Український математичний вісник
Том 20 (**2023**), № 1, 87 – 106
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-1-5

Про слабку збіжність стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами

Іван Г. Крикун

(Представлена В. Я. Гутлянським)

Анотація. В роботі розглядаються одновимірні стохастичні диференціальні рівняння Іто та стохастичні диференціальні рівняння з локальним часом, що залежать від малого параметру ε та мають нерегулярні коефіцієнти (наприклад, необмежений коефіцієнт зносу або неліпшицевий коефіцієнт дифузії). Узагальнюються існуючі результати щодо умов існування взаємнооднозначної відповідності між стохастичними рівняннями Іто та стохастичними рівняннями з локальним часом. Досліджується слабка збіжність розв'язків таких рівнянь при $\varepsilon \to 0$. Встановлено вигляд коефіцієнтів граничного процесу. Доведені необхідні й достатні умова слабкої збіжності розв'язків цих рівнянь до граничного випадкового процесу.

2010 MSC. 60H10, 60G20.

Ключові слова та фрази. Стохастичні диференціальні рівняння Іто; локальний час; міри, породжені випадковими процесами; слабка збіжність мір.

Вступ

В теорії стохастичних диференціальних рівнянь добре відомо, що збіжності коефіцієнтів недостатньо для слабкої збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто (див. [1], [2]). Необхідними є додаткові умови на коефіцієнти стохастичних диференціальних рівнянь. Наприклад, в [1, теорема 11.3.3], припускається, що коефіцієнт дифузії задовольняє умові типу умови Ліпшиця.

В роботах Г. Кулініча [3] та М. Портенка [4] було розглянуто наступні стохастичні диференціальні рівняння Іто:

$$x_\varepsilon(t) = x + \int_0^t b_\varepsilon(x_\varepsilon(s))ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(x_\varepsilon(s))dw(s).$$

Стаття надійшла в редакцію 12.02.22

В статті [3] було встановлені необхідні та достатні умови слабкої збіжності деяких функцій від розв'язків цих стохастичних рівнянь до розв'язку певного стохастичного рівняння Іто, а також, в окремих випадках, для слабкої збіжності процесів x_ε до узагальнених дифузійних процесів. У [4, §3, розділ III] було розглянуто збіжність функції $b_\varepsilon(x)$ до $\delta-$функції, що зосереджена у нулі, при $\sigma_\varepsilon(x) \equiv 1$ та було доведено слабку збіжність розв'язків цього стохастичного рівняння до узагальненого дифузійного процесу. В роботах С. Махна [6, 7] було отримано умови слабкої збіжності розв'язків деяких стохастичних рівнянь Іто, до розв'язку стохастичного рівняння з локальним часом.

В роботі розглядаються стохастичні диференціальні рівняння, що містять локальний час. Подібні стохастичні рівняння було вперше розглянуто Дж. Харрісоном & Л. Шеппом [8] та Ж.-Ф. Ле Галлем [9]. В цих роботах розв'язки стохастичних рівнянь, що містять локальний час, було пов'язано з т.зв. косим броунівським рухом – випадковим процесом, визначеним К. Іто & Х. Маккіном [10]. В подальшому в роботах Ж.-Ф. Ле Галла [9], Х.-Й. Енгельберта & В. Шмідта [11], С. Махна [12] було отримано формули зв'язку між розв'язками стохастичних рівнянь Іто та розв'язками стохастичних рівняння з локальним часом.

В даній роботі ми розглядаємо стохастичні диференціальні рівняння Іто та стохастичні диференціальні рівняння з локальним часом та з нерегулярними коефіцієнтами, що залежать від малого параметру ε. Основна ідея роботи полягає в узагальненні відомих результатів щодо умов існування взаємнооднозначної відповідності між стохастичними рівняннями Іто та стохастичними рівняннями з локальним часом. Досліджується слабка збіжність розв'язків (у сенсі слабкої збіжності мір, породжених процесами на певному функціональному просторі) цих рівнянь при $\varepsilon \to 0$.

Схожі питання та близькі теми до тих, що вивчаються в даній роботі, були також розглянуто в роботах С. Махна [13], [14, Глави 3–5], [15, 16], І. Крикуна [17–21] та І. Крикуна & С. Махна [22, 23].

В книгах С. Махна [14], Дж. Жакода & А. Шіряєва [24], Ф. Проттера [25], А. Бородіна & П. Салмінена [26] містяться детальні огляди результатів інших авторів.

1. Позначення

Наведемо позначення та означення, які будуть використовуватись в подальшому тексті.

Будемо використовувати звичайні позначення: $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$ – для ймовірнісного простору з потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]$ та $(w(t), \mathfrak{F}_t)$

для стандартного одновимірного вінерівського процесу відносно потоку σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$.

Індикаторну функцію множини A будемо позначати $I_{\{A\}}(x)$.

Розглянемо одновимірне стохастичне диференціальне рівняння, що містить локальний час

$$\xi(t) = x + \beta L^{\xi}(t,0) + \int_0^t b(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s), \tag{1.1}$$

де β є константою, а $b(x), \sigma(x)$ – вимірні функції.

Означення 1. Згідно [11, означення 4.7 (1)], будемо говорити, що рівняння (1.1) має *слабкий розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $g(x)$ і $\sigma(x)$ та для константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, неперервний семімартингал $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ та стандартний одновимірний вінерівський процес $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ такі, що локальний час процесу ξ в точці 0 за час t (будемо в подальшому позначати його $L^{\xi}(t,0)$), який визначається рівністю

$$L^{\xi}(t,0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{\{(-\delta,\delta)\}}(\xi(s))\sigma^2(\xi(s))ds \tag{1.2}$$

існує майже напевно і рівняння (1.1) виконується майже напевно.

Зауважимо, що в означенні вище ми використовуємо т.зв. напівмартингальний (або семімартингальний) локальний час, який має незначні відмінності від броунівського локального часу (з детальною побудовою напівмартингального локального часу можна ознайомитися в [25, Chapter IV], а порівняти ці локальні часи можна в [26, Chapter V]).

Нехай $(\mathbb{C}[0,T], C_t), t \in [0,T]$ позначає простір неперервних функцій на інтервалі $[0,T]$. Позначимо через μ_ε міру, породжену процесом ξ_ε на функціональному просторі $(\mathbb{C}[0,T], C_t)$.

Будемо вивчати слабку збіжність мір, породжених процесами. Цей тип збіжності будемо позначати знаком $\Rightarrow$.

Означення 2. Через $\mathbb{D}h(x)$ будемо позначати *симетричну похідну функції h в точці x* та визначати її рівністю

$$\mathbb{D}h(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(x+\varepsilon) - h(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} .$$

Через $\mathbf{n}_h(dx)$ будемо позначати *другу похідну функції $h(x)$ в сенсі розподілів* та визначати її для довільної нескінченно диференційованої функції $H(x)$ з компактним носієм за допомогою функціональної рівності

$$\int \frac{d^2H(x)}{dx^2} h(x)dx = \int H(x)\mathbf{n}_h(dx).$$

Будемо використовувати функцію $sgnx$ такого вигляду:

$$sgnx = \begin{cases} 1, \text{при}\, x > 0, \\ 0, \text{при}\, x = 0, \\ -1, \text{при}\, x < 0. \end{cases}$$

Для пари вимірних функцій $(f(x), g(x))$ будемо позначати

$$(f, g) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda),$$

якщо існують деякі константи λ, Λ, $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ такі, що для довільного x виконуються нерівності

$$|f(x)| \leq \Lambda\,, \; \lambda \leq g(x) \leq \Lambda\,.$$

2. Умови на коефіцієнти

Наведемо тут обмеження на коефіцієнти рівнянь, які будуть використовуватись в подальшому тексті.

Умова (I).

Нехай $f_1(x), f_2(x)$ – деякі двічі диференційовані функції, що мають властивості:

I_1. $f_1(0) = f_2(0) = 0$; $f_1'(x) > 0$, $f_2'(x) > 0$; $f_1'(0) = f_1\,,\ f_2'(0) = f_2\,;$

I_2. $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases}.$

Умова (II).

Нехай β та γ – константи, а $g(x), \sigma(x)$ – деякі вимірні функції, що мають властивості:

II_1. $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$.

II_2. Пара функцій $(g, \sigma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

Умова (III).

Нехай β_ϵ – константа, $g_\varepsilon(x), b_\varepsilon(x), \sigma_\varepsilon(x)$ – деякі вимірні функції, що мають властивості:

III_1. При будь-якому $\varepsilon > 0$ $|\beta_\epsilon| < 1$.

III_2. При будь-якому $\varepsilon > 0$ існує єдиний слабкий розв'язок стохастичного рівняння.

III_3. Пара функцій $(g_\varepsilon, \sigma^2_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

III_4. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{\sigma^2_\varepsilon(y)} dy \right| \le \Lambda\,.$$

3. Слабка збіжність стохастичних рівнянь Іто

Розглянемо випадковий процес $X(t)$ як розв'язок стохастичного рівняння Іто

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(X(s))ds + \int_0^t \gamma(X(s))dw(s). \tag{3.1}$$

Припустимо, що пара функцій $(\alpha, \gamma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, тоді згідно [11, теорема 4.35] рівняння (3.1) має єдиний слабкий розв'язок.

З [11, формула 4.3] випливає, що якщо для функції $f(x)$ існують введені раніше в означенні 2 функції $\mathbb{D}f(x)$ та $\mathbf{n}_f(dx)$, то для функції $f(x)$ та процесу $X(t)$ має місце формула Танака [14, Теорема 3, стор.103], [27, Theorem 1.5, p. 223], яка є узагальненням формули Іто:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t \mathbb{D}f(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int L^X(t,y)\mathbf{n}_f(dy). \tag{3.2}$$

Тепер побудуємо деяку функцію $u(x)$, яка складається з двох частин (залежно від знаку аргументу). А саме, припустимо, що $u_i(x)$, $i = 1, 2$ – деякі двічі диференційовані функції, що задовольняють Умову (I). Тоді будемо мати

$$\mathbb{D}u(x) = \frac{1}{2}(u_2'(x) + u_1'(x)) + \frac{1}{2}(u_2'(x) - u_1'(x))sgn x;$$

$$\mathbf{n}_u(dx) = (u_2 - u_1)\delta_0(x)dx + \mathbb{A}_u(x)dx;$$

де ми визначили функцію $\mathbb{A}_u(x)$ таким чином

$$\mathbb{A}_u(x) = \frac{1}{2}\big[(u_2''(x) + u_1''(x)) + (u_2''(x) - u_1''(x))sgn x\big], \tag{3.3}$$

і $\delta_0(x)$ – це $\delta-$функція Дірака, що зосереджена в нулі.

Далі нехай функція $v(x) = u^{-1}(x)$ позначатиме обернену функцію для функції $u(x)$.

Лема 1. *Нехай випадковий процес $X(t)$ задано рівнянням (3.1), а функція $u(x)$ задовольняє Умову (I). Припустимо, що для деякого випадкового процесу $Y(t)$ має місце рівність $Y(t) = u(X(t))$. Тоді виконуються наступні рівності*

$$L^Y(t,0) = \frac{u_1 + u_2}{2} L^X(t,0), \tag{3.4}$$

$$Y(t) = Y(0) + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} L^Y(t,0) + \int_0^t \widehat{\alpha}(Y(s))ds + \int_0^t \widehat{\gamma}(Y(s))dw, \tag{3.5}$$

де функція $\mathbb{A}_u(x)$ визначена (3.3), а

$$\widehat{\alpha}(x) = \mathbb{D}u(v(x))\alpha(v(x)) + \frac{1}{2}\gamma^2(v(x))\mathbb{A}_u(v(x)) \ ,$$

$$\widehat{\gamma}(x) = \mathbb{D}u(v(x))\gamma(v(x)).$$

Доведення. Для функції $u(x)$ та для процесу $X(t)$ за формулою Танака (3.2) отримуємо рівність:

$$\begin{gathered} Y(t) = Y(0)+ \\ + \int_0^t \Big[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s))\Big] ds+ \\ + \int_0^t \mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 - u_1}{2} L^X(t,0). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Оскільки $X(s) = v(Y(s))$, то рівність (3.5) випливає з (3.6) та (3.4). Для доведення (3.4) застосуємо формулу Танака (3.2) до процесу (3.1) та функції $\overline{u}(x) = |u(x)|$. Будемо мати:

$$\mathbb{D}\overline{u}(x) = \frac{1}{2}\big(u_2'(x) - u_1'(x)\big) + \frac{1}{2}\big(u_2'(x) + u_1'(x)\big) sgnx;$$

$$\mathbf{n}_{\overline{u}}(dx) = (u_2 + u_1)\delta_0(x)dx + \mathbb{B}_u(x)dx;$$

де ми позначили через $\mathbb{B}_u(x)$ наступну функцію:

$$\mathbb{B}_u(x) = \frac{1}{2}\Big[\big(u_2''(x) - u_1''(x)\big) + \big(u_2''(x) + u_1''(x)\big) sgnx\Big]. \tag{3.7}$$

Таким чином

$$\begin{gathered} |Y(t)| = |Y(0)|+ \\ + \int\limits_0^t \Big[\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s))\Big] ds+ \\ + \int\limits_0^t \mathbb{D}\overline{u}(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t,0). \end{gathered} \tag{3.8}$$

За формулами (3.2) та (3.8) маємо:

$$L^Y(t,0)=\frac{u_2+u_1}{2}L^X(t,0)+$$
$$+\int_0^t\Big[\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\alpha(X(s))+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s))\Big]ds+$$
$$+\int_0^t\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\gamma(X(s))dw-\int_0^t sgnY(s)dY(s).$$

Останній інтеграл в цій рівності виведемо з формули (3.6) та з використанням наступної властивості процесів: $sgnX(s)=sgnY(s)$. Будемо мати

$$\begin{aligned}L^Y(t,0)=&\frac{u_2+u_1}{2}L^X(t,0)+\\
&+\int_0^t\Big[\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\alpha(X(s))+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s))\Big]ds+\\
&+\int_0^t\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\gamma(X(s))dw+\int_0^t\frac{u_2-u_1}{2}sgnX(s)L^X(ds,0)-\\
&-\int_0^t sgnX(s)\Big[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s))+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s))\Big]ds-\\
&-\int_0^t sgnX(s)\mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s))dw.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Оскільки функція $L^X(s,0)$ зростає лише в точках s таких, що $X(s)=0$, то

$$\int_0^t sgnX(s)L^X(ds,0)=0.$$

Тепер приведемо подібні в правій частині (3.9), зауважимо що

$$\mathbb{D}\overline{u}(X(s))-sgnX(s)\mathbb{D}u(X(s))=I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2'(X(s))-u_1'(X(s))}{2};$$

$$\mathbb{B}_u(X(s))-sgnX(s)\mathbb{A}_u(X(s))=I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2''(X(s))-u_1''(X(s))}{2},$$

та продовжимо перетворення інтегралів, що додаються до локального часу в правій частині (3.9):

$$\int_0^t\Big[\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\alpha(X(s))+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s))-$$

$$-sgnX(s)\Big[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s))+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s))\Big]\Bigg]ds+$$

$$+\int_0^t\Big[\mathbb{D}\overline{u}(X(s))\gamma(X(s))-sgnX(s)\mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s))\Big]dw=$$

$$=\int_0^t\Bigg(\alpha(X(s))I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2'(X(s))-u_1'(X(s))}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma^2(X(s))I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2''(X(s))-u_1''(X(s))}{2}\Bigg)ds+$$

$$+\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2'(X(s))-u_1'(X(s))}{2}\gamma(X(s))dw=$$

$$=\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{u_2'(X(s))-u_1'(X(s))}{2}dX(s)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\gamma^2(X(s))(u_2''(X(s))-u_1''(X(s))ds=$$

$$=\frac{u_2-u_1}{2}\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s)+$$

$$+\frac{1}{4}\gamma^2(0)\big(u_2''(0)-u_1''(0)\big)\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))ds=0\,,$$

оскільки з [28, Лема 5, стор. 590] маємо $\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s)=0$, а рівність нулю другого доданку випливає з наступного результату:

$$\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s)=\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{\alpha(X(s))}{\gamma^2(X(s))}\gamma^2(X(s))ds=$$

$$=\int_{\mathbb{R}} I_{\{0\}}(y)\frac{\alpha(y)}{\gamma^2(y)}L^X(t,y)dy=0.$$

Тут перша рівність – результат з [27, стор. 217], а друга рівність випливає з [27, Розділ VI, Наслідок 1.6]. □

Означення 3. Для деякої сталої $|\beta|<1$ визначимо функцію $\kappa(x)$ наступним чином

$$\kappa(x)=\begin{cases}(1-\beta)x, & x<0\\(1+\beta)x, & x\geq 0\end{cases}\tag{3.10}$$

і через

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\beta}, & x<0\\[2mm]\dfrac{x}{1+\beta}, & x\geq 0\end{cases}$$

будемо позначати функцію, обернену до функції $\kappa(x)$. В подальшому для будь-якої функції f будемо позначати через $\widetilde{f}$ функцію, визначену так:

$$\widetilde{f}(x) = \frac{f(\kappa(x))}{1+\beta sgnx}. \tag{3.11}$$

Розглянемо два наступних стохастичних рівняння:

$$\xi(t) = x + \beta L^{\xi}(t,0) + \int_0^t g(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s), \tag{3.12}$$

$$\zeta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \widetilde{g}(\zeta(s))ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}(\zeta(s))dw(s). \tag{3.13}$$

Добре відомо ([11, теорема 4.35], [29]), що якщо Умова (II) виконується, то і рівняння (3.12), і рівняння (3.13) мають єдиний слабкий розв'язок.

Наступна лема випливає з леми 1.

Лема 2. *Припустимо, що коефіцієнти рівняння* (3.12) *задовольняють Умову (II) і $\zeta(t)$ – розв'язок рівняння* (3.13)*. Тоді процес $\kappa(\zeta(t))$ є розв'язком рівняння* (3.12)*.*

З лем 1 та 2 випливає наступна лема.

Лема 3. *Припустимо, що функція $u(x)$ задовольняє Умову (I), а коефіцієнти процесу* (3.12) *задовольняють Умову (II). Тоді процес $\eta(t)$, визначений рівністю $\eta(t) = u(\xi(t))$, задовольняє наступне рівняння*

$$\begin{aligned}\eta(t) =& u(x) + \frac{u_2 - u_1 + \beta(u_2+u_1)}{u_2+u_1+\beta(u_2-u_1)} L^{\eta}(t,0) + \\ &+ \int_0^t g^*(\eta(s))ds + \int_0^t \sigma^*(\eta(s))dw(s),\end{aligned} \tag{3.14}$$

де використано позначення

$$g^*(x) = \mathbb{D}u\big(u^{-1}(x)\big)g\big(u^{-1}(x)\big) + \frac{\sigma^2\big(u^{-1}(x)\big)}{2}\mathbb{A}_u\big(u^{-1}(x)\big),$$

$$\sigma^*(x) = \mathbb{D}u\big(u^{-1}(x)\big)\sigma\big(u^{-1}(x)\big).$$

Доведення. Зауважимо, що для функції $\tau(x)$, визначеної

$$\tau(x) = u(\kappa(x)) = \begin{cases} u_1\big((1-\beta)x\big), & x \le 0 \\ u_2\big((1+\beta)x\big), & x \ge 0 \end{cases},$$

виконуються рівності $\eta(t)=u(\xi(t))=u(\kappa(\zeta(t)))=\tau(\zeta(t))$.

Тоді маємо такі результати:

$$\tau_1(0)=\tau_2(0)=0\,;$$

$$\tau_1'(x)=(1-\beta)u_1'\big((1-\beta)x\big)>0\,,\tau_2'(x)>0\,;$$
$$\tau_1'(0)=\tau_1=(1-\beta)u_1\,,\tau_2'(0)=\tau_2=(1+\beta)u_2\,;$$

для функції $\tau(x)$ існує обернена функція: $\tau^{-1}(x)=\varphi(u^{-1}(x))$; та існують другі похідні $\tau_1''(x)\,,\tau_2''(x)$.

Далі маємо:

$$\mathbb{D}\tau(x)=(1+\beta sgnx)\mathbb{D}u(\kappa(x));$$

$$\mathbb{A}_\tau(x)=(1+\beta sgnx)^2\mathbb{A}_u(\kappa(x));$$
$$\mathbf{n}_\tau(dx)=(\tau_2-\tau_1)\delta_0(x)dx+(1+\beta sgnx)^2\mathbb{A}_u(\kappa(x))dx.$$

Таким чином, приходимо до висновку, що виконуються вимоги леми 1 на процеси (3.13) та (3.14) з функцією $\tau(x)$. Будемо мати:

$$\widehat{\alpha}(x)=\mathbb{D}\tau(\tau^{-1}(x))\widetilde{g}(\tau^{-1}(x))+\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\tau^{-1}(x))\mathbb{A}_\tau(\tau^{-1}(x))=$$

$$=(1+\beta sgn\tau^{-1}(x))\mathbb{D}u(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{g(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1+\beta sgn\tau^{-1}(x)}+$$

$$+\frac{\sigma^2(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{2(1+\beta sgn(\tau^{-1}(x)))^2}(1+\beta sgn\tau^{-1}(x))^2\mathbb{A}_u(\kappa(\tau^{-1}(x)))=$$

$$=\mathbb{D}u(u^{-1}(x))g(u^{-1}(x))+\frac{\sigma^2(u^{-1}(x))}{2}\mathbb{A}_u(u^{-1}(x))=g^*(x);$$
$$\widehat{\gamma}(x)=\mathbb{D}\tau(\tau^{-1}(x))\widetilde{\sigma}(\tau^{-1}(x))=$$
$$=(1+\beta sgn\tau^{-1}(x))\mathbb{D}u(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{\sigma(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1+\beta sgn\tau^{-1}(x)}=$$
$$=\mathbb{D}u(u^{-1}(x))\sigma(u^{-1}(x))=\sigma^*(x).$$

Застосувавши тепер лему 1, отримаємо твердження леми 3. □

Тепер розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння Іто:

$$v_\varepsilon(t)=x+\int_0^t\big(b_\varepsilon(v_\varepsilon(s))+g_\varepsilon(v_\varepsilon(s))\big)ds+\int_0^t\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s))dw(s).\quad(3.15)$$

Нехай для коефіцієнтів (3.15) виконується Умова (III); процесу v_ε на просторі $(\mathbb{C}[0,T],\mathcal{C}_T)$ відповідає міра ν_ε.

Введемо функції $F_\varepsilon(x)$ та $f_\varepsilon(x)$

$$F_\varepsilon(x) = \exp\Big\{ -2\int\limits_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)}dy\Big\},\ f_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x F_\varepsilon(y)dy. \qquad (3.16)$$

Оскільки $f_\varepsilon(x)$, як функція x, монотонно зростає, то вона має обернену, яку будемо позначати $f_\varepsilon^{-1}(x)$. Припустимо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le 0 \\ f_2(x), & x \ge 0 \end{cases}. \qquad (3.17)$$

За умови III_4 границя в (3.17) існує рівномірно на компактах. Тоді рівномірно на компактах $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ і $f^{-1}(x)$ є оберненою функцією до функції $f(x)$.

Гранична міра ν на $(\mathbb{C}[0,T], \mathcal{C}_T)$ буде відповідати процесу

$$v(t) = x + \alpha L^v(t,0) + \int_0^t g(v(s))ds + \int_0^t \sigma(v(s))dw(s). \qquad (3.18)$$

Теорема 1. *Нехай для функції* $f(x)$ *з* (3.17) *та для коефіцієнтів рівнянь* (3.18), (3.15) *виконуються Умови (I), (II), (III) відповідно. Для того, щоб* $\nu_\varepsilon \Rightarrow \nu$ *при* $\varepsilon \to 0$ *необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

i) $\quad \alpha = \dfrac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$;

ii) $\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^x \dfrac{1}{F_\varepsilon(y)\sigma_\varepsilon^2(y)}dy = \int\limits_0^x \dfrac{1}{\sigma^2(y)\mathbb{D}f(y)}dy$ *для всіх* $x \in \mathbb{R}$;

iii) $\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^x \dfrac{g_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)}dy = \int\limits_0^x \Big[\dfrac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathbb{A}_f(y)}{\mathbb{D}f(y)}\Big]dy$ *для всіх* $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай процес $\pi_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(v_\varepsilon(t))$ і ς_ε – міра, що відповідає йому на $(\mathbb{C}[0,T], C_t)$. З формули Іто випливає, що процес $\pi_\varepsilon(t)$ задовольняє рівняння

$$\pi_\varepsilon(t) = \pi_\varepsilon(0) + \int_0^t \widehat{g_\varepsilon}(\pi_\varepsilon(s))ds + \int_0^t \widehat{\sigma_\varepsilon}(\pi_\varepsilon(s))dw(s). \qquad (3.19)$$

Тут $\widehat{g_\varepsilon}(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$, $\widehat{\sigma_\varepsilon}(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))\sigma_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$. Нехай $\pi(t) = f(v(t))$ і позначимо через ς міру, що відповідає процесу π на $(\mathbb{C}[0,T], C_t)$.

Згідно [7, лема 5], треба перевірити, що вимоги **i)**, **ii)**, **iii)** необхідні й достатні для слабкої збіжності мір ς_ε до міри ς. В силу Умови (III) пара $(\widehat{g_\varepsilon}, \widehat{\sigma_\varepsilon}^2) \in \mathcal{L}(k, K)$ з деякими константами k, K.

З леми 3 випливає, що процес $\pi(t) = f(v(t))$ задовольняє рівнянню (3.14) з відповідним виразом для коефіцієнта при локальному часі (з заміною констант u_1, u_2, β на f_1, f_2, α, відповідно):

$$\pi(t) = \pi(0) + \frac{f_2 - f_1 + \alpha(f_2 + f_1)}{f_2 + f_1 + \alpha(f_2 - f_1)} L^\pi(t, 0) +$$

$$+ \int_0^t \widehat{g}(\pi(s))ds + \int_0^t \widehat{\sigma}(\pi(s))dw(s),$$

де позначено $\quad \widehat{g}(x) = \mathbb{D}f(f^{-1}(x))g(f^{-1}(x)) + \dfrac{\sigma^2(f^{-1}(x))}{2}\mathbb{A}_f(f^{-1}(x)),$

$$\widehat{\sigma}(x) = \mathbb{D}f(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)).$$

З іншого боку, з результатів роботи [6] випливає, що граничний процес для $\pi_\varepsilon(t)$ може бути лише розв'язком рівняння Іто, тобто з коефіцієнтом 0 при локальному часі. Звідси можемо отримати значення для константи α – тому виконується вимога **i)**.

Враховуючи це, з [6, теорема 1] отримаємо, що наступні умови необхідні й достатні для збіжності $\varsigma_\varepsilon \Rightarrow \varsigma$:

$$\int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma_\varepsilon}^2(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))\sigma_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy =$$

$$= \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{1}{F_\varepsilon(z)\sigma_\varepsilon^2(z)} dz \to \int_0^{f^{-1}(x)} \frac{1}{\mathbb{D}f(z)\sigma^2(z)} dz =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(f^{-1}(y))\big[\mathbb{D}f(f^{-1}(y))\big]^2} dy = \int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy\ ;$$

$$\int_0^x \frac{\widehat{g_\varepsilon}(y)}{\widehat{\sigma_\varepsilon}^2(y)} dy = \int_0^x \frac{g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))}{F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))\sigma_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy = \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{\sigma_\varepsilon^2(z)} dz \to$$

$$\to \int_0^{f^{-1}(x)} \Big[\frac{g(z)}{\sigma^2(z)} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(z)}{\mathbb{D}f(z)}\Big] dz =$$

$$= \int_0^x \Big[\frac{g(f^{-1}(y))}{\sigma^2(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(f^{-1}(y))}{\mathbb{D}f(f^{-1}(y))}\Big] \frac{dy}{\mathbb{D}f(f^{-1}(y))} =$$

$$= \int_0^x \Big[\frac{g(f^{-1}(y))}{\sigma^2(f^{-1}(y))\mathbb{D}f(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(f^{-1}(y))}{\big[\mathbb{D}f(f^{-1}(y))\big]^2}\Big] dy = \int_0^x \frac{\widehat{g}(y)}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy\ ,$$

що еквівалентно вимогам **ii)** та **iii)** відповідно. $\square$

4. Слабка збіжність стохастичних диференціальних рівнянь, що містять локальний час

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння, що містить локальний час, та з коефіцієнтами, що залежать від малого параметру:

$$\begin{aligned}\xi_\varepsilon(t) = x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t,0) + &\int_0^t \big(b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))\big)ds + \\ &+ \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))dw(s).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Позначимо через μ_ε міру на $(\mathbb{C}[0,T], \mathcal{C}_T)$, породжену процесом ξ_ε.

Нехай $\xi(t)$ – буде слабким розв'язком рівняння наступного стохастичного диференціального рівняння, що містить локальний час:

$$\xi(t) = x + \gamma L^{\xi}(t,0) + \int_0^t g(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s). \tag{4.2}$$

Позначимо міру, породжену ξ на просторі $(\mathbb{C}[0,T], \mathcal{C}_T)$, через μ.

З [11, теорема 4.35] випливає, що в умовах наступної теореми рівняння (4.2) має єдиний слабкий розв'язок.

Теорема 2. *Нехай для функції $f(x)$ з (3.17) та для стохастичних рівнянь (4.2), (4.1) виконуються відповідно Умови (I), (II), (III) і $\beta_\varepsilon \longrightarrow \beta$ при $\varepsilon \to 0$. Для того, щоб $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

j) $$\gamma = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)};$$

jj) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y)\sigma_\varepsilon^2(y)}dy = \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(y)\mathbb{D}f(y)}dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R};$$

jjj) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)}dy = \int_0^x \Big[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(y)}{\mathbb{D}f(y)}\Big]dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Аналогічно формулам (3.10)–(3.11), для $|\beta_\varepsilon| < 1$ введемо функції κ_ε, φ_ε, $\widetilde{g}_\varepsilon$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon$:

$$\kappa_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1-\beta_\varepsilon)x, & x \le 0 \\ (1+\beta_\varepsilon)x, & x \ge 0 \end{cases};$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ – обернена функція до $\kappa_\varepsilon(x)$,

$$\widetilde{g}_\varepsilon(x) = \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1+\beta_\varepsilon sgn x}, \widetilde{b}_\varepsilon(x) = \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1+\beta_\varepsilon sgn x}, \widetilde{\sigma}_\varepsilon(x) = \frac{\sigma_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1+\beta_\varepsilon sgn x}.$$

Введемо процес $\eta_\varepsilon(t)$ – розв'язок рівняння

$$\eta_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t \Big(\widetilde{b}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) + \widetilde{g}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s))\Big)ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s))dw(s).$$

Позначимо

$$\widetilde{F}_\varepsilon(x) = \exp\left\{ -2\int\limits_0^x \frac{\widetilde{b}_\varepsilon(y)}{\widetilde{\sigma}^2_\varepsilon(y)}dy\right\}, \ \widetilde{f}_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x \widetilde{F}_\varepsilon(y)dy.$$

Тоді

$$\widetilde{F}_\varepsilon(x) = \exp\left\{ -2\int\limits_0^x \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))}{\sigma^2_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))}(1+\beta_\varepsilon sgn y)dy\right\} = F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x));$$

$$\widetilde{f}_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x \widetilde{F}_\varepsilon(y)dy = \int\limits_0^x F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))dy =$$

$$= \int\limits_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{F_\varepsilon(z)}{1+\beta_\varepsilon sgn z}dz = \frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1+\beta_\varepsilon sgn x}\ .$$

З (3.17) та з того що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta_\varepsilon = \beta$, маємо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{f}_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1+\beta_\varepsilon sgn x} = \begin{cases} \dfrac{f_1(\kappa(x))}{1-\beta}, & x \le 0 \\ \dfrac{f_2(\kappa(x))}{1+\beta}, & x \ge 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \widetilde{f}_1(x), & x \le 0 \\ \widetilde{f}_2(x), & x \ge 0 \end{cases} =: \widetilde{f}(x).$$

Значить:

$$\widetilde{f}_1(0) = \widetilde{f}_2(0) = 0\ ;\ \widetilde{f}_1'(x) = f_1'(\kappa(x))\ ,\ \widetilde{f}_2'(x) = f_2'(\kappa(x))\ ,$$

$$\widetilde{f}_1'(0) = \widetilde{f}_1 = f_1\ , \widetilde{f}_2'(0) = \widetilde{f}_2 = f_2\ ;$$

існують другі похідні $\widetilde{f}_1''(x) = (1-\beta)f_1''(\kappa(x))$, $\widetilde{f}_2''(x) = (1+\beta)f_2''(\kappa(x))$; та існує обернена $\widetilde{f}^{-1}(x) = \varphi(f^{-1}(\kappa(x)))$.

Згідно з лемою 2, $\xi_\varepsilon(t) = \kappa_\varepsilon(\eta_\varepsilon(t))$ – є розв'язком рівняння (4.1). З теореми 1 випливає, що ϑ_ε – міри, породжені η_ε, збігаються до ϑ

– міри, породженої η, при виконанні умов теореми 1 відносно коефіцієнтів $\eta(t)$, де $\eta(t)$ відповідно задовольняє рівнянню

$$\eta(t)=\varphi(x)+\alpha L^{\eta}(t,0)+\int_0^t \widetilde{g}(\eta(s))ds+\int_0^t \widetilde{\sigma}(\eta(s))dw(s).$$

Далі маємо

$$\mathbb{D}\widetilde{f}(x)=\frac{\widetilde{f}_2'(x)+\widetilde{f}_1'(x)}{2}+\frac{\widetilde{f}_2'(x)-\widetilde{f}_1'(x)}{2}sgnx=\mathbb{D}f(\kappa(x));$$

$$\mathbf{n}_{\widetilde{f}}(dx)=(\widetilde{f}_2'(0)-\widetilde{f}_1'(0))\delta_0(x)dx+\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\widetilde{f}}(x)dx=(f_2-f_1)\delta_0(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\Big((1+\beta)f_2''(\kappa(x))+(1-\beta)f_1''(\kappa(x))\Big)+$$

$$+\Big((1+\beta)f_2''(\kappa(x))-(1-\beta)f_1''(\kappa(x))\Big)sgnx\Big]dx=$$

$$=(f_2-f_1)\delta_0(x)dx+\frac{(1+\beta sgnx)}{2}\mathbb{A}_f(\kappa(x))dx\,,$$

звідки $\mathbb{A}_{\widetilde{f}}(x)=(1+\beta sgnx)\mathbb{A}_f(\kappa(x))$.

Отже з вимог теореми 2 випливає, що виконуються вимоги теореми 1. Тепер перевіримо, що вірно і навпаки – що з вимог теореми 2 випливають вимоги **i)**, **ii)**, **iii)** теореми 1. Маємо :

– **i)** : $\quad \alpha=\dfrac{\widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_1+\widetilde{f}_2}=\dfrac{f_1-f_2}{f_1+f_2}$;

Отже вимога **i)** рівносильна вимозі **j)**.

– **ii)** : $\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \frac{1}{\widetilde{F}_\varepsilon(y)\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2(y)}dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \frac{(1+\beta_\varepsilon sgny)^2}{F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))\sigma_\varepsilon^2(\kappa_\varepsilon(y))}dy=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\kappa_\varepsilon(x)}\frac{(1+\beta_\varepsilon sgnz)}{F_\varepsilon(z)\sigma_\varepsilon^2(z)}dz=(\text{випливає з }\mathbf{jj}))$$

$$=\int_0^{\kappa(x)}\frac{1+\beta sgny}{\sigma^2(y)\mathbb{D}f(y)}dy=\int_0^x\frac{(1+\beta sgnz)^2}{\sigma^2(\kappa(z))\mathbb{D}f(\kappa(z))}dz=\int_0^x\frac{dz}{\widetilde{\sigma}^2(z)\mathbb{D}\widetilde{f}(z)}.$$

Отже вимога **ii)** рівносильна вимозі **jj)**.

$$– \textbf{iii)} : \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^x \frac{\widetilde{g}_\varepsilon(y)}{\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2(y)}dy \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^x \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))(1+\beta_\varepsilon sgny)}{\sigma_\varepsilon^2(\kappa_\varepsilon(y))}dy \;=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{\sigma_\varepsilon^2(z)}dz = (\text{випливає з } \textbf{jjj})) = \int\limits_0^{\kappa(x)} \Big[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(y)}{\mathbb{D}f(y)}\Big]dy =$$

$$= \int\limits_0^x \Big[\frac{g(\kappa(z))}{\sigma^2(\kappa(z))} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_f(\kappa(z))}{\mathbb{D}f(\kappa(z))}\Big](1+\beta sgnz)dz = \int\limits_0^x \Big[\frac{\widetilde{g}(z)}{\widetilde{\sigma}^2(z)} + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{A}_{\widetilde{f}}(z)}{\mathbb{D}\widetilde{f}(z)}\Big]dz.$$

Отже вимога **iii)** рівносильна вимозі **jjj)**.

Таким чином, має місце твердження теореми 1 щодо умов слабкої збіжності мір, породжених процесами η_ε, до міри, породженої процесом η.

Далі, оскільки функції $\kappa_\varepsilon(x)$ і $\varphi_\varepsilon(x)$ збігаються рівномірно на компактах до їхніх відповідних границь $\kappa(x)$ і $\varphi(x)$, то $\xi(t) = \kappa(\eta(t))$ – граничний процес для $\xi_\varepsilon(t)$.

Згідно леми 2, $\eta(t) = \kappa_\alpha(\zeta(t))$ для $|\alpha| < 1$, де

$$\kappa_\alpha(x) = \begin{cases} (1-\alpha)x, & x \le 0 \\ (1+\alpha)x, & x \ge 0 \end{cases},$$

і $\varphi_\alpha(x)$ – обернена до $\kappa_\alpha(x)$; процес $\zeta(t)$ задовольняє рівнянню

$$\zeta(t) = \varphi_\alpha(\varphi(x)) + \int_0^t g^*(\zeta(s))ds + \int_0^t \sigma^*(\zeta(s))dw(s),$$

де позначено $\qquad g^*(x) = \dfrac{\widetilde{g}(\kappa_\alpha(x))}{1+\alpha sgnx}\ ;\ \sigma^*(x) = \dfrac{\widetilde{\sigma}(\kappa_\alpha(x))}{1+\alpha sgnx}$.

Значить $\qquad \xi(t) = \kappa(\eta(t)) = \kappa(\kappa_\alpha(\zeta(t))) = \theta(\zeta(t))$, де

$$\theta(x) = \kappa(\kappa_\alpha(x)) = \begin{cases} (1-\alpha)(1-\beta)x, & x \le 0 \\ (1+\alpha)(1+\beta)x, & x \ge 0 \end{cases},$$

а обернена до неї функція $\theta^{-1}(x) = \varphi_\alpha(\varphi(x))$.

Далі, $\mathbb{A}_\theta(x) = 0$. Тоді, за лемою 1 будемо мати (для спрощення запису будемо писати в кількох наступних формулах під інтегралами ξ замість $\xi(s)$):

$$\xi(t) = \theta(\zeta(t)) = \kappa(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(x))))+$$

$$+\frac{(1+\beta)(1+\alpha)-(1-\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+\alpha)+(1-\beta)(1-\alpha)}L^\xi(t,0)+$$

$$+\int\limits_0^t \mathbb{D}\theta(\theta^{-1}(\xi))g^*(\theta^{-1}(\xi))ds+\int\limits_0^t \mathbb{D}\theta(\theta^{-1}(\xi))\sigma^*(\theta^{-1}(\xi))dw(s).$$

Далі врахуємо те, що $\mathbb{D}\theta(x)=(1+\alpha sgnx)(1+\beta sgnx)$, використаємо властивості функцій θ^{-1}, $\widetilde{f}^{-1}$ і $\mathbb{A}_{\widetilde{f}}$ та підставимо функції g^* і σ^*. Будемо мати :

$$\xi(t)=x+\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}L^{\xi}(t,0)+$$
$$+\int_0^t\left[(1+\alpha sgn\xi)(1+\beta sgn\xi)\frac{\widetilde{g}(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))))}{1+\alpha sgn\xi}\right]ds+$$
$$+\int_0^t(1+\alpha sgn\xi)(1+\beta sgn\xi)\frac{\widetilde{\sigma}\Big(\kappa_\alpha\big(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))\big)\Big)}{1+\alpha sgn\xi}dw=$$
$$=x+\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}L^{\xi}(t,0)+$$
$$+\int_0^t(1+\beta sgn\xi)\widetilde{g}(\varphi(\xi))ds+\int_0^t(1+\beta sgn\xi)\widetilde{\sigma}(\varphi(\xi))dw=$$
$$=x+\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}L^{\xi}(t,0)+\int_0^t g(\xi(s))ds+\int_0^t\sigma(\xi(s))dw(s).$$

Підставимо тепер значення коефіцієнту α, отримане з теореми 1, тобто $\alpha=\dfrac{f_1-f_2}{f_1+f_2}$ в вираз $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ – отримуємо формулювання вимоги **j)**:

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}=\frac{f_1-f_2+\beta(f_1+f_2)}{f_1+f_2+\beta(f_1-f_2)}.$$

Остаточно граничний процес $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi(t)=x+\gamma L^{\xi}(t,0)+\int\limits_0^t g(\xi(s))ds+\int\limits_0^t\sigma(\xi(s))dw(s),$$

тобто $\xi(t)$ задовольняє рівнянню (4.2). □

5. Приклад

Дослідимо збіжність розв'язків таких стохастичних диференціальних рівнянь :

$$\begin{aligned}\xi_\varepsilon(t)=x+\beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t,0)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b\Big(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\Big)+\\+\int_0^t g\Big(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\Big)ds+\int_0^t\sigma\Big(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\Big)dw(s).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Припустимо, що константи $|\beta_\varepsilon| < 1$ при будь-якому ε, $|\beta| < 1$, $\beta_\varepsilon \to \beta$ при $\varepsilon \to 0$ і

$$\left| \int\limits_0^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right| < Const\ , \int\limits_{-\infty}^0 \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy = B_1\ , \int\limits_0^\infty \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy = B_2$$

та існують границі

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{g(y)}{\sigma^2(y)} dy = A_1\ , \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \frac{dy}{\sigma^2(y)} = A_2 > 0\ .$$

Тоді виконуються вимоги теореми 2 і для знаходження коефіцієнтів граничного процесу обчислюємо:

$$f_1 = \exp(2B_1),\ f_2 = \exp(-2B_2),\ \mathbb{A}_f(x) \equiv 0,$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{A_2},\ g(x) = \frac{A_1}{A_2},$$

$$\gamma = \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)},$$

де через $th(x)$ позначено гіперболічний тангенс x.

Тому граничним процесом для розв'язків (5.1) буде процес

$$\xi(t) = x + \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)} L^\xi(t, 0) + \frac{A_1}{A_2} t + \frac{1}{\sqrt{A_2}} w(t).$$

Подяки

Автор висловлює сердечну вдячність героїчним бійцям Збройних Сил України, які з 2014го року захищають автора та його рідних і близьких від кривавих російських терористичних військ.

Також автор висловлює вдячність анонімному рецензенту за уважне вивчення тексту статті та корисні зауваження, які допомогли покращити роботу.

Література

[1] Stroock, D., Varadhan, S. R. S. (1979). *Multidimensional Diffusion Processes.* New York, Springer-Verlag.

[2] Махно, С. Я. (1992). Сходимость диффузионных процессов. *Український математичний журнал, 44* (2), 284–289.

[3] Кулинич, Г. Л. (1982). О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра. *Теория вероятностей и ее применения, 27*(4), 795–801.

[4] Портенко, Н. И. (1982). *Обобщенные диффузионные процессы.* К., Наукова думка.

[5] Portenko, N. I. (1976). Generalized diffusion processes. *Proceedings of the Third Japan–USSR Symposium on Probability Theory. Lecture Notes in Mathematics, v. 550.* Berlin, Heidelberg, Springer, 500–523.

[6] Махно, С. Я. (1999). Сходимость решений одномерных стохастических уравнений. *Теория вероятностей и ее применения, 44*(3), 555–572.

[7] Махно, С. Я. (2003). Предельная теорема для одномерных стохастических уравнений. *Теория вероятностей и ее применения, 48*(1), 156–161.

[8] Harrison, J. M., Shepp, L. A. (1981). On skew Brownian motion. *Ann. Probab., 9*(2), 309–313.

[9] Le Gall, J.-F. (1983). One dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. *Lecture Notes in Mathematics, 1095*, 51–82.

[10] Ito, K., McKean, H. (1963). Brownian motions on a half line. *Illinois J. Math., 7*(2), 181–231.

[11] Engelbert, H.-J., Schmidt, W. (1991). Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations III. *Math. Nachr., 151*, 149–197.

[12] Махно, С. Я. (2001). Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем. *Теорія ймовірностей та математична статистика, 64*, 106–109.

[13] Makhno, S. Ya. (2005). The limit stochastic equation changes type. *Theory of Stochastic Processes, 11(27)*(3–4), 104–109.

[14] Махно, С. Я. (2012). *Стохастические уравнения. Предельные теоремы.* Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”, Т. 6. К., Наукова думка.

[15] Махно, С. Я. (2016). Диффузионные процессы в композитных средах. *Теорія ймовірностей та математична статистика, 94*, 130–142.

[16] Makhno, S. Ya. (2016). One-dimensional stochastic equations in layered media with semi-permeable barriers. *Random Operators and Stochastic Equations, 24*(3), 165–171.

[17] Крикун, І. Г. (2005). Гранична теорема для стохастичних рівнянь з локальним часом. *Праці Інституту прикладної математики та механіки НАН України, 10*, 120–130.

[18] Krykun, I. H. (2009). Large deviation principle for stochastic equations with local time. *Theory of Stochastic Processes, 15 (31)*(2), 140–155.

[19] Крикун, І. Г. (2012). Функціональний закон типу повторного логарифма для косого броунівського руху. *Теорія ймовірностей та математична статистика, 87*, 60–77.

[20] Крикун, І. Г. (2016). Збіжність косих броунівських рухів з локальними часами в кількох точках, які стягуються в одну. *Український математичний вісник, 13*(2), 213–223.

[21] Krykun, I. H. (2017). Convergence of skew Brownian motions with local times at several points that are contracted into a single one. *Journal of Mathematical Sciences, 221*(5), 671–678.

[22] Крыкун, И. Г., Махно, С. Я. (2013). Явление Пеано для уравнений Ито. *Український математичний вісник, 10*(1), 87–109.

[23] Krykun, I. H., Makhno, S. Ya. (2013). The Peano phenomenon for Ito equations. *Journal of Mathematical Sciences, 192*(4), 441–458.

[24] Jacod, J., Shiryaev, A. N. (1987). *Limit theorems for stochastic processes.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.

[25] Protter, P. E. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

[26] Borodin, A. N., Salminen, P. (1996). *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Basel, Boston, Berlin, Birkhauser.

[27] Revuz, D., Yor, M. (1990). *Continuous martingales and Brownian motion.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer.

[28] Гихман, И. И., Скороход, А. В. (1982). *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* К., Наукова думка.

[29] Веретенников, А. Ю. (1979). О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятностей и ее применения, XXIV*(2), 354–366.

Відомості про авторів

Іван Григорович Крикун

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов’янськ, Україна
E-Mail: iwanko@i.ua