Український математичний вісник
Том 20 (**2023**), № 2, 161 – 185
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-2-1

Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бєсова

Світлана Б. Гембарська, Ігор А. Романюк, Оксана В. Федуник-Яремчук

(Представлена Р. М. Тригубом)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки деяких характеристик лінійної та нелінійної апроксимації ізотропних класів типу Нікольського–Бєсова $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах $B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$. Особливістю цих просторів, як лінійних підпросторів L_q є те, що норма в них "сильніша" ніж L_q-норма.

2010 MSC. 42B99.

Ключові слова та фрази. Класи типу Нікольського–Бєсова, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, поперечники.

1. Вступ

У роботі досліджуються лінійні та нелінійні методи наближення ізотропних класів типу Нікольського–Бєсова $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах $B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$. Мотивацією до дослідження відповідних апроксимаційних характеристик у цих просторах є наступна обставина.

У низці робіт [1–11] вивчалися питання наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з мішаною гладкістю, а саме класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$, Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та їхніх аналогів у просторах з дещо модифікованими нормами, у порівнянні з нормами просторів $B_{q,1}, q \in \{1, \infty\}$.

При цьому важливо зазначити, що в згаданих роботах в багатьох ситуаціях було виявлено відмінності в порядкових оцінках апроксимаційних характеристик у просторах L_q і $B_{q,1}, q \in \{1, \infty\}$. І друга

Стаття надійшла в редакцію 04.05.2023

обставина, на яку слід звернути увагу, проявилася в тому, що оптимальними з точки зору порядкових оцінок, розглянутих там апроксимаційних характеристик, виявилися тригонометричні поліноми зі спектром в так званих східчастих гіперболічних хрестах.

Принципово інша ситуація спостерігається при дослідженні ізотропних класів типу Нікольського–Бєсова $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ у просторах $B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$. А саме, для всіх розглянутих нами апроксимаційних характеристик їхні оцінки у просторах $B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$, співпадають за порядком з відповідними оцінками у просторах L_q. Більше того, ці оцінки реалізуються за наближення функцій з класів $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами зі спектром у кубічних областях.

Основні результати роботи містяться в теоремах 2.3, 3.3 і 3.6. Вони доповнюють і узагальнюють відповідні твердження робіт [12–19], про що детальніше буде йти мова в коментарях.

Перш ніж перейти до формулювання і доведення одержаних результатів, введемо необхідні позначення і дамо означення функціональних класів, які будуть досліджуватися.

Нехай $\mathbb{R}^d$, d – вимірний простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, позначимо простір 2π - періодичних за кожною змінною функцій f, для яких

$$||f||_p := ||f||_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty := ||f||_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ в точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$ з кроком $h = (h_1, \ldots, h_d)$ визначимо за формулою

$$\Delta_h^l f(x) := \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x), \quad \Delta_h^0 f(x) := f(x).$$

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta_h^l f(x)$, задамо модуль неперервності l - го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ згідно з формулою

$$\omega_l(f, t) := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p, \quad \text{де} \quad |h| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_d^2}.$$

Нехай $\omega(t)$ – функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\omega(t)$ для $t \geq 0$ задовольняє такі умови:

1) $\omega(0) = 0$; $\omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\omega(t)$ неперервна;

3) $\omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega(nt) \leq C_1 n^l \omega(t)$, де стала $C_1 > 0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\omega(t)$ задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі-Стєчкіна [20]. Це означає наступне.

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що
$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_2 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha},\ 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що
$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_3 \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma},\ 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ належить до простору $B^\omega_{p,\theta}$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ (див., наприклад, [12]), якщо:
$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,\ 1 \leq \theta < \infty;$$
$$\sup_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} < \infty,\ \theta = \infty,$$
де $\omega(t)$ – функція типу модуля неперервності порядку l.

Норма у просторі $B^\omega_{p,\theta}$ визначається за формулою
$$\|f\|_{B^\omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \|f\|_p + \sup\limits_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Якщо $\omega(t) = t^r, 0 < r < l$, то простори $B^\omega_{p,\theta}$ збігаються з просторами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [21] і, зокрема, при $\theta = \infty$ $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, де H^r_p – простори введені С.М. Нікольським [22].

Зазначимо, що із збільшенням параметра θ простори $B^{\omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \infty$ справедливі вкладення

$$B^{\omega}_{p,1} \subset B^{\omega}_{p,\theta_1} \subset B^{\omega}_{p,\theta_2} \subset B^{\omega}_{p,\infty} \equiv H^{\omega}_{p}.$$

У подальшому нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням норми простору $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, – ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{T}^d$, визначимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbb{V}_m$ – оператор, який задає згортку функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто

$$\mathbb{V}_m f(x) := (f * V_m)(x) = V_m(f, x) := V_m(f).$$

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\sigma_0(f) := V_1(f), \quad \sigma_s(f) := V_{2^s}(f) - V_{2^{s-1}}(f), \quad s = 1, 2, \dots$$

Тоді для функцій із просторів $B^{\omega}_{p,\theta}$ справедливі співвідношення (див., наприклад, [23]):

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\|\sigma_s(f)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \le \theta < \infty, \qquad (1.1)$$

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|\sigma_s(f)\|_p}{\omega(2^{-s})}, \quad \theta = \infty, \qquad (1.2)$$

при умові, що функція $\omega(t)$ є функцією типу модуля неперервності порядку l і задовольняє умови (S^{α}) і (S_l).

Тут і далі по тексту для додатних послідовностей $a(n)$ і $b(n)$, $n \in \mathbb{N}$, вживається запис $a(n) \asymp b(n)$, який означає, що існують сталі $0 < C_4 \le C_5$ такі, що $C_4 a(n) \le b(n) \le C_5 a(n)$. Якщо тільки $b(n) \le C_5 a(n)$ $(b(n) \ge C_4 a(n))$, то пишемо $b(n) \ll a(n)$ $(b(n) \gg a(n))$.

Зауважимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з просторів $B^{\omega}_{p,\theta}$, використовуючи в (1.1) та (1.2) замість $\|\sigma_s(f)\|_p$ норми відповідних двійкових "блоків" ряду Фур'є функції f.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ і $s \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$f_{(0)} := f_{(0)}(x) = \widehat{f}(0),$$

$$f_{(s)} := f_{(s)}(x) = \sum_{2^{s-1} \leq \max\{|k_j|,\, 1 \leq j \leq d\} < 2^s} \widehat{f}(k)\, e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де $(k,x) = k_1x_1 + \cdots + k_dx_d$, а $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Тоді при $1 < p < \infty$ і виконанні умов 1) – 4), (S^α), з деяким $\alpha > 0$, та (S_l), справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^\omega_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \, \|f_{(s)}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{1.3}$$

$$\|f\|_{B^\omega_{p,\infty}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|f_{(s)}\|_p}{\omega(2^{-s})}, \quad \theta = \infty. \tag{1.4}$$

У подальших міркуваннях ми будемо розглядати класи функцій $\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}$ з просторів $B^\omega_{p,\theta}$, які означаються наступним чином

$$\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta} := \{ f \in B^\omega_{p,\theta} \ : \|f\|_{B^\omega_{p,\theta}} \leq 1 \}.$$

Зазначимо, що класи $\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}$ з точки зору їх апроксимаційних характеристик досліджувались у низці робіт [12–19, 23], де можна ознайомитися з більш повною бібліографією.

Тепер означимо $||\cdot||_{B_{q,1}}$ у просторах $B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$, функцій $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, яка є подібною на декомпозиційну норму функцій із просторів типу Нікольського–Бєсова $B^\omega_{p,\theta}$ (див. (1.1)).

Отже, для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{q,1}}$, $1 \leq q \leq \infty$, визначається формулою

$$\|t\|_{B_{q,1}} := \sum_s \|\sigma_s(t)\|_q.$$

Аналогічно означається норма $\|f\|_{B_{q,1}}, 1 \leq q \leq \infty$, для будь-якої функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, такої, що ряд $\sum\limits_{s \in \mathbb{Z}_+} \|\sigma_s(f)\|_q$ збігається. Зазначимо, що для $f \in B_{q,1}, 1 \leq q \leq \infty$, виконуються співвідношення:

$$\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{q,1}}; \quad \|f\|_{B_{1,1}} \leq \|f\|_{B_{q,1}} \leq \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{1.5}$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку введені норми у просторах $B_{q,1}$, при $q \in \{1, \infty\}$, співпадають з певним чином модифікованими нормами, які розглядалися у роботах [1–11].

2. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення

Означимо апроксимаційну характеристику, яку будемо досліджувати у цій частині роботи.

Нехай $\mathscr{X}$ – нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ і $\Theta_m \subset \mathbb{Z}^d$ – скінченна множина, яка містить m елементів, тобто $|\Theta_m| = m$. Тут і далі через $|\mathfrak{N}|$ позначаємо кількість елементів скінченної множини $\mathfrak{N}$. Для $f \in \mathscr{X}$ покладемо

$$S_{\Theta_m}(f) := S_{\Theta_m}(f,x) = \sum_{k\in\Theta_m} \widehat{f}(k)\, e^{i(k,x)}$$

і розглянемо величину

$$e_m^{\perp}(f)_{\mathscr{X}} := \inf_{\Theta_m} \|f - S_{\Theta_m}(f)\|_{\mathscr{X}}.$$

Для фунціонального класу $F \subset \mathscr{X}$ покладемо

$$e_m^{\perp}(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f\in F} e_m^{\perp}(f)_{\mathscr{X}}.$$

Величину $e_m^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі $\mathscr{X}$. Означена величина для різноманітних функціональних класів, як у просторах Лебега $L_q(\mathbb{T}^d)$, так і в деяких їхніх підпросторах досліджувалася в багатьох роботах (див., наприклад, [16, 24–29]), а також в монографії [30].

Наведемо два відомих твердження, які будемо використовувати.

Теорема 2.1. [16] *Нехай* $1 \le p,q,\theta \le \infty$, $(p,q) \,\overline{\in}\, \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$e_m^{\perp}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_q := e_m^{\perp}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{L_q(\mathbb{T}^d)} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+},$$

де $a_+ = \max\{a;0\}$.

Теорема 2.2. [22] *Нехай*

$$t(x) = \sum_{|k_j|\le n_j} c_k e^{i(k,x)},\ n_j \in \mathbb{N},\quad j=\overline{1,d}.$$

Тоді для $1 \le p < q \le \infty$ *справедлива нерівність*

$$\|t\|_q \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|t\|_p. \tag{2.1}$$

Нерівність (2.1) отримана С.М. Нікольським і має назву “нерівність різних метрик”.

Перейдемо до формулювання і доведення одержаних результатів.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p, q) \overline{\in} \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$e_m^{\perp}(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega})_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, \tag{2.2}$$

$a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Зауважимо, що внаслідок вкладення $\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega} \subset \boldsymbol{H}_p^{\omega}$, $1 \le \theta < \infty$, її достатньо отримати для величини $e_m^{\perp}(\boldsymbol{H}_p^{\omega})_{B_{q,1}}$.

Розглянемо кілька випадків.

а) Нехай $1 \le p < q \le \infty$. Тоді за заданим m підберемо число $n(m)$ із співвідношення $2^{nd} \le m \le 2^{(n+1)d}$ $(2^n \asymp m^{\frac{1}{d}})$, і розглянемо для $f \in \boldsymbol{H}_p^{\omega}$ її наближення кубічною сумою Фур'є $S_n(f)$ вигляду

$$S_n(f) := S_n(f, x) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(x). \tag{2.3}$$

Згідно з означенням норми у просторі $B_{q,1}$ і властивістю згортки можемо записати

$$\begin{aligned} e_m^{\perp}(f)_{B_{q,1}} \ll \|f - S_n(f)\|_{B_{q,1}} &= \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)} \Big\|_{B_{q,1}} \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \Big\| \sigma_s * \sum_{s'=n+1}^{\infty} f_{(s')} \Big\|_q &\le \sum_{s=n}^{\infty} \Big\| \sigma_s * \sum_{s'=s}^{s+1} f_{(s')} \Big\|_q \\ &\le \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s\|_1 \, \Big\| \sum_{s'=s}^{s+1} f_{(s')} \Big\|_q = J_1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Далі, скориставшись співвідношенням

$$\|V_s\|_p \asymp 2^{sd(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

(див., наприклад, [31], гл.1, §1), маємо

$$\|\sigma_s\|_1 = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \le \|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1 \le C_6, \quad C_6 > 0. \tag{2.5}$$

Отже, оцінка (2.4) набуває вигляду

$$J_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} \Big\| \sum_{s'=s}^{s+1} f_{(s')} \Big\|_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{s'=s}^{s+1} \|f_{(s')}\|_q \ll \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{(s)}\|_q = J_2. \qquad (2.6)$$

Для подальшої оцінки величини J_2 виберемо деяке число q_0 з умови $p < q_0 < q$. Тоді з огляду на те, що для $f \in \boldsymbol{H}_p^{\omega}$, $1 \leq p \leq \infty$, виконане співвідношення $\|\sigma_s(f)\|_p \ll \omega(2^{-s})$ (див. (1.2)), скориставшись нерівністю (2.1) будемо мати

$$J_2 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})} \|f_{(s)}\|_{q_0} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})} \|\sigma_s(f)\|_{q_0}$$
$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0})} \|\sigma_s(f)\|_p = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\sigma_s(f)\|_p$$
$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega(2^{-s}) = J_3. \qquad (2.7)$$

Оскільки $\omega(t)$ задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$, то виконується співвідношення

$$\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \leq \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \quad s = n, \dots, \qquad (2.8)$$

і тому

$$J_3 = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s\left(\alpha - d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\right)}$$
$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (2.9)$$

Об'єднавши (2.4), (2.6), (2.7) і (2.9) приходимо до шуканої оцінки зверху величини $e_m^{\perp}(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega})_{B_{q,1}}$ у випадку $1 \leq p < q \leq \infty$.

b) Нехай $1 < p = q < \infty$. Тоді для $f \in \boldsymbol{H}_p^{\omega}$ будемо мати

$$e_m^{\perp}(f)_{B_{q,1}} \ll \|f - S_n(f)\|_{B_{p,1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \Big\| \sigma_s * \sum_{s'=n+1}^{\infty} f_{(s')} \Big\|_p$$
$$\leq \sum_{s=n}^{\infty} \Big\| \sigma_s * \sum_{s'=s}^{s+1} f_{(s')} \Big\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s\|_1 \Big\| \sum_{s'=s}^{s+1} f_{(s')} \Big\|_p$$
$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{(s)}\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-\alpha s}$$
$$\ll \omega(2^{-n}) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}). \qquad (2.10)$$

c) Нехай $1 < q < p < \infty$. Тоді скориставшись (2.10) і вкладенням $\boldsymbol{H}^{\omega}_{p} \subset \boldsymbol{H}^{\omega}_{q}$ можемо записати

$$e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{p})_{B_{q,1}} \ll e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{q})_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}). \tag{2.11}$$

d) Нехай $1 < q < \infty,\ p = \infty$. Оцінка зверху величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{\infty})_{B_{q,1}}$ випливає з (2.11) згідно з вкладенням $\boldsymbol{H}^{\omega}_{\infty} \subset \boldsymbol{H}^{\omega}_{p}, 1 \leq p < \infty$, тобто

$$e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{\infty})_{B_{q,1}} \ll e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{p})_{B_{q,1}} \ll \omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

e) Нехай $1 < p \leq \infty,\ q = 1$. Оцінка зверху величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{H}^{\omega}_{p})_{B_{1,1}}$ випливає з (2.11) згідно з нерівністю $\| \cdot \|_{B_{1,1}} < \| \cdot \|_{B_{q,1}},\ q > 1$, і вкладенням $\boldsymbol{H}^{\omega}_{\infty} \subset \boldsymbol{H}^{r}_{p}$.

Оцінки зверху величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}}$ в усіх випадках теореми доведені.

Стосовно оцінки знизу в (2.2) зауважимо, що вона є наслідком теореми 2.1 і співвідношення $\| \cdot \|_{B_{q,1}} \gg \| \cdot \|_{q}$, тобто

$$e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \gg e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{q} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_{+}}.$$

$\square$

Зауваження 2.1. У одновимірному випадку ($d = 1$) порядок величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, встановлений у роботах [32] і [33] при $1 < p < \infty$ і $p = 1$ відповідно.

Зауваження 2.2. При $\omega(t) = t^{r},\ r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_{+}$ точна за порядком оцінка величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{r}_{p,\theta})_{B_{q,1}},\ \ 1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, одержана в роботі [34] і, зокрема, у випадку $d = 1$ порядок величини $e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{r}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, встановлено у роботах [6, 35] при $1 < p < \infty$ і $p = 1$ відповідно.

Проаналізувавши доведення теореми 2.3 і порівнявши одержаний в ній результат з оцінкою відповідної апроксимаційної характеристики розглянутої в теоремі 2.1, можна записати співвідношення

$$e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp e^{\perp}_{m}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{q},$$

$$1 \leq p, q, \theta \leq \infty, \quad (p, q) \mathrel{\overline{\in}} \{(1,1), (\infty,\infty)\}, \quad \alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_{+}.$$

Далі наведемо наслідок з теореми 2.3, який стосується наближення функцій з класів $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$ їхніми кубічними сумами Фур'є $S_{n}(f)$.

Для функціонального класу $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ позначимо

$$\mathscr{E}_{n}(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} = \sup_{f \in \boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}} \| f - S_{n}(f) \|_{B_{q,1}}.$$

Наслідок 2.1. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p,q) \overline{\in} \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$\mathscr{E}_n(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \tag{2.12}$$

Оцінка зверху в (2.12) встановлена при доведенні теореми 2.3. Відповідна оцінка знизу є наслідком також цієї теореми за умови $2^{nd} \asymp m$, оскільки при такому співвідношенні між числами m і n

$$\mathscr{E}_n(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \gg e^\perp_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Зауваження 2.3. Співставивши результати теореми 2.3 і наслідку 2.1 приходимо до висновку про справедливість при $m \asymp 2^{nd}$ співвідношення

$$e^\perp_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \mathscr{E}_n(\boldsymbol{B}^r_{p,\theta})_{B_{q,1}},$$

$$1 \le p,q,\theta \le \infty,\ (p,q) \overline{\in} \{(1,1),(\infty,\infty)\},\ r > d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+.$$

3. Найкращі тригонометричні наближення і поперечники

У цій частині роботи одержимо спочатку точні за порядком оцінки найкращих наближень класів $\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$ тригонометричними поліномами зі спектром в кубічних областях $C^d(2^n)$. Далі з використанням одержаних і раніше відомих результатів встановимо порядки наступних апроксимаційних характеристик класів $\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$:

1) наближення сумами Валле Пуссена;

2) найкращі m-членні тригонометричні наближення;

3) поперечники.

Отже, нехай $T(C^d(2^n))$, $n \in \mathbb{Z}_+$ – множина тригонометричних поліномів вигляду

$$t := t(x) = \sum_{k \in C^d(2^n)} c_k e^{i(k,x)},\ \ c_k \in \mathbb{C},$$

де $C^d(2^n) := \{k : k = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{Z}^d,\ |k_j| < 2^n, j = \overline{1,d}\}$.

Для $f \in \mathscr{X}$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$E_n(f)_{\mathscr{X}} := \inf_{t \in T(C^d(2^n))} \|f - t\|_{\mathscr{X}}$$

і для функціонального класу $F \subset \mathscr{X}$ позначимо

$$E_n(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f \in F} E_n(f)_{\mathscr{X}}.$$

Величини $E_n(f)_{\mathscr{X}}$ і $E_n(F)_{\mathscr{X}}$ називають найкращими наближеннями функції $f \in \mathscr{X}$ і класу $F \subset \mathscr{X}$ відповідно, тригонометричними поліномами з множини $T(C^d(2^n))$ у просторі $\mathscr{X}$.

Зазначимо, що у випадку $\mathscr{X} = L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, величина $E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_q := E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{L_q(\mathbb{T}^d)}$ досліджувалася у роботі [17] і при цьому було одержано таке твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, а також умову (S_l). Тоді справедливе співвідношення*

$$E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+},$$

$a_+ = \max\{a; 0\}$.

Тепер, переходячи до формулювання і доведення одержаних нами результатів сформулюємо спочатку твердження, яке є наслідком теорем 2.3, 3.1.

Теорема 3.2. *Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, $(p, q) \overline{\in} \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, а також умову (S_l). Тоді справедлива оцінка*

$$E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}, \tag{3.1}$$

$a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Оцінка зверху в (3.1) випливає з теореми 2.3, згідно з нерівністю $E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \leq \mathscr{E}_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}}$. Оцінка знизу є наслідком теореми 3.1 і співвідношення $\|\cdot\|_{B_{q,1}} \gg \|\cdot\|_q$. $\square$

Звернемо увагу, що в теоремі 3.2 не розглянуто випадок $(p, q) \in \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. У наступному твердженні встановимо порядок величини $E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}}$ у цьому випадку.

Теорема 3.3. *Нехай $1 \leq \theta \leq \infty, p \in \{1, \infty\}$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l). Тоді справедлива оцінка*

$$E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{p,1}} \asymp \omega(2^{-n}). \tag{3.2}$$

Доведення. Спочатку одержимо в (3.2) оцінку зверху, котру, як зазначалося вище, достатньо встановити для класів $\boldsymbol{H}_p^\omega$.

Отже, розглянемо для $f \in \boldsymbol{H}_p^\omega$ наближаючий поліном вигляду

$$t_n(f) = \sum_{s=0}^{n-1} \sigma_s(f).$$

Тоді згідно з означенням $\|\cdot\|_{B_{p,1}}$ можемо записати

$$E_n(f)_{B_{p,1}} \le \|f - t_n(f)\|_{B_{p,1}} = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} \sigma_s(f) \right\|_{B_{p,1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \left\| \sigma_s * \sum_{s'=n}^{\infty} \sigma_{s'}(f) \right\|_p \le \sum_{s=n-1}^{\infty} \left\| \sigma_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \sigma_{s'}(f) \right\|_p = J_4. \quad (3.3)$$

Для того, щоб продовжити оцінку величини J_4 розглянемо два випадки.

Нехай $p = 1$. Тоді скориставшись властивістю згортки і взявши до уваги оцінки $\|\sigma_s\|_1 \le C_6$ (див. (2.5)) і $\|\sigma_s(f)\|_1 \ll \omega(2^{-s}), f \in \boldsymbol{H}_1^\omega$ (див. (1.2)), одержимо

$$J_4 \le \sum_{s=n-1}^{\infty} \|\sigma_s\|_1 \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \sigma_{s'}(f) \right\|_1 \ll \sum_{s=n-1}^{\infty} \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\sigma_{s'}(f)\|_1$$

$$\ll \sum_{s=n-2}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_1 \ll \sum_{s=n-2}^{\infty} \omega(2^{-s}) = \sum_{s=n-2}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s}$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n-2}^{\infty} 2^{-\alpha s} \ll \omega(2^{-n}). \quad (3.4)$$

У випадку $p = \infty$ величина J_4 оцінюється наступним чином

$$J_4 \le \sum_{s=n-1}^{\infty} \|\sigma_s\|_1 \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \sigma_{s'}(f) \right\|_\infty \ll \sum_{s=n-1}^{\infty} \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\sigma_{s'}(f)\|_\infty$$

$$\ll \sum_{s=n-2}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_\infty \ll \sum_{s=n-2}^{\infty} \omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}). \quad (3.5)$$

Поєднавши (3.3)–(3.5) приходимо до шуканої оцінки зверху величини $E_n(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^\omega)_{B_{p,1}}$, $p \in \{1, \infty\}$.

Оцінка знизу в (3.2) випливає з теореми 3.1 і співвідношення $\|\cdot\|_{B_{p,1}} \gg \|\cdot\|_p$, тобто

$$E_n(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^\omega)_{B_{p,1}} \gg E_n(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^\omega)_p \asymp \omega(2^{-n}).$$

$\square$

Тепер сформулюємо наслідок, який стосується наближення функцій з класів $\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$ сумами Валле Пуссена.

Наслідок 3.1. *Нехай $1 \le p, q, \theta \le \infty$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_{+}$, а також умову (S_l). Тоді справедлива оцінка*

$$\sup_{f \in \boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}} \|f - V_{2^{n-1}}(f)\|_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_{+}}. \tag{3.6}$$

Оцінка зверху в (3.6) одержана при доведенні оцінок зверху в теоремах 3.2, 3.3, а оцінка знизу випливає також з цих теорем і нерівності

$$\sup_{f \in \boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}} \|f - V_{2^{n-1}}(f)\|_{B_{q,1}} \ge E_n(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_{+}}.$$

Наступний наслідок стосується важливої характеристики вже нелінійної апроксимації.

Для $f \in \mathscr{X}$ і $m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$e_m(f)_{\mathscr{X}} := \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_{\mathscr{X}},$$

де $\{k^j\}_{j=1}^{m}$ – система векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ з цілочисельними координатами, а $c_j,\ j = \overline{1, m}$, – довільні комплексні числа. Якщо $F \subset \mathscr{X}$ – деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f \in F} e_m(f)_{\mathscr{X}}. \tag{3.7}$$

Означена таким чином апроксимаційна характеристика $e_m(F)_{\mathscr{X}}$ називається найкращим m - членним тригонометричним наближенням класу F у просторі $\mathscr{X}$.

Величина $e_m(f)_2 := e_m(f)_{L_2(\mathbb{T})}$ в більш загальній ситуації була введена С.Б. Стєчкіним [36] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Перші оцінки величин $e_m(f)_{\infty} := e_m(f)_{L_{\infty}(\mathbb{T})}$ для деяких індивідуальних функцій були одержані у [37] Р.С. Ісмагіловим. Згодом дослідження величин $e_m(F)_q := e_m(F)_{L_q(\mathbb{T}^d)}$, $d \ge 1$, для різних функціональних класів проводилися в багатьох роботах. З детальною бібліографією можна ознайомитися в роботах [25–28, 38, 39], а також в монографіях [30, 31, 40–42].

Зауважимо, що згідно з означеннями апроксимаційна характеристика (3.7) і найкраще ортогональне тригонометричне наближення $e_m^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ пов'язані співвідношенням

$$e_m(F)_{\mathscr{X}} \le e_m^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}.$$

Сформулюємо відомий результат, який буде нами використовуватися.

Теорема 3.4. [15] *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \alpha(p,q)$, *а також умову* (S_l), *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+, & 1 \le p \le q \le 2 \text{ або } 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\left\{\dfrac{d}{p}; \dfrac{d}{2}\right\}, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді для $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$e_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\left(\frac{1}{p} - \max\{\frac{1}{q};\frac{1}{2}\}\right)_+}. \tag{3.8}$$

Зауваження 3.1. Якщо $\omega(t) = t^r$, $r > \alpha(p,q)$ то (3.8) набуває вигляду

$$e_m(\boldsymbol{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d} + \left(\frac{1}{p} - \max\{\frac{1}{q};\frac{1}{2}\}\right)_+}.$$

і ця оцінка встановлена у роботі [38].

Наслідок 3.2. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le q \le 2$ *або* $1 \le q \le p \le \infty$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді справедлива оцінка*

$$e_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}. \tag{3.9}$$

Оцінка зверху в (3.9) випливає з теорем 3.2, 3.3 при умові $m \asymp 2^{nd}$. Відповідна оцінка знизу є наслідком (3.8) і співвідношення $\|\cdot\|_{B_{q,1}} \gg \|\cdot\|_q$.

Зауваження 3.2. Порівнявши результати теорем 3.2, 3.3 з оцінкою (3.8) можна зробити висновок, що при виконанні умов наслідку 3.2, справедливе співвідношення

$$E_n(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp e_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta})_{B_{q,1}}, \quad m \asymp 2^{nd}.$$

Для того, щоб сформулювати наступний наслідок означимо відповідні апроксимаційні характеристики.

Нехай $\mathscr{Y}$ – нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$, $\mathscr{L}_m(\mathscr{Y})$ – сукупність підпросторів у просторі $\mathscr{Y}$, вимірності, що не перевищує m і W – центрально-симетрична множина в $\mathscr{Y}$.

Величина

$$d_m(W, \mathscr{Y}) := \inf_{L_m \in \mathscr{L}_m(\mathscr{Y})} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_m} \|w - u\|_{\mathscr{Y}}$$

називається колмогоровським m-поперечником множини W у просторі $\mathscr{Y}$ [43].

Нехай Y і Z – нормовані простори і $L(Y,Z)$ – сукупність лінійних неперервних відображень Y в Z.

Величина [44]

$$\lambda_m(W,\mathscr{Y}) := \inf_{\substack{L_m\in\mathscr{L}_m(\mathscr{Y})\\ \Lambda\in L(\mathscr{Y},L_m)}} \sup_{w\in W} \|w-\Lambda w\|_{\mathscr{Y}},$$

де нижня грань береться по всіх підпросторах L_m в $\mathscr{L}_m(\mathscr{Y})$ вимірності не більшої ніж m і всіх лінійних неперервних операторах, що діють з $\mathscr{Y}$ в L_m, називається лінійним m-поперечником множини W у просторі $\mathscr{Y}$.

Нехай $\mathscr{Y} = L_q(\mathbb{T}^d)$ або $\mathscr{Y} = B_{q,1}$, $1\le q\le\infty$, і $F\subset\mathscr{Y}$ – деякий функціональний клас.

Тригонометричний m - поперечник класу F у просторі $\mathscr{Y}$ (позначення $d_m^T(F,\mathscr{Y})$) визначається формулою [37]

$$d_m^T(F,\mathscr{Y}) := \inf_{\{k^j\}_{j=1}^m} \sup_{f\in F} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^m} \|f(\cdot)-\sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j,\cdot)}\|_{\mathscr{Y}},$$

де $\{k^j\}_{j=1}^m$ – набір векторів $k^j=(k_1^j,\dots,k_d^j)$, $j=\overline{1,m}$, із цілочислової гратки $\mathbb{Z}^d$, c_j – довільні комплексні числа.

Згідно з наведеними означеннями справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} d_m(F,\mathscr{Y}) &\le \lambda_m(F,\mathscr{Y});\\ d_m(F,\mathscr{Y}) &\le d_m^T(F,\mathscr{Y}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

З історією дослідження означених поперечників різноманітних класів періодичних функцій багатьох змінних можна ознайомитися в монографіях [30, 31, 40–42].

Наведемо відоме твердження стосовно колмогоровських поперечників класів $\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}$ у просторі $B_{q,1}$, яке будемо використовувати.

Теорема 3.5. [12,19] *Нехай $1\le p,q,\theta\le\infty$ і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha>\alpha(p,q)$, а також умову (S_l), де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)_+, & 1\le p\le q\le 2 \ \textit{або}\ 1\le q\le p\le\infty,\\ \max\left\{\dfrac{d}{p};\dfrac{d}{2}\right\}, & \textit{в інших випадках.}\end{cases}$$

Тоді для $m\in\mathbb{N}$ справедлива оцінка

$$d_m(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, L_q) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\left(\frac{1}{p}-\max\{\frac{1}{q};\frac{1}{2}\}\right)_+}.$$

Наслідок 3.3. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le q \le 2$ *або* $1 \le q \le p \le \infty$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для* $m \in \mathbb{N}$ *справедливі оцінки*

$$d_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp \lambda_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp d^T_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}. \quad (3.11)$$

Оцінки зверху для кожного з розглянутих в (3.11) поперечників випливають з теорем 3.2, 3.3 за умови, що числа m і n пов'язані співвідношенням $2^{nd} \asymp m$.

Стосовно оцінок знизу в (3.11) зазначимо, що згідно з (3.9) достатньо встановити оцінку знизу для колмогоровського поперечника $d_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1})$, яка, в свою чергу, випливає з теореми 3.5 і співвідношення $\|\cdot\|_{B_{q,1}} \gg \|\cdot\|_q$.

На завершення цього пункту, і роботи вцілому, одержимо точні за порядком оцінки згаданих поперечників і найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}$ у просторі $B_{q,1}$ в одній із ситуацій, де їхні порядки не реалізуються підпростором тригонометричних поліномів з множини $T(C^d(2^n))$.

Теорема 3.6. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > d$, *а також умову* (S_l). *Тоді для* $m \in \mathbb{N}$ *справедливі співвідношення*

$$d_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp \lambda_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp d^T_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Доведення. Спочатку встановимо в (3.12) оцінку зверху для тригонометричного поперечника $d^T_m(\boldsymbol{B}^\omega_{p,\theta}, B_{q,1})$. Як зазначалося вище, її достатньо отримати для класів $\boldsymbol{H}^\omega_p$, тобто для поперечника $d^T_m(\boldsymbol{H}^\omega_p, B_{q,1})$.

Розглянемо спочатку випадок $1 < p < 2$.

Візьмемо довільне $m \in \mathbb{N}$ і підберемо число $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались нерівності $2^{(n-1)d} \le m \le 2^{nd}$, тобто $m \asymp 2^{nd}$.

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ покладемо

$$m_s = \begin{cases} 2^{sd}, & 0 \le s < n, \\ [\omega^{-1}(2^{-n})2^{sd}\omega(2^{-s})] + 1, & n \le s \le n_0, \\ 0, & s > n_0, \end{cases}$$

де $[a]$ – ціла частина числа a і $n_0 = \left[n\frac{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\right] + 1$.

Покажемо, що $\sum\limits_{s=0}^{\infty} m_s \ll m$.

Скориставшись нерівністю (2.8) і врахувавши, що $\alpha > d$ можемо записати

$$\sum_{s=0}^{\infty} m_s \le \sum_{s=0}^{n-1} 2^{sd} + \sum_{s=n}^{n_0} \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{sd} \omega(2^{-s}) + \sum_{s=n}^{n_0} 1$$

$$\ll 2^{nd} + \omega^{-1}(2^{-n}) \sum_{s=n}^{n_0} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-s(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1)$$

$$\le 2^{nd} + \omega^{-1}(2^{-n}) \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{n_0} 2^{-s(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1)$$

$$\ll 2^{nd} + 2^{\alpha n} 2^{-n(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1) \ll 2^{nd} + (n_0 - n + 1)$$

$$= 2^{nd}\left(1 + \frac{n_0 - n + 1}{2^{nd}}\right) \ll 2^{nd} \asymp m.$$

Для продовження міркувань нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 3.1. [45] *Нехай $2 \le q < \infty$. Тоді для будь-якого тригонометричного полінома*

$$P(\Theta_m) := P(\Theta_m, x) = \sum_{j=1}^{m} e^{i(k^j, x)}$$

і будь-якого $n \le m$ знайдеться тригонометричний поліном $\widetilde{P}(\Theta_n) := \widetilde{P}(\Theta_n, x)$, який містить не більше ніж n гармонік і стала $C_7(q) > 0$ такі, що

$$\|P(\Theta_m) - \widetilde{P}(\Theta_n)\|_q \le C_7(q) m n^{-\frac{1}{2}},$$

причому $\Theta_n \subset \Theta_m$, всі коефіцієнти $\widetilde{P}(\Theta_n)$ однакові і не перевищують за абсолютною величиною mn^{-1}.

Отже, позначимо через $\mu(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, множину

$$\mu(s) := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \, 2^{s-1} \le \max_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s\}$$

і розглянемо тригонометричний поліном

$$t_s := t_s(x) = \sum_{k \in \mu(s)} e^{i(k,x)}.$$

Зауважимо, що при кожному $s \in \mathbb{Z}_+$ поліном t_s містить $|\mu(s)|$ доданків і їхня кількість за порядком не перевищує 2^{sd}.

Нехай $t(\Theta_{m_s}) := t(\Theta_{m_s}, x)$ – тригонометричний поліном, який наближає поліном t_s згідно з лемою 3.1, тобто

$$\|t_s - t(\Theta_{m_s})\|_q \ll 2^{sd} m_s^{-\frac{1}{2}},$$

і при цьому $\Theta_{m_s} \subset \mu(s)$.

Побудуємо підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з об'єднання множин $P = \bigcup\limits_{0 \le s \le n} \mu(s)$ і $Q = \bigcup\limits_{n \le s \le n_0} \Theta_{\mu_s}$ і переконаємося, що наближення поліномами з даного підпростору реалізує порядок тригонометричного поперечника $d_m^T(\boldsymbol{H}_p^\omega, L_q)$ при $1 < p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$.

Нехай f – довільна функція із класу $\boldsymbol{H}_p^\omega$. Будемо здійснювати її наближення поліномом з номерами гармонік з $P \cup Q$ вигляду

$$t := t(x) = \sum_{s=0}^{n-1} f_{(s)}(x) + \sum_{s=n}^{n_0} (f_{(s)}(x) * t(\Theta_{m_s}, x)). \tag{3.13}$$

Тоді можемо записати

$$\|f - t\|_{B_{q,1}} \le \left\| \sum_{s=n}^{n_0} \left(f_{(s)} - (f_{(s)} * t(\Theta_{m_s}))\right) \right\|_{B_{q,1}} + \left\| \sum_{s=n_0+1}^{\infty} f_{(s)} \right\|_{B_{q,1}} = J_5 + J_6. \tag{3.14}$$

Оцінимо спочатку доданок J_5.

Скориставшись властивістю згортки і співвідношенням (2.5) будемо мати

$$J_5 = \sum_{s=0}^{\infty} \left\| \sigma_s * \sum_{s'=n}^{n_0} \left(f_{(s')} - (f_{(s')} * t(\Theta_{m_{s'}}))\right) \right\|_q$$

$$= \sum_{s=n-1}^{n_0-1} \left\| \sigma_s * \sum_{s'=s}^{s+1} \left(f_{(s')} - (f_{(s')} * t(\Theta_{m_{s'}}))\right) \right\|_q$$

$$\le \sum_{s=n-1}^{n_0-1} \|\sigma_s\|_1 \left\| \sum_{s'=s}^{s+1} \left(f_{(s')} - (f_{(s')} * t(\Theta_{m_{s'}}))\right) \right\|_q$$

$$\ll \sum_{s=n-1}^{n_0-1} \left\| \sum_{s'=s}^{s+1} \left(f_{(s')} - (f_{(s')} * t(\Theta_{m_{s'}}))\right) \right\|_q$$

$$\ll \sum_{s=n-1}^{n_0} \left\| f_{(s)} - (f_{(s)} * t(\Theta_{m_s})) \right\|_q = J_7. \tag{3.15}$$

Для подальшої оцінки величини J_7 нам знадобиться допоміжне твердження.

Позначимо через T_s оператор, який діє на функцію f наступним чином

$$T_s f := (T_s * f)(x) = f * (t_s - t(\Theta_{m_s})).$$

Лема 3.2. [46] *Нехай* $1 < p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$. *Тоді для норми оператора* T_s, *який діє із* L_p *в* L_q $(\|T_s\|_{p \to q})$ *справедлива оцінка*

$$\|T_s\|_{p\to q} = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|T_s f\|_q \ll 2^{sd} m_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})}, \tag{3.16}$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$.

Отже, скориставшись оцінкою (3.16), врахувавши вибір чисел m_s, і взявши до уваги (2.8), продовжимо оцінку величини J_7

$$J_7 \le \sum_{s=n-1}^{n_0} \|T_s f_{(s)}\|_{p\to q} \, \|f_{(s)}\|_p \ll \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{sd} m_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \|f_{(s)}\|_p$$

$$\ll \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{sd} \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}}(2^{-n}) 2^{-sd(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \omega^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})}(2^{-s}) \|f_{(s)}\|_p$$

$$\le \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}}(2^{-n}) \sum_{s=n-1}^{n_0} \omega^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})}(2^{-s}) \omega(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})}$$

$$= \omega^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}(2^{-n}) \sum_{s=n-1}^{n_0} \omega^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$$

$$= \omega^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}(2^{-n}) \sum_{s=n-1}^{n_0} \left(\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} 2^{-s(\alpha-d)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$$

$$\le \omega^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}(2^{-n}) \left(\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{-s(\alpha-d)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} 2^{-n(\alpha-d)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.17}$$

Співставивши (3.15) і (3.17) можемо записати

$$J_5 \ll \omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 < p < 2. \tag{3.18}$$

Розглянемо тепер випадок $p = 1$.

Нехай p_0 – число, яке задовольняє умову $1 < p_0 < 2$. Його значення уточнимо в ході подальших міркувань.

Тоді для величини J_7 будемо мати

$$J_7 \leq \sum_{s=n-1}^{n_0} \|T_s f_{(s)}\|_{p_0 \to q} \|f_{(s)}\|_{p_0}$$

$$\ll \sum_{s=n-1}^{n_0} \|T_s\|_{p_0 \to q} \|\sigma_s(f)\|_{p_0} \ll \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{sd} m_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'})} \|\sigma_s(f)\|_{p_0}. \tag{3.19}$$

Далі застосувавши до $\|\sigma_s(f)\|_{p_0}$ нерівність різних метрик (теорема 2.2), підставивши замість m_s їхні значення та врахувавши, що для $f \in \boldsymbol{H}_1^\omega$ виконується співвідношення $\|\sigma_s(f)\|_1 \ll \omega(2^{-s})$, продовжимо оцінку (3.19)

$$J_7 \ll \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{sd} m_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'})} 2^{sd(1-\frac{1}{p_0})} \|\sigma_s(f)\|_1$$

$$\leq \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{sd} \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'}}(2^{-n}) 2^{-sd(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'})} \omega^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'})}(2^{-s}) 2^{sd(1-\frac{1}{p_0})} \|\sigma_s(f)\|_1$$

$$\ll \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'}}(2^{-n}) \sum_{s=n-1}^{n_0} \omega^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0'}}(2^{-s}) 2^{\frac{sd}{2}}$$

$$= \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'}}(2^{-n}) \sum_{s=n-1}^{n_0} \left(\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0'}} 2^{-\frac{s}{2}(\alpha-\frac{2\alpha}{p_0'}-d)}$$

$$\leq \omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p_0'}}(2^{-n}) \left(\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0'}} \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{-\frac{s}{2}(\alpha-\frac{2\alpha}{p_0'}-d)}$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0'})} \sum_{s=n-1}^{n_0} 2^{-\frac{s}{2}(\alpha-\frac{2\alpha}{p_0'}-d)}. \tag{3.20}$$

Тепер підберемо число p_0 з умови $\alpha - \frac{2\alpha}{p_0'} - d > 0$ (це можливо, оскільки $\alpha > d$).

Тоді оцінка (3.20) набуде вигляду

$$J_7 \ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0'})} 2^{-n(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{p_0'}-\frac{d}{2})}$$
$$= \omega(2^{-n}) 2^{\frac{nd}{2}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Співставивши (3.15), (3.19)–(3.21) одержимо

$$J_5 \ll \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

при $p = 1$.

Переходячи до оцінки доданка J_6 зауважимо наступне. Провівши міркування аналогічні до тих, які використовувалися при доведенні оцінки зверху в теоремі 2.3 (див. випадок $1 \le p < q \le \infty$) можемо записати для $s > n_0 > n$

$$J_6 = \Big\| \sum_{s=n_0+1}^{\infty} f_{(s)} \Big\|_{B_{q,1}} \ll \sum_{s=n_0+1}^{\infty} \omega(2^{-s}) 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

$$= \sum_{s=n_0+1}^{\infty} \frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-sd(\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \le \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n_0+1}^{\infty} 2^{-sd(\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n_0 d(\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \le \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n \frac{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d(\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$$

$$= \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-nd(\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} = \omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Таким чином, згідно (3.14), (3.17), (3.22) і (3.23) приходимо до шуканої оцінки зверху тригонометричного поперечника $d_m^T(\boldsymbol{H}_p^{\omega}, B_{q,1})$, а отже, як наслідок, і оцінки

$$d_m^T(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, B_{q,1}) \ll \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \ 1 \le \theta \le \infty. \quad (3.24)$$

Взявши до уваги співвідношення (3.10) і скориставшись (3.24) отримаємо оцінку зверху для колмогоровського поперечника $d_m(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, B_{q,1})$:

$$d_m(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, B_{q,1}) \le d_m^T(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, B_{q,1}) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Стосовно оцінки зверху лінійного поперечника $\lambda_m(\boldsymbol{B}_{p,\theta}^{\omega}, B_{q,1})$ зазначимо наступне.

Вище при встановленні оцінки зверху тригонометричного поперечника $d_m^T(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}, B_{q,1})$ нами фактично використовувався лінійний оператор Λ_m, який діяв на функцію $f \in \boldsymbol{H}^{\omega}_p$ за формулою

$$\Lambda_m f := (\Lambda_m f)(x) := \sum_{s=0}^{n-1} f_{(s)}(x) + \sum_{s=n}^{n_0} (t(\theta_{m_s}, x) * f_{(s)}(x)).$$

З огляду на цю обставину можна стверджувати, що оцінка зверху для лінійного поперечника $\lambda_m(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}, B_{q,1})$ має вигляд оцінки (3.24), тобто

$$\lambda_m(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}, B_{q,1}) \ll \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Отже, оцінки зверху для всіх апроксимаційних характеристик розглянутих в теоремі 3.6 доведені.

Щодо оцінок знизу в (3.12) зауважимо, що для їх встановлення достатньо отримати відповідну оцінку колмогоровського поперечника $d_m(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}, B_{q,1})$, яка є наслідком теореми 3.5 і співвідношення $\|\cdot\|_q \ll \|\cdot\|_{B_{q,1}}$. □

Наслідок 3.4. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > d$, *а також умову* (S_l). *Тоді для* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$e_m(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.25}$$

Оцінка зверху в (3.25) випливає з (3.12) і нерівності

$$e_m(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \le d_m^T(\boldsymbol{B}^{\omega}_{p,\theta}, B_{q,1}) \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Відповідна оцінка знизу є наслідком теореми 3.4 і співвідношення $\|\cdot\|_q \ll \|\cdot\|_{B_{q,1}}$.

Література

[1] Темляков, В.Н. (1989). Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 189*, 138–168.

[2] Кашин, Б.С.,Темляков, В.Н. (1994). О наилучших m - членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1. *Мат. заметки, 56*(5), 57–86.

[3] Belinsky, E.S. (1998). Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative. *J. Approxim. Theory, 93*, 114–127.

[4] Романюк, А.С. (2016). Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 68*(10), 1403–1417.

[5] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Укр. мат. журн., 71*(2), 271–278.

[6] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2019). Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 71*(8), 1102–1115.

[7] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2020). Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського–Бєсова. *Укр. мат. вісн., 17*(3), 372–395.

[8] Романюк, А.С., Янченко, С.Я. (2021). Оцінки апроксимаційних характеристик і властивості операторів найкращого наближення класів періодичних функцій у просторі $B_{1,1}$. *Укр. мат. журн., 73*(8), 1102–1119.

[9] Гембарський, М.В., Гембарська, С.Б. (2018). Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$. *Укр. мат. вісн., 15*(1), 43–57.

[10] Hembarskyi, M.V., Hembarska, S.B., Solich, K.V. (2019). Найкращі наближення і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. *Матем. студії, 51*(1), 74–85.

[11] Fedunyk-Yaremchuk, O.V., Hembarskyi, M.V., Hembarska, S.B. (2020). Approximative characteristics of the Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions in the space $B_{\infty,1}$. *Carpathian Math. Publ., 12*(2), 376–391.

[12] Guiqiao Xu. (2005). The n - widhts for a generalized periodic Besov classes. *Acta Math. Sci., 25*(4), 663–671.

[13] Романюк, А.С. (2008). Приближение изотропных классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 5*(1), 263–278.

[14] Романюк, А.С. (2009). Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 61*(4), 513–523.

[15] Войтенко, С.П. (2009). Найкращі M - членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 61*(9), 1189–1199.

[16] Войтенко, С.П. (2009). Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 61*(11), 1473–1484.

[17] Стасюк, С.А. (2011). Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях. *Матем. студії, 35*(1), 66–73.

[18] Дерев'янко, Н.В. (2012). Тригонометричні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 64*(8), 1041–1052.

[19] Соліч, К.В. (2012). Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн., 64*(8), 1041–1052.

[20] Бари, Н.К., Стечкин, С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва, 5*, 483–522.

[21] Бесов, О.В. (1961). Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. *Тр. мат. ин-та АН СССР, 60*, 42–61.

[22] Никольский, С.М. (1951). Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР, 38*, 244–278.

[23] Yongping Liu, Guiqiao Xu. (2002). The infinite - dimensional widhts and optimal recovery of generalized Besov classes. *J. Complexity, 18*(3), 815–832.

[24] Белинский, Э.С. (1988). Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной. *Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярослав. ун-т,* 16–33.

[25] Романюк, А.С. (2002). Приближение классов периодических функций многих переменных. *Мат. заметки, 71*(1), 109–121.

[26] Романюк, А.С. (2006). Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Изв. РАН. Сер.мат., 70*(2), 69–98.

[27] Романюк, А.С. (2007). Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике. *Мат. заметки, 82*(2), 247–261.

[28] Романюк, А.С. (2013). Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных. *Мат. заметки, 94*(3), 379–391.

[29] Сердюк, А.С., Степанюк, Т.А. (2015). Порядкові оцінки найкращих тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості. *Укр. мат. журн., 67*(7), 916–936.

[30] Романюк, А.С. (2012). Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. *Пр.Ін-ту математики НАН України, 93*, 352 с.

[31] Temlyakov, V.N. (1993). *Approximation of periodic functions.* New York, Nova Sc. Publ., Inc.

[32] Гембарська, С.Б., Задерей, П.В. (2022). Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій у просторі $B_{\infty,1}$. *Укр. мат. журн., 74*(6), 784–795.

[33] Fedunyk-Yaremchuk, O.V., Hembars'ka, S.B. (2022). Best orthogo-nal trigonometric approximations of the Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions of one and several variables. *Carpathian Math. Publ., 14*(1), 171–184.

[34] Romanyuk, A.S., Romanyuk, V.S., Pozhars'ka, K.V., Hembars'ka, S.B. (2023). Characteristics of linear and nonlinear approximation of isotropic classes of periodic multivariate functions. *Carpathian Math. Publ., 15* (1), 78–94.

[35] Романюк, А.С., Янченко, С.Я. (2022). Наближення класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних з просторів Нікольського–Бєсова та Соболєва. *Укр. мат. журн., 74*(6), 844–855.

[36] Стечкин, С.Б. (1955). Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. *Докл. АН СССР, 102*(1), 37–40.

[37] Исмагилов, Р.С. (1974). Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. *Успехи. мат. наук, 29*(3), 161–178.

[38] De Vore, R.A., Temlyakov, V.N. (1995). Nonlinear approximation by trigonometric sums. *J. Fourier Anal. Appl., 2*(2), 29–40.

[39] Романюк, А.С. (2003). Наилучшие M - членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных. *Изв. РАН. Сер. мат., 67*(2), 61–100.

[40] Trigub, R.M., Belinsky, E.S. (2004). *Fourier Analysis and Approximation of Functions.* Kluwer Academic Publishers.

[41] Temlyakov, V.N. (2018). *Multivariate approximation.* Cambridge University Press.

[42] Dũng, D., Temlyakov, V., Ullrich, T. (2019). *Hyperbolic cross approximation.* Adv. Courses Math. Birkhäuser, CRM Barselona.

[43] Kolmogorov, A.N. (1936). Über die beste Annäherung von Funkctionen einer Funktionenklasse. *Ann. Math., 37*, 107–111.

[44] Тихомиров, В.М. (1960). Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. *Успехи. мат. наук, 15*(3), 81–120.

[45] Белинский, Э.С., Галеев, Э.М. (1991). О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник. *Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех.* (2), 3–7.

[46] Романюк, А.С., Романюк, В.С. (2009). Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных. *Укр. мат. журн., 61*(10), 1348–1366.

Відомості про авторів

Світлана Борисівна Гембарська
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: gembarskaya72@gmail.com

Ігор Анатолійович Романюк
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: iromaniuk@ukr.net

Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: fedunyk.o.v@gmail.com