\ ..... \\ h^* H_4 \end{pmatrix} h\right|\right|_\infty = \left|\left|\begin{pmatrix} h^* H_1 \\ ..... \\ h^* H_4 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty = \left|\left| h^* \begin{pmatrix} H_1 \\ ..... \\ H_4 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty =$$

$$= \left|\left|\begin{pmatrix} H_1 \\ ..... \\ H_4 \end{pmatrix}\right|\right|_\infty = \max_{1\le k\le 4} ||H_k||_\infty = \frac{7}{12},$$

отже, умова збіжності (2.4) ітераційної схеми (2.6) на першому кроці виконується:

$$\theta_1 \cdot |z_1 - z_0| \approx 0,247\ 030 < 1;$$

тут

$$\theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 5,84\ 302,$$

Таким чином, знаходимо

$$z_2 \approx \begin{pmatrix} -1,01\ 116 \times 10^{-6} \\ 0,0416\ 658 \\ 1,00\ 000 \\ 3,19\ 054 \times 10^{-8} \\ 6,96\ 999 \times 10^{-7} \\ -0,0416\ 659 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$||F(Z_2)||_\infty \approx 2,87\ 653 \times 10^{-8},$$

причому виконується вимога повноти рангу матриці J_2. Умова збіжності (2.4) ітераційної схеми (2.6) на другому кроці також виконується:

$$\theta_2 \cdot |z_2 - z_0| \approx 0,243\ 569 < 1;$$

тут
$$\theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 5,84\ 563.$$
Таким чином, отримуємо
$$z_3 \approx \begin{pmatrix} -8,54\ 079 \times 10^{-7} \\ 0,0416\ 659 \\ 1,00\ 000 \\ -9,18\ 072 \times 10^{-15} \\ 8,54\ 079 \times 10^{-7} \\ -0,0416\ 659 \end{pmatrix},$$
при цьому
$$||F(Z_3)||_\infty \approx 3,54\ 978 \times 10^{-15}.$$
Умова збіжності (2.4) ітераційної схеми (2.6) на третьому кроці також виконується:
$$\theta_3 \cdot |z_3 - z_0| \approx 0,243\ 568 < 1;$$
тут
$$\theta_3 := \frac{\sigma_1(3)\sigma_2(3)}{2} \approx 5,84\ 563.$$
Для знаходження розв'язку узагальненого матричного рівняння Ріккаті (3.11) також може бути використана ітераційна схема (3.9), побудована з використанням методу декомпозиції Адомяна [11]. Розв'язок нелінійного матричного рівняння (3.11) шукаємо в околі розв'язку рівняння – лінеаризації
$$\mathcal{F}(z_0) := \mathcal{M}(D\, Z_0\, E + G) := R\, z_0 + q_0 = 0$$
рівняння (3.11). Тут
$$R = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_0 := -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
У наслідок повноти рангу матриці R принаймні один розв'язок системи (3.7) має вигляд
$$z_0 = R^+ q_0 = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$F(Z_0) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$||F(Z_0)||_\infty = \frac{1}{8}.$$

Позначимо вектори

$$u_1 := \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ u_{25} \\ u_{26} \end{pmatrix}.$$

Вектор-функція $f(z)$ аналітична по z, тому в околі породжуючого розв'язку z_0 має місце розклад [11, с. 502]

$$f(z_0 + u_1 + u_2 + \ \ldots\ ) = f(z_0) + f_1(z_0, u_1) + f_2(z_0, u_1, u_2) + \ \ldots\ .$$

Тут

$$f(z_0) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(z_0, u_1) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4u_{14} + u_{15} + u_{11} + 2u_{12} + 2u_{13} \\ 4u_{14} + 3u_{16} + u_{12} + 2u_{13} \\ 2(2u_{14} + u_{16} + u_{11} + 2u_{12} + 2u_{13}) \\ 2(2u_{14} + 2u_{15} + 2u_{16} + u_{11} + u_{12} + u_{13}) \end{pmatrix},$$

$$f_2(z_0, u_1, u_2) := \frac{1}{3\ 782\ 616} \begin{pmatrix} f_2^{(1)}(z_0, u_1, u_2) \\ f_2^{(2)}(z_0, u_1, u_2) \\ f_2^{(3)}(z_0, u_1, u_2) \\ f_2^{(4)}(z_0, u_1, u_2) \end{pmatrix},$$

крім того

$$f_2^{(1)}(z_0, u_1, u_2) = 21\ 140 + 630\ 436\, u_{24} + 157\ 609\, u_{25} + 157\ 609\, u_{21} +$$

$$+ 315\ 218\, u_{22} + 315\ 218\, u_{23},$$

$$f_2^{(2)}(z_0, u_1, u_2) = 9104 + 630\ 436\, u_{24} + 472\ 827\, u_{26} + 157\ 609\, u_{22} + 315\ 218\, u_{23},$$

$$f_2^{(3)}(z_0, u_1, u_2) = 42\ 032 + 630\ 436\, u_{24} + 315\ 218\, u_{25} + 315\ 218\, u_{21} + \\ + 630\ 436\, u_{22} + 630\ 436\, u_{23},$$

$$f_2^{(4)}(z_0, u_1, u_2) = -6792 + 630\ 436\, u_{24} + 630\ 436\, u_{25} + 630\ 436\, u_{26} + \\ + 315\ 218\, u_{21} + 315\ 218\, u_{22} + 315\ 218\, u_{23}.$$

Перше наближення $z_1 := z_0 + u_1$ до розв'язку узагальненого матричного рівняння Ріккаті (3.11) визначає розв'язок системи першого наближення. У наслідок повноти рангу матриці

$$Q = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

принаймні один розв'язок системи першого наближення має вигляд

$$u_1 = -\frac{1}{397}\begin{pmatrix} -1 \\ -71 \\ -84 \\ -50 \\ 114 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$Z_1 = \frac{1}{794}\begin{pmatrix} -399 & 626 & -169 \\ 255 & -100 & 425 \end{pmatrix}, \quad F(Z_1) = \begin{pmatrix} \frac{5285}{945654} & \frac{5254}{472827} \\ \frac{1138}{472827} & -\frac{283}{157609} \end{pmatrix},$$

при цьому

$$||F(Z_1)||_\infty = \frac{15\ 793}{945\ 654} \approx 0{,}0167\ 006.$$

У наслідок повноти рангу матриці Q принаймні один розв'язок системи другого наближення має вигляд

$$u_2 = -\frac{1}{125\ 141\ 546}\begin{pmatrix} -1\ 357\ 433 \\ -4\ 369\ 817 \\ -3\ 813\ 202 \\ -828\ 672 \\ 4\ 252\ 999 \\ 2\ 694\ 111 \end{pmatrix}.$$

Для знайдених за допомогою ітераційної схеми (3.9) наближень до розв'язку узагальненого матричного рівняння Ріккаті (3.11) має місце нерівність

$$|u_1| \le \gamma |z_0|, \quad |u_2| \le \gamma |u_1|, \quad \gamma \approx 0{,}287\ 154 < 1,$$

отже, можна казати про практичну збіжність ітераційної схеми (3.9) до розв'язку рівняння (3.11). Таким чином, отримуємо

$$Z_2 = \frac{1}{62\ 570\ 773}\begin{pmatrix} -32\ 121\ 712 & 47\ 425\ 016 & -11\ 191\ 461 \\ 17\ 910\ 239 & -8\ 294\ 786 & 34\ 838\ 968 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$||F(Z_2)||_\infty = \frac{225\ 707\ 344\ 151\ 111}{46\ 981\ 219\ 605\ 810\ 348}.$$

Точність знайденого за допомогою ітераційної схеми (3.9) другого наближення до розв'язку узагальненого матричного рівняння Ріккаті (3.11)

$$||F(Z_2)||_\infty \approx 0,0048\ 042$$

набагато менша за точність

$$||F(Z_2)||_\infty \approx 2,87\ 653 \times 10^{-8}$$

другого наближення до розв'язку рівняння (3.11), знайденого за допомогою ітераційної схеми (2.6).

Тим не менш, побудова наближень до розв'язків нелінійних рівнянь з використанням методу декомпозиції Адомяна має свої переваги, зокрема, простотою перевірки на практичну збіжність відповідних ітераційних схем. Крім того, у деяких випадках використання методу декомпозиції Адомяна дозволяє знаходження розв'язків, наприклад нелінійних крайових задач в елементарних функціях. В той час як, використання традиційного методу простих ітерацій [13] не дозволяє знаходження наближень в елементарних функціях, що, у свою чергу, приводить до великих похибок наближень до розв'язків нелінійних крайових задач. Прикладом такої ситуації є періодична задача для рівняння, яке моделює неізотермічну химічну реакцію [21, 22]. За допомогою ітераційної схеми, побудованої з використання методу декомпозиції Адомяна [23], вдається отримати наближення до періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну химічну реакцію [21], в елементарних функціях. У разі нерозв'язності рівняння (3.7), а отже, і вихідного рівняння (1.1), рівняння (3.7) може бути регуляризоване аналогічно [24].

Запропонована у статті схема розв'язання нелінійних рівнянь з використанням методу Ньютона–Канторовича та методу декомпозиції Адомяна може бути використана до розв'язання нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних [25, 26], а також нелінійних крайових задач для диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь [13, 27, 28].

Література

[1] Boichuk, A.A. (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Math. Journal, 50*(8), 1162–1169.

[2] Кувшинов, В.М. (1979). Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления. *Ученые записки ЦАГИ, X*(1), 69–87.

[3] Palin, V.V. (2008). Solvability of Quadratic Matrix Equations. *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika, 63*(6), 36–41.

[4] Зеликин, М.И. (1998). *Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении*, М, Факториал.

[5] Boichuk, A.A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. *Differential Equations, 37*(4), 464–471.

[6] Годунов, С.К. (1992). Нормы решений матричных уравнений Лурье–Риккати как критерий качества стабилизируемости и детектируемости. In: *Вычислительные проблемы в задачах математической физики*, Труды Института математики СО РАН, т. 22. Новосибирск, Наука, 3–21.

[7] Красовский, А.А. (ред). (1987). *Справочник по теории автоматического управления.* М., Наука.

[8] Канторович, Л.В., Акилов, Г.П. (1977). *Функциональный анализ*, М., Наука.

[9] Дэннис, Дж., Шнабель, Р. (1988). *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*, М., Мир.

[10] Chuiko, S.M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics, 85*(1), 62–68.

[11] Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl., 135*, 501–544.

[12] Чуйко, С.М. (2014). О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вестник Харьковского национального университета ім. В.Н. Каразіна. Серия: Математика, прикладная математика и механика, 1120*, 85–94.

[13] Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter.

[14] Adomian, G. (1985). Polynomial nonlinearities in differential equations. *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl., 109*, 90–95.

[15] Adomian, G. (1984). Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 11*, 225–230.

[16] Mac, M., Leung, C.S., Harko, T. (2019). A brief introducion to the Adomian decomposition method. *Romanian Astron. Journ., 1*(1), 1–41.

[17] Треногин, В.А. (1980). *Функциональный анализ*, М., Наука.

[18] Азбелев, Н.В., Максимов, В.П., Рахматуллина, Л.Ф. (1991). *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, М., Наука.

[19] Neudecker, H., Magnus, J.R. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, New York, John Wiley & Sons.

[20] Постников, М.М. (1971). *Введение в теорию Морса*, М., Наука.

[21] Benner, P., Seidel-Morgenstern, A., Zuyev, A. (2019). Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions. *Applied Mathematical Modelling, 69*, 287–300.

[22] Benner, P., Chuiko, S., Zuyev, A. *A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations*, preprint: https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2239596/v1.

[23] Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Попов, М.В. (2022). Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач. *Нелінійні коливання, 25*(4), 413–425.

[24] Chuiko, S.M. (2017). On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences, 220*(5), 591–602.

[25] Gutlyanskii, V., Nesmelova, O., Ryazanov, V. (2020). On a quasilinear Poisson equation in the plane. *Analysis and Mathematical Physics, 10*(1), article no. 6.

[26] Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163–179.

[27] Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program.

[28] Chuiko, S.M. (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem, *Lobachevskii Journal of Mathematics, 38*(2), 236–244.

Відомості про авторів

Сергій Михайлович Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна,
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany
E-Mail: chujko-slav@ukr.net, chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de

Катерина Сергіївна Шевцова

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна
E-Mail: shevtsova19931993@gmail.com