Український математичний вісник
Том 19 **(2022)**, № 4, 584 – 591
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2022-19-4-7

Аналітичні функції векторного аргументу та частково-конформні відображення в континуальних комплексних просторах

Андрій Л. Таргонський, Світлана В. Чугаєвська

(Представлена В.І. Рязановим)

Анотація. У роботі пропонується векторне узагальнення основних понять теорії функцій комплексної змінної: поняття модуля й аргументу комплексного числа. Автори вводять певне узагальнення поняття голоморфних функцій і відображень на випадок континуальних комплексних просторів.

2010 MSC. 30C70, 30C75.

Ключові слова та фрази. Лінійний векторний простір, базис простору, континуальний комплексний простір, векторний добуток елементів, теорема Рімана.

1. Вступ

У роботах [1–3] розглянуто лінійний векторний простір $\mathbb{C}^\infty$, тобто простір впорядкованих зчислених послідовностей комплексних чисел. Таким чином $\mathbb{C}^\infty$ є декартовий добуток зчисленого числа екземплярів комплексної площини $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} \times \ldots$.

У представленій роботі результати, опубліковані у першоджерелах [1–3] переносяться на лінійний векторний простір $\mathbb{C}_{cont}$, базис якого має потужність континууму.

Нехай $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – відповідно множини натуральних, дійсних комплексних чисел. $R_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{C}}$ – розширена комплексна площина.

2. Теорія у просторі $\mathbb{C}_{cont}$

Нехай $\mathbb{C}_{cont}$ є декартовим добутком континуального числа екземплярів $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}_{cont} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} \times \ldots$. Аналогічно, $\mathbb{R}_{cont} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots$, $\mathbb{R}_{cont} \subset \mathbb{C}_{cont}$.

Стаття надійшла в редакцію 12.07.2022

Базисом простору $\mathbb{C}_{cont}$ буде континуальний набір векторів

$$(1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, ...), ...$$

із континуальною кількістю координат.

Нехай $F(\alpha)$ – відображення сегменту $[0; 1]$ на базис простору $\mathbb{C}_{cont}$, Тобто кожній координатній площині простору $\mathbb{C}_{cont}$ ставимо у відповідність число α, $\alpha \in [0; 1]$.

Елементами простору $\mathbb{C}_{cont}$ будуть вектори із континуальною кількістю комплексних координат $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, $\alpha \in [0; 1]$.

По аналогії зі скінченовимірним та зчисленим випадками, можно представити $\mathbb{C}_{cont}$ як пряму суму континуального числа екземплярів алгебри комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Перенесемо на випадок простору $\mathbb{C}_{cont}$ деякі поняття робіт [1–3].

1. Алгебра $\mathbb{C}_{cont}$.

Визначення Бінарную операцію, яка діє з $\mathbb{C}_{cont} \times \mathbb{C}_{cont}$ в $\mathbb{C}_{cont}$ по правилу

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W} = \{z_\alpha \cdot w_\alpha\}, \alpha \in [0; 1] \,, \tag{2.1}$$

де $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, $\mathbb{W} = \{w_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, будемо називати *векторним добутком елементів* $\mathbb{C}_{cont}$. Зауважимо, що ця операція перетворює $\mathbb{C}_{cont}$ в комутативну, асоціативну алгебру з одиницей $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1, \ldots) \in \mathbb{C}_{cont}$.

Оборотними, відносно введеної таким чином операції добутку є такі та тільки такі елементи $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$ у яких $z_\alpha \neq 0$, для довільного $\alpha \in [0; 1]$.

Оберненими для таких елементів $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}_{cont}$ є елементи $\mathbb{Z}^{-1} = \{z_\alpha^{-1}\} \in \mathbb{C}_{cont}$, тому що $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathbb{Z} = 1$.

Тому, множина Θ всіх елементів $A = \{a_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, у яких хоча б одна координата $a_k = 0$, буде множиною елементів, для яких не існує оборотних елементів.

2. Спряження.

Визначення. Кожному елементу $\mathbb{W} = \{w_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, $\alpha \in [0; 1]$, поставимо у відповідність векторно – спряжений елемент $\overline{\mathbb{W}} = \{\overline{w}_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, де $\overline{w}_\alpha$ число, яке є комплексно спряженим w_α у звичайному розумінні. Визначена таким чином відповідність задає автоморфизм $\mathbb{C}_{cont}$, із нерухомим підпростором $\mathbb{R}_{cont}$.

3. Модуль (векторний).

У роботах [1–3] запропоновано векторне узагальнення поняття модуля числа, перенесемо його на простір $\mathbb{C}_{cont}$. Нехай $\mathbb{R}_{+,cont} = R_+ \times R_+ \times \ldots \times R_+ \ldots$, де кількість R_+ континуальна.

Визначення. Векторним модулем довільного елемента $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$ будем називати вектор $|\mathbb{Z}| := \{|z_\alpha|\} \in \mathbb{R}_{+,cont}$, $\alpha \in [0;1]$.

Зауважимо, що для довільного $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$, справедлива рівність

$$\mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{Z}} = |\overline{\mathbb{Z}}|^2 = |\mathbb{Z}|^2. \tag{2.2}$$

4. Векторна норма.

Визначення Вектор $\mathbb{X} = \{x_\alpha\} \in \mathbb{R}_{cont}$ будемо називати невід'ємним (строго додатним) та писати $\mathbb{X} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} > \mathbb{O}$), якщо $x_\alpha \geq 0$ для всіх $\alpha \in [0;1]$ ($x_\alpha > 0$ хоча б для одного $\alpha \in [0;1]$), $\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Визначення. Будемо казати, що вектор $\mathbb{X} = \{x_\alpha\} \in \mathbb{R}_{cont}$, $\alpha \in [0;1]$, більше або дорівнює (строго більше) вектора $\mathbb{Y} = \{y_\alpha\} \in \mathbb{R}_{cont}$, $\alpha \in [0;1]$, якщо $\mathbb{X} - \mathbb{Y} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} - \mathbb{Y} > \mathbb{O}$).

Визначення. Векторний простір $\mathbb{Y}$ будемо називати векторно нормованим, якщо кожному $y \in \mathbb{Y}$ співставимо невід'ємний вектор $\|y\| \in \mathbb{R}_{+,cont}$, який задовольняє умовам:

1) $\|y\| \geq \mathbb{O}$, причому $\|y\| = \mathbb{O} \Longleftrightarrow y = 0_\mathbb{Y}$, ($0_\mathbb{Y}$ – нуль простору $\mathbb{Y}$);
2) $\|\gamma y\| = |\gamma|\|y\|$, $\forall y \in \mathbb{Y}$, $\forall \gamma \in \mathbb{C}$;
3) $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$.

Введене вище визначення модуля задовольняє визначенню норми. Таким чином векторний модуль є векторною нормою в алгебрі $\mathbb{C}_{cont}$: $\|\cdot\| = |\cdot|$. Тоді одиничною кулею в алгебрі $\mathbb{C}_{cont}$ є одиничний відкритий полікруг $\|z\| < \mathbf{1}$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, а одиничною сферою – $\mathbb{T}_{cont} = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}_{cont} : \|Z\| = \mathbf{1}\}$. Відмітимо, що

а) $|Z_1 \cdot Z_2| = \|Z_1 \cdot Z_2\| = \|Z_1\|\|Z_2\| = |Z_1||Z_2|$, $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}_{cont}$;
б) $|1| = \|1\| = \mathbf{1}$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$).

5. Векторний аргумент $a \in \mathbb{C}_{cont}$.

Визначення. Векторним аргументом вектора $\mathbb{A} = \{a_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont} \backslash \mathbb{O}$, $\alpha \in [0;1]$, є нескінченно вимірний дійсний вектор, який визначається формулою

$$\arg \mathbb{A} = \{\arg a_\alpha\},$$

де $\arg a_\alpha$, $\alpha \in [0;1]$, є головним значення аргументу, або те значення, яке випливає з конкретного змісту задачі у якій фігурує вектор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{cont}$.

6. Компактифікація $\mathbb{C}_{cont}$.

У якості компактифікації $\mathbb{C}_{cont} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} \times \ldots$ візьмемо простір $\overline{\mathbb{C}}_{cont} = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots$, який будемо називати нескінченовимірним простором теорії функцій. Нескінченними точками $\overline{\mathbb{C}}_{cont}$ є точки, у яких хоча б одна координата нескінченна.

Збіжність в $\overline{\mathbb{C}}_{cont}$ визначимо, як покоординатну збіжність рівномірну по номерам координат.

Введена збіжність породжує при цьому топологію в просторі $\overline{\mathbb{C}}_{cont}$.

Областю у $\overline{\mathbb{C}}_{cont}$ будемо називати декартовий добуток $\mathbb{B} = \prod\limits_{\alpha} B_\alpha$, де B_α області у $\overline{\mathbb{C}}$, $\alpha \in [0;1]$.

7. Диференціовність.

Нехай дано область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}_{cont}$ та відображення $\mathbb{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_{cont}$, де $\mathbb{F} = \{f_\alpha(\mathbb{Z})\} = \{f_\alpha(\mathbb{X} + i\mathbb{Y})\}$, $\alpha \in [0;1]$, $f_\alpha(\mathbb{X} + i\mathbb{Y}) = U_\alpha(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + iV_\alpha(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = U_\alpha(\{x_\beta\}, \{y_\beta\}) + iV_\alpha(\{x_\beta\}, \{y_\beta\})$, $\beta \in [0;1]$. $\mathbb{F} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{U_\alpha(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\}$, $\alpha \in [0;1]$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{V_\alpha(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\}$, $\alpha \in [0;1]$, $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + i\mathbb{Y} = \{x_\alpha\} + i\{y_\alpha\} \in \mathbb{D}$, $\alpha \in [0;1]$.

Нехай функції $U_k(\{x_\beta\}, \{y_\beta\})$, $V_k(\{x_\beta\}, \{y_\beta\})$, $\beta \in [0;1]$ всюду в $\mathbb{D}$ мають неперервні частинні похідні по всім змінним x_β, y_β, $\beta \in [0;1]$. Тоді матриця Якобі буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_{\mathbb{X}} & \mathbb{U}_{\mathbb{Y}} \\ \mathbb{V}_{\mathbb{X}} & \mathbb{V}_{\mathbb{Y}} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

де $\mathbb{U}_{\mathbb{X}}, \mathbb{U}_{\mathbb{Y}}, \mathbb{V}_{\mathbb{X}}, \mathbb{V}_{\mathbb{Y}}$ є нескінечними матрицями наступного виду $\mathbb{U}_{\mathbb{X}} = \left[\{U_{x_\beta}^{(\alpha)}\}\right]$, $\mathbb{U}_{\mathbb{Y}} = \left[\{U_{y_\beta}^{(\alpha)}\}\right]$, $\mathbb{V}_{\mathbb{X}} = \left[\{V_{x_\beta}^{(\alpha)}\}\right]$, $\mathbb{V}_{\mathbb{Y}} = \left[\{V_{y_\beta}^{(\alpha)}\}\right]$, $V_{x_p}^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} V_\alpha$, $V_{y_\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial y_\beta} V_\alpha$, $U_{x_\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} U_\alpha$, $U_{y_\beta}^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} U_\alpha$, $\alpha, \beta \in [0;1]$.

У нашому випадку, символ $[\cdot]$ означає нескінченну матрицю.

Тоді рівняння Коші–Рімана набуде наступного вигляду

$$\begin{cases} \mathbb{U}_{\mathbb{X}} = \mathbb{V}_{\mathbb{Y}}, \\ \mathbb{U}_{\mathbb{Y}} = -\mathbb{V}_{\mathbb{X}}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Визначення. Нехай $\mathbb{D}$ область простору $\mathbb{C}_{cont}$ Відображення $\mathbb{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_{cont}$ неперервно диференційоване в $\mathbb{D}$. яке задовольняє матричному рівнянню (2.4) в $\mathbb{D}$ будемо називати голоморфним відображенням області $\mathbb{D}$.

Будемо вважати, що голоморфное відображення $\mathbb{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_{cont}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}_{cont}$ є біголоморфним, якщо $\mathbb{F}$ має обернене відображення, голоморфне в $\mathbb{F}(\mathbb{D})$.

Розглянемо визначення рівномірної збіжності всередині одиничного полікруга деякої послідовності відображень.

Нехай $\mathbb{U}_r^{cont} = U_r \times U_r \times \ldots \times U_r \times \ldots$, де $U_r = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $\mathbb{U}_1^{cont} := \mathbb{U}^{cont}$. $\overline{\mathbb{U}}_r^{cont} = \overline{U}_r \times \overline{U}_r \times \ldots \times \overline{U}_r \times \ldots$, та $\mathbb{F}_p : \mathbb{U}^{cont} \to \mathbb{C}_{cont}$ – деяка послідовність відображень.

Визначення. Будемо вважати, що послідовність $\mathbb{F}_p$, $p = \overline{1, \infty}$ рівномірно всередині $\mathbb{U}^{cont}$ збіжна до деякого відображення $\mathbb{F}_0 : \mathbb{U}^{cont} \to \mathbb{C}_{cont}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ та $0 < r < 1$ існує такий номер $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, що

$$\|\mathbb{F}_p(\mathbb{Z}) - \mathbb{F}_0(\mathbb{Z})\| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{1}$$

для всіх $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}_r^{cont}$ та всіх $p > n_0$.

Визначення. Голоморфне відображення

$$\mathbb{F} : \mathbb{U}^{cont} \to \mathbb{C}_{cont}, \quad \mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \{f_\alpha(z_\alpha)\}, \quad f_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} a_p^{(\alpha)} z_\alpha^p,$$

будемо називати аналітичною функцією векторного аргументу, якщо рівномірно всередині полікруга $\mathbb{U}^{cont}$ збігається ряд

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{A}_p \mathbb{Z}^p, \quad \mathbb{A}_p = \{a_p^{(\alpha)}\}, \quad \mathbb{Z} \in \mathbb{U}^{cont}, \quad p = \overline{1, \infty}, \quad \alpha \in [0; 1].$$

Визначення. Нехай $\delta \in (0; 1)$ – деяке фіксоване число. Тоді відображення

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \{f_\alpha(z_\alpha)\}, \quad \mathbb{Z} \in \mathbb{U}^{cont},$$

де кожне $f_\alpha(z_\alpha)$, $\alpha \in [0; 1]$, є однолистою функцією в одиничному колі такою, що $\delta < |f'_\alpha(0)| < \frac{1}{\delta}$, $\alpha \in [0; 1]$, будемо називати частково конформним відображенням одиничного полікруга.

При цьому $\delta = \delta(\mathbb{F})$.

Зауважимо, що звуження частково – конформних відображень на координатну площину є конформним відображенням.

8. Представлениня в векторно – декартовій форм.

Нехай $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont}$. Тоді

$$\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} = \{Rez_\alpha + iImz_\alpha\} = \{Rez_\alpha\} + \{iImz_\alpha\} =$$

$$= \{Rez_\alpha\} + i\{Imz_\alpha\} = Re\mathbb{Z} + iIm\mathbb{Z} = X + iY =$$

$$= \{x_\alpha\} + i\{y_\alpha\} \in \mathbb{R}_{cont} + i\mathbb{R}_{cont},$$

де $X = Re\mathbb{Z} = \{Rez_\alpha\} = \{x_\alpha\}$, $Y = Im\mathbb{Z} = \{Imz_\alpha\} = \{y_\alpha\}$, $\alpha \in [0;1]$. Тобто $\mathbb{C}_{cont} = \mathbb{R}_{cont} + i\mathbb{R}_{cont}$.

9. Представлення у векторно – полярній формі.

Використовуючи вищенаведені означення, отримаємо ланцюг рівностей:

$$\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} = \{|z_\alpha|e^{i\alpha_\alpha}\} = \{|z_\alpha|\}\{e^{i\alpha_\alpha}\} =$$
$$= |\mathbb{Z}|\left[\cos\arg\mathbb{Z} + i\sin\arg\mathbb{Z}\right] = |\mathbb{Z}|e^{i\arg\mathbb{Z}},$$

де

$$\cos\beta = \{\cos\beta_\alpha\}, \quad \sin\beta = \{\sin\beta_\alpha\},$$

$$\exp i\beta = \{\exp i\beta_\alpha\}, \quad \beta = \{\beta_\alpha\} \in \mathbb{R}_{cont}, \quad \mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont},$$

$\alpha \in [0;1]$.

Аналогічним чином визначаємо $\ln\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\} \in \mathbb{C}_{cont} \setminus \Theta$

$$\ln\mathbb{Z} = \ln|\mathbb{Z}| + i\arg\mathbb{Z} = \{\ln|z_\alpha| + i\arg z_\alpha\}.$$

Приклади частково – конформних відображень, які задані елементарними функціями.

1) Дробово – лінійна функція

$$T = \frac{\mathbb{A}_1\mathbb{Z} + \mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_3\mathbb{Z} + \mathbb{A}_4}, \mathbb{Z} \neq -\frac{\mathbb{A}_4}{\mathbb{A}_3}, \mathbb{A}_1\mathbb{A}_4 - \mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 \neq \mathbb{O},$$

де $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ – фіксовані комплексні числа, а $\mathbb{Z} = \{z_\alpha\}$ – комплексна змінна, $\alpha \in [0;1]$.

2) $W = \mathbb{Z}^n = \{z_\alpha^n\}$, де n – натуральне число, степенева функція, голоморфна у всій площині $\overline{\mathbb{C}}_{cont}$, $\alpha \in [0;1]$.

3) $W = \frac{1}{2}\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{\mathbb{Z}}\right)$ – функція Жуковського, голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}_{cont} \setminus \Theta$.

4) $\mathbb{P}_n(\mathbb{Z}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{A}_k\mathbb{Z}^k$ – поліном, $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}_{cont}$.

5) $\frac{1}{\mathbb{Z}-\mathbb{Z}_0}$, $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0 \in \mathbb{C}_{cont} \setminus \Theta$.

6) $\exp\mathbb{Z} = \{e^{z_\alpha}\} = \mathbf{1} + \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbb{Z}^k + \ldots$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}_{cont}$, $\alpha \in [0;1]$.

7) $(1-\mathbb{Z})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{1}{8}\mathbb{Z}^2 - \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\mathbb{Z}^k - \ldots$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{U}^\infty = \{\mathbb{Z} : \|z\| < 1\}$.

10. Поліцилиндрична теорема Рімана.

Як відомо, область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ є областю гіперболічного типу, якщо ∂B (межа ∂B) – зв'язна множина, яка містить більше однієї точки.

Нехай $0 < \delta < 1$ та $\mathbb{A} = \{a_\alpha\} \in \overline{\mathbb{C}}_{cont}$. Тоді $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\delta) = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A}) = \prod\limits_\alpha B_\alpha \subset \overline{\mathbb{C}}_{cont}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A})$, де кожна область B_α є областю гіперболічного типу, $\delta < r(B_\alpha, a_\alpha) < \frac{1}{\delta}$, $\alpha \in [0;1]$. Для довільного $0 < \delta < 1$ область $\mathbb{B}(\delta) = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A})$ називається скінченою відносно $\mathbb{A}$ поліцилінддричною областю гіперболічного типу.

Теорема Рімана. *Нехай $\mathbb{A} \in \overline{\mathbb{C}}_{cont}$ и $0 < \delta < 1$. Тоді довільна скінчена відносно $\mathbb{A}$ поліциліндрична область $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A}) \subset \overline{\mathbb{C}}_{cont}$ гіперболічного типі біголоморфно еквівалентна одиничному полікругу $\mathbb{U}^{cont} = \{\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{cont} : \|\mathbb{W}\| < 1\}$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\delta) = \prod\limits_\alpha B_\alpha$ – область, яка вказана у теоремі Рімана, $\mathbb{A} = \{a_\alpha\} \in \mathbb{B}$, $a_\alpha \in B_\alpha$, $\alpha \in [0;1]$ та $w_\alpha = f_\alpha(z_\alpha)$ – голоморфна в B_α функція, однолисто та конформно відображає область B_α, $\alpha \in [0;1]$ на одиничний круг $|w_\alpha| < 1$ так, що $f(a_\alpha) = 0$, $f'(a_\alpha) > 0$.

Тоді біголоморфне відображення $\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{Z}) = \{f_\alpha(z_\alpha)\}$, $\mathbb{F}'_\mathbb{B}(\mathbb{Z}) = \{f'_\alpha\}$, $\alpha \in [0;1]$, задовольняє нормуючим умовам

$$\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}, \quad \mathbb{F}'_\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \{f'(a_\alpha)\} > \mathbb{O}$$

та є єдиним таким відображенням на одиничний полікруг. Тоді обернене відображення до відображення $\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{A})$ є частково–конформним відображенням одиничного полікруга. *Теорема доведена.*

Отже, у алгебрі $\mathbb{C}_{cont}$ норма визначена рівністю $\|\mathbb{Z}\| := |\mathbb{Z}|$. Векторна метрика в $\mathbb{C}_{cont}$: $\rho(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) = \|\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2\|$. Будемо називати таким чином визначену векторну норму та метрику – поліцилиндрічними. Збіжність по поліциліндрічній нормі рівномірно по номерам задається співвідношенням $\mathbb{Z}_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_0 \iff \|\mathbb{Z}_p - \mathbb{Z}_0\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{O} = (0, 0, \dots 0, \dots) \iff |z_p^{(\alpha)} - z_0^{(\alpha)}| \underset{p\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \forall \alpha \in [0;1]$. (Знак "$\rightrightarrows$"позначає рівномірну збіжність по $\alpha \in [0;1]$.)

Література

[1] Bakhtin, A.K. (2011). Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства, *Dop. NANU, 3*, 7–11.

[2] Bakhtin, A.K. (2011). *Analytic functions of vector argument and partially-conformal mappings in multidimensional complex spaces*, 8th International ISAAC Congress: Abstracts, 1–9.

[3] Bakhtin, A.K. (2012). Аналитические функции векторного аргумента и частично конформные отображения в многомерных комплексных пространствах, *Dop. NANU, 2*, 13–18.

[4] Bakhtin, A.K. (2009). Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains and open sets,*Ukr. Math. J., 61*(5), 716–733.

[5] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2005). Extremal problems and quadratic differential, *Nonlin. Oscillations, 8*(3), 296–301.

[6] Targonskii, A.L. (2008). Extremal problems of partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere, *Dop. NAN Ukr., 9*, 31–36.

[7] Targonskii, A. (2014). Extremal problems on the generalized (n; d)-equiangular system of points, *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 22*(2), 239–251.

[8] Targonskii, A. (2016). Extremal problem (2n; 2m-1)-system points on the rays, *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 24*(2), 283–299.

[9] Targonskii, A.L. (2013). Extremal problems for partially non-overlapping domains on equiangular systems of points, *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, 63*(1), 57–63.

[10] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2016). On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere, *International Journal of Advanced Research in Mathematics, 4*, 1–7.

[11] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2011). Generalized (n, d)-ray systems of points and inequalities for nonoverlapping domains and open sets, *Ukr. Math. J., 63*(7), 999–1012.

[12] Bakhtin, A.K., Targonskii, A.L. (2006). Some extremal problems in the theory of nonoverlapping domains with free poles on rays, *Ukr. Math. J., 58*(12), 1950–1954.

[13] Dubinin, V.N. (1997). Asymptotic representation of the modulus of a degenerating condenser and some its applications, *Zap. Nauchn. Sem. Peterburg. Otdel. Mat. Inst., 237*, 56–73.

[14] Dubinin, V.N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Dal'nayka, Vladivostok [in Russian].

[15] Targonskii, A. (2017). An extremal problem for the nonoverlapping domains, *Journal of Mathematical Sciences, 227*(1), 98–104.

[16] Targonskii, A., Targonskaya, I. (2018). Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere, *Journal of Mathematical Sciences, 235*(1), 74–80.

[17] Targonskii, A.L. (2018). About one extremal problem for projections of the points on unit circle, *Ukrainian Mathematical Bulletin, 15*(3), 418–430.

Відомості про авторів

Андрій Леонідович Таргонський
Житомирський державний університет ім. І. Франко, Житомир, Україна
E-Mail: `targonsk@zu.edu.ua`

Світлана Володимирівна Чугаєвська
Житомирський державний університет ім. І. Франко, Житомир, Україна
E-Mail: `schugaevskaya@ukr.net`