Український математичний вісник
Том 20 **(2023)**, № 2, 186 – 202
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-2-2

Наближення неперервних функцій, заданих на дійсній осі, тригармонійними операторами Пуассона

Уляна З. Грабова, Інна В. Кальчук

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Вивчаються апроксимативні властивості тригармонійних операторів Пуассона на класах (ψ,β)-диференційовних функцій малої гладкості, заданих на дійсній осі. Одержано асимптотичні рівності, які в деяких випадках забезпечують розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних операторів Пуассона $P_{3,\sigma}(f;x)$ на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\beta\in\mathbb{R}$, в рівномірній метриці.

2010 MSC. 42A05, 41A60.

Ключові слова та фрази. Тригармонійний оператор Пуассона, (ψ,β)-похідна, задача Колмогорова–Нікольського.

1. Постановка задачі та деякі історичні відомості

Нехай $\widehat{L}_p$, $1\le p\le\infty$, – простір локально сумовних функцій із скінченною нормою

$$\|f\|_{\widehat{p}}=\begin{cases}\sup\limits_{a\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{a}^{a+2\pi}|f(t)|^p\right)^{1/p}dt, & 1\le p<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t}|f(t)|, & p=\infty,\end{cases}$$

а $\widehat{C}$ – простір неперервних, заданих на дійсній осі функцій із скінченною нормою

$$\|f\|_{\widehat{C}}=\max_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|.$$

Нехай, далі, $\psi(v)$ – неперервна при всіх $v\ge0$ функція і β – фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t\in\mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}_{\beta}(t)=\widehat{\psi}(t;\beta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})dv,\ \beta\in\mathbb{R}. \qquad (1.1)$$

Стаття надійшла в редакцію 03.03.2023

Через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ (див. [1, с. 168]) позначимо множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображаються згорткою

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\,(x+t)\,\widehat{\psi}_{\beta}(t)dt = A_0 + \left(\varphi * \widehat{\psi}_{\beta}\right)(x), \qquad (1.2)$$

де A_0 – деяка стала і $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N} \subset \widehat{L}_1$, то будемо записувати, що $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ та $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають відповідно через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}$ та $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Кожну функцію еквівалентну $\varphi(\cdot)$ у співвідношенні (1.2) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

У роботі [1, с. 169] встановлено зв'язок між множинами $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і відповідними множинами 2π-періодичних функцій L^{ψ}_{β}, які раніше введено О.І. Степанцем (див. [2]). Зокрема, показано, що якщо $\psi(v)$ – неперервна при всіх $v \geq 0$ функція, $\beta \in \mathbb{R}$ і перетворення $\widehat{\psi}_{\beta}(t)$ виду (1.1) є сумовним на всій дійсній осі, то

$$\widehat{L}^{\psi}_{\beta}L^0_1 = L^{\psi}_{\beta}, \quad \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}, \quad \widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subset L^0_1,$$

де L^0_1 – підмножина функцій $\varphi(\cdot) \in L_1$, для яких $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0$.

Через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ прийнято позначати множину функцій $f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору $\widehat{L}_{\infty}$, тобто $\mathfrak{N} = \widehat{S}_{\infty} = \{\varphi \in \widehat{L}_{\infty} : \|\varphi\|_{\widehat{\infty}} \leq 1\}$, а через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ – множину функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору $\widehat{L}_p$, тобто $\mathfrak{N} = \widehat{S}_p = \{\varphi \in \widehat{L}_p : \|\varphi\|_{\widehat{p}} \leq 1\}, 1 \leq \widehat{p} < \infty$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_{\sigma}\big(\frac{v}{\sigma}\big)\}$ – сукупність функцій, неперервних при $v \geq 0$, що залежить від дійсного параметра σ. Кожній функції $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ поставимо у відповідність вираз вигляду

$$U_{\sigma}(\Lambda) = U_{\sigma}(f, x, \Lambda)$$

$$= A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \psi(v)\lambda_{\sigma}\big(\frac{v}{\sigma}\big)\cos\Big(vt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\,dt, \sigma > 0, \quad (1.3)$$

що означає формулу підсумовування для інтегралу (1.2).

Якщо

$$\lambda_{\sigma}\big(\frac{v}{\sigma}\big) = \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\sigma}})(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}})\big(\frac{v}{\sigma}\big) + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}})\big(\frac{v}{\sigma}\big)^2\Big)e^{-\frac{v}{\sigma}},$$

то вираз (1.3) називають тригармонійним оператором Пуассона та позначають через $P_{3,\sigma}(f,x)$. В даній роботі такі оператори розглядаються в ролі агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$.

Застосовуючи міркування твердження 1.1 роботи [1, с. 169] неважко переконатися, що якщо функція f є 2π-періодичною, то $P_{3,\sigma}(f;x)$ співпадають із відомими тригармонійними інтегралами Пуассона (див, наприклад, [3]).

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину неперервних опуклих донизу при всіх $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Оскільки функції з множини $\mathfrak{M}$ неоднорідні за швидкістю спадання до нуля, то з цієї множини, згідно з О.І. Степанцем, виділимо підмножину функцій ψ

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu\left(\psi; t\right) \leq K,\ \forall t \geq 1\right\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \eta\left(\psi;t\right) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, а K – деяка стала, яка, можливо, залежить від ψ.

Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0,1)$ так, щоб отримана функція була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(t) = \psi'(t+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0,\infty)$. Множину таких функцій позначають через $\mathfrak{A}$.

Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$, позначають через $\mathfrak{A}'$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$ і при цьому на інтервалі $[1,\infty)$ $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то будемо вважати, що $\psi \in \mathfrak{A}_0$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то, як показано в [1, с.194], перетворення $\widehat{\psi}_\beta(t)$ є сумовним на всій дійсній осі, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}_\beta(t)| dt < \infty.$$

Розглянемо точні верхні межі відхилень величин $U_\sigma(\Lambda)$ в метриці простору $\widehat{X}$ ($\widehat{X} = \widehat{C}$ або $\widehat{X} = \widehat{L}_p$) від функцій f з класів $\mathfrak{N} \subset \widehat{X}$, тобто наступні величини:

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}, U_\sigma(\Lambda)\right)_{\widehat{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - U_\sigma(f,\cdot)\right\|_{\widehat{X}}. \tag{1.4}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\sigma) = \varphi(\mathfrak{N};\sigma)$ таку, що $\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; U_\sigma\right)_{\widehat{X}} = \varphi\left(\sigma\right) + o\left(\varphi\left(\sigma\right)\right)$ при $\sigma \to \infty$, то, наслідуючи О.І. Степанця [2, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ та оператора U_σ в метриці простору $\widehat{X}$.

В роботі розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для оператора $P_{3,\sigma}(f;x)$ на класі $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ в метриці простору $\widehat{C}$, тобто знайдено асимптотичні рівності для величин

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{3,\sigma}\right)_{\widehat{C}} = \sup_{f\in\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - P_{3,\sigma}(f;\cdot)\|_{\widehat{C}} \tag{1.5}$$

при $\sigma \to \infty$ і $\psi \in \mathfrak{A}_0$.

Властивості класів $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та поведінка верхніх меж відхилень операторів Фур'є F_σ досліджувалась в роботах [4, 5].

Дослідження поведінки величин (1.4) у випадку, коли агрегатами наближення $U_\sigma(\Lambda)$ є інтегральні аналоги поліноміальних операторів, що породжуються λ-методами підсумовування рядів Фур'є, а саме, оператори Зигмунда, Стєклова, Рогозинського на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ в рівномірній та інтегральній метриках, вивчалась в роботах [6–8]. Узагальненню цих результатів на інші подібні агрегати апроксимації, зокрема оператори Валле Пуссена, присвячено роботи [9–11], де в якості об'єкта дослідження виступали класи $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ в метриках просторів $\widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$.

Що стосується операторів, які породжуються λ-методами, означеними сукупністю $\Lambda = \{\lambda_\sigma(\cdot)\}$ неперервних на $[0,\infty)$ функцій, залежних від дійсного параметра σ, то тут відмітимо роботи, пов'язані із розв'язанням задачі Колмогорова–Нікольського на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ для операторів Абеля–Пуассона [13, 14], бігармонійних операторів Пуассона [15, 16] та операторів Вейєрштрасса [17].

Апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах періодичних функцій вивчались в роботах [18–23].

На класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ розв'язку задачі Колмогорова–Нікольського по наближенню тригармонійними операторами Пуассона в рівномірній метриці знайдено не було. Тому дослідження по розв'язанню вказаної задачі, з виявленням її особливостей є актуальним.

Зауважимо, що використання інтегралів Пуассона є ефективним та перспективним методом створення математичної моделі, що описує закономірності формування і розвитку явищ в теорії гармонічних функцій [24–27].

2. Наближення класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ тригармонійними інтегралами Пуассона

Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v,\psi) = \left(1 - \left(1 + \gamma v + \theta v^2\right) e^{-v}\right) \frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad v \ge 0, \tag{2.1}$$

де $\gamma = \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\sigma}})(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}})\sigma$, $\theta = \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}})^2\sigma^2$, функція $\psi(v)$ визначена і неперервна для всіх $v \geq 0$. Надалі будемо вважати, що $\psi(v)$ є монотонно зростаючою, опуклою донизу на $[0,1]$ і має неперервну другу похідну при всіх $v \geq 0$ за виключенням точки $v = 1$. Множину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ або $\psi \in \mathfrak{A}_0$, що мають вказані вище властивості позначимо відповідно через $\mathfrak{A}^*$ або $\mathfrak{A}_0^*$.

Доведення теореми 1 базується на наступній лемі.

Лема (В. І. Рукасов [9, с. 684]. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}'$, $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_\sigma \in \Lambda$, *функції*

$$\tau_\sigma(v) = (1 - \lambda_\sigma(v))\psi(v), \ v \geq 0,$$

неперервні, а інтеграли

$$A(\tau_\sigma) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{0}^{\infty} \tau_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt \tag{2.2}$$

збіжні. Тоді

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; U_\sigma\right)_{\widehat{C}} = A(\tau_\sigma). \tag{2.3}$$

Домовимося далі через K, $K_i, i = 1, 2, ...$, позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Справедливе твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0^* \cap \mathfrak{A}'$, *функція* $g(v) = v^3\psi(v)$ *опукла догори або донизу на* $[b, \infty)$, $b \geq 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; P_{3,\sigma})_{\hat{C}} = \psi(\sigma) A(\tau_\sigma), \tag{2.4}$$

де інтеграл $A(\tau_\sigma)$ *визначається формулою* (2.2) *і для нього справедлива оцінка*

$$A(\tau_\sigma) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{6\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^\sigma v^2\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi(v)}{v}dv\right)$$

$$+O\left(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^\sigma v\psi(v)dv\right). \tag{2.5}$$

Доведення. Як випливає з леми В.І. Рукасова, рівність (2.3) виконується тоді, коли інтеграл $A(\tau_\sigma)$, що визначається формулою (2.2), збіжний.

Доведення збіжності інтеграла (2.2) базується на наступному твердженні роботи [28].

Означення 1. *Нехай функція* $\tau(v)$ *задана на* $[0,\infty)$, *абсолютно неперервна і* $\tau(\infty)=0$. *Кажуть, що функція* $\tau(v)\in\mathcal{E}_a$, *якщо похідну* $\tau'(v)$ *в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб для деякого* $a\geq 0$ *існували інтеграли* $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} v|d\tau'(v)|$, $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty}|v-a||d\tau'(v)|$.

Твердження А. (Л.І. Баусов). *Нехай* $\tau(v)\in\mathcal{E}_a$ *і* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(0)=0$. *Тоді для збіжності інтеграла* $A(\tau)$, *що задається рівністю* (2.2), *необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv,\ \int\limits_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv.$$

Якщо $\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv\geq\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv$, *то*

$$\left|A(\tau)-\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv\right|$$

$$\leq K\Bigg(\int\limits_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv+H(\tau)\Bigg). \tag{2.6}$$

А якщо $\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv\leq\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv$, *то*

$$\left|A(\tau)-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}dv\right|$$

$$\leq K\Bigg(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}dv+H(\tau)\Bigg), \tag{2.7}$$

де

$$H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(a)|+\int\limits_0^{\frac{a}{2}}v\left|d\tau'(v)\right|+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty}|v-a|\left|d\tau'(v)\right|. \tag{2.8}$$

Таким чином, згідно з твердженням А, переконаємося в збіжності наступних інтегралів:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}v\left|d\tau'(v)\right|, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1| \left|d\tau'(v)\right|, \tag{2.10}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\tau(v)|}{v} dv, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v} dv, \tag{2.12}$$

де $\tau(v)$ – неперервна при всіх $v \geq 0$ функція вигляду (2.1).

Оцінимо інтеграл (2.9). Для цього розіб'ємо відрізок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}\right]$ $(\sigma > 2b)$. Враховуючи, що $\tau''(v) \geq 0$ при $v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$, а також нерівності

$$e^{-v} \leq 1, \quad e^{-v} \leq 1 - v + \frac{v^2}{2}, \quad v \geq 0, \tag{2.13}$$

отримуємо співвідношення

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} v \left|d\tau'(v)\right| = \big(v\tau'(v) - \tau(v)\big)\Big|_{0}^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$= \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\left(\frac{1}{\sigma}\Big(1-\gamma+\frac{1}{\sigma}(\gamma-2\theta)+\frac{\theta}{\sigma^2}\Big)e^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 + e^{-\frac{1}{\sigma}} + \frac{\gamma}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}} + \frac{\theta}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{\sigma}}\right)$$

$$+\frac{\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)}\left(1-\big(1+\frac{\gamma}{\sigma}+\frac{\theta}{\sigma^2}\big)\right)e^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\left(\frac{1}{\sigma^2}(\frac{1}{2}-\theta)+\frac{1}{\sigma^3}(\frac{\gamma}{2}+\theta)\right) + \frac{\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)}\left(1-\big(1+\frac{\gamma}{\sigma}+\frac{\theta}{\sigma^2}\big)\right)e^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Враховуючи оцінки $\frac{1}{2} - \theta \leq \frac{1}{\sigma}$, $\quad \frac{\gamma}{2} + \theta \leq \frac{3}{2}$, та нерівність

$$1 - e^{-v} - \gamma v e^{-v} - \theta v^2 e^{-v} \leq \frac{2}{\sigma^2}v + \frac{2}{\sigma}v^2 + v^3, \quad v \geq 0, \tag{2.14}$$

одержуємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} v \left|d\tau'(v)\right| = O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\right), \ \sigma \to \infty. \tag{2.15}$$

Як випливає із рівностей (2.20), (2.21) та (2.23) роботи [29], при $v \in \left[\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{2}\right]$ справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{2}} v|d\tau'(v)| = O\biggl(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv\biggr),\ \sigma \to \infty. \tag{2.16}$$

Об'єднуючи співвідношення (2.15) та (2.16), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v|d\tau'(v)| = O\biggl(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv\biggr),\ \sigma \to \infty. \tag{2.17}$$

Аналогічно, враховуючи (2.30) із [29], встановлюємо оцінку інтеграла (2.10):

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\tau'(v)| = O(1),\ \sigma \to \infty. \tag{2.18}$$

Для оцінки інтеграла (2.11) розіб'ємо проміжок інтегрування $[0,\infty)$ на дві частини: $[0, \frac{1}{\sigma}]$, $[\frac{1}{\sigma}, \infty)$.

Враховуючи формулу (2.1), нерівності (2.14) та властивості функції $\psi(v)$ ($\psi(v)$ монотонно зростає на $[0,1]$), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(v)|}{v}dv = \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} (1 - e^{-v} - \gamma v e^{-v} - \theta v^2 e^{-v})\psi(\sigma v)\frac{dv}{v}$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma}v + v^2\right)dv \leq \frac{K}{\sigma^3\psi(\sigma)}. \tag{2.19}$$

Тоді, враховуючи (2.19) та оцінки (2.33) та (2.35) роботи [29], матимемо

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(v)|}{v}dv = \frac{1}{6\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma} v^2\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}dv$$

$$+O\biggl(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv\biggr),\ \sigma \to \infty. \tag{2.20}$$

Доведення збіжності інтеграла (2.12) проведемо за схемою, запропонованою в роботі [13]. Із співвідношення (2.1) знаходимо

$$\tau(1-v) = \big(1 - (1+\gamma(1-v)+\theta(1-v)^2)e^{-(1-v}\big)\frac{\psi((\sigma(1-v))}{\psi(\sigma)}, \quad v \leq 1, \tag{2.21}$$

$$\tau(1+v) = \big(1 - (1+\gamma(1+v)+\theta(1+v)^2)e^{-(1+v}\big)\frac{\psi((\sigma(1+v))}{\psi(\sigma)}, \quad v \geq -1. \tag{2.22}$$

Запишемо інтеграл (2.11) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_0^1 \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv$$

$$= \int_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv + \int_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv. \tag{2.23}$$

Оцінимо перший доданок із правої частини (2.23). З цією метою додамо і віднімемо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\big(1+\gamma(1-v)+\theta(1-v)^2\big)e^{-(1-v)} - \big(1+\gamma(1+v)+\theta(1+v)^2\big)e^{-(1+v)},$$

внаслідок чого одержимо

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv \leq \int_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |e^{-1+v} - e^{-1-v}$$

$$+\gamma(1-v)e^{-1+v} - \gamma(1+v)e^{-1-v} + \theta(1-v)^2e^{-1+v} - \theta(1+v)^2e^{-1-v}|\frac{dv}{v}$$

$$+ \int_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1-v)-\tau(1+v)+e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}-\gamma(1+v)e^{-1-v}$$

$$+\theta(1-v)^2e^{-1+v} - \theta(1+v)^2e^{-1-v}|\frac{dv}{v}. \tag{2.24}$$

Для першого інтеграла із (2.24) очевидна оцінка

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |e^{-1+v} - e^{-1-v} + \gamma(1-v)e^{-1+v}$$

$$-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}|\frac{dv}{v}=O(1). \quad (2.25)$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з правої частини рівності (2.24). Згідно з (2.21) і (2.22), справедливі співвідношення

$$\big(1+\gamma(1-v)+\theta(1-v)^2\big)e^{-(1-v)}=1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\tau(1-v), \ \ v\le 1, \quad (2.26)$$

$$\big(1+\gamma(1+v)+\theta(1+v)^2\big)e^{-(1+v)}=1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\tau(1+v), \ \ v\ge -1. \quad (2.27)$$

Тому

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\big|\tau(1-v)-\tau(1+v)+e^{-1+v}-e^{-1-v}$$

$$+\gamma(1-v)e^{-1+v}-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\big|\frac{dv}{v}$$

$$\le\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\big|\tau(1-v)\big|\Big|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\Big|\frac{dv}{v}+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\big|\tau(1+v)\big|\Big|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\Big|\frac{dv}{v}. \quad (2.28)$$

Далі нам необхідне наступне твердження.

Твердження В. (Л. І. Баусов [28]). *Якщо* $\tau(v)\in\mathcal{E}_a$, *то*

$$|\tau(v)|\le H(\tau),$$

де величина $H(\tau)$ *визначається рівністю* (2.8).

Оскільки з урахуванням оцінок (2.17) та (2.18) переконуємося, що функція $\tau(v)\in\mathcal{E}_1$, то, враховуючи твердження В, маємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}|\tau(1-v)|\left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\right|\frac{dv}{v}+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}|\tau(1+v)|\left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\right|\frac{dv}{v}$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\frac{|\psi(\sigma(1-v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1-v))}dv+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\frac{|\psi(\sigma(1+v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1+v))}dv\right). \quad (2.29)$$

Використовуючи міркування наведені при оцінюванні інтегралів (28) та (29) роботи [13] одержимо, що при $\sigma \to \infty$

$$I_{1,\sigma} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1-v)) - \psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1-v))} dv = O(1), \tag{2.30}$$

$$I_{2,\sigma} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1+v)) - \psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1+v))} dv = O(1), \tag{2.31}$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по σ.

Поєднуючи (2.24)–(2.31), при $\sigma \to \infty$ отримуємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1-v) - \tau(1+v) + e^{-1+v} - e^{-1-v}$$

$$\leq \gamma(1-v)e^{-1+v} - \gamma(1+v)e^{-1-v} + \theta(1-v)^2 e^{-1+v} - \theta(1+v)^2 e^{-1-v}| \frac{dv}{v}$$

$$= H(\tau)O(1). \tag{2.32}$$

Згідно з (2.17), (2.18) для величини $H(\tau)$, що означається рівністю (2.8), справедлива оцінка

$$H(\tau) = O\biggl(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)} \int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv\biggr), \ \sigma \to \infty. \tag{2.33}$$

Із (2.24), враховуючи оцінки (2.25), (2.32) та (2.33) маємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv = O\biggl(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)} \int\limits_1^{\sigma} v\psi(v)dv\biggr), \ \sigma \to \infty. \tag{2.34}$$

Оцінимо другий інтеграл із (2.23). Для цього віднімемо і додамо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\frac{\psi(\sigma(1-v))}{\psi(1)} \times$$

$$\times \Bigl(\bigl(1 + \gamma(1-v) + \theta(1-v)^2\bigr)e^{-(1-v)} - \bigl(1 + \gamma(1+v) + \theta(1+v)^2\bigr)e^{-(1+v)}\Bigr).$$

Враховуючи монотонне спадання на $\left[1-\frac{1}{\sigma},1\right]$ функції $\psi\left(\sigma(1-v)\right)$, одержимо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}|\tau(1-v)-\tau(1+v)|\frac{dv}{v}\le\frac{1}{\psi(1)}\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\psi\left(\sigma(1-v)\right)\Big|e^{-1+v}-e^{-1-v}$$

$$+\gamma(1-v)e^{-1+v}-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big|\frac{dv}{v}$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\Big|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\Big(e^{-1+v}-e^{-1-v}$$

$$+\gamma(1-v)e^{-1+v}-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big)\Big|\frac{dv}{v}$$

$$\le\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\Big|e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}-\gamma(1+v)e^{-1-v}$$

$$+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big|\frac{dv}{v}$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\Big|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\Big(e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}$$

$$-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big)\Big|\frac{dv}{v}. \qquad (2.35)$$

Очевидно, що має місце оцінка

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}|e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}$$

$$-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}|\frac{dv}{v}=O(1). \quad (2.36)$$

Враховуючи співвідношення (2.26) та (2.27), а також твердження B, отримаємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\Big|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\Big(e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}$$

$$-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big)\Big|\frac{dv}{v}$$

$$=H(\tau)O\Bigg(\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\left|1-\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)\psi(\sigma)}{\psi(1)\psi\left(\sigma(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}\Bigg), \tag{2.37}$$

де $H\left(\tau\right)$ означається рівністю (2.8). Тоді, враховуючи оцінки (34) і (35) роботи [13], одержимо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\Big|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\Big(e^{-1+v}-e^{-1-v}+\gamma(1-v)e^{-1+v}$$

$$-\gamma(1+v)e^{-1-v}+\theta(1-v)^2e^{-1+v}-\theta(1+v)^2e^{-1-v}\Big)\Big|\frac{dv}{v}$$

$$=H(\tau)O(1),\ \sigma\to\infty. \tag{2.38}$$

Враховуючи (2.36), (2.38), а також оцінки інтегралів (2.17), (2.18) отримуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv=O\Bigg(1+\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv\Bigg). \tag{2.39}$$

З рівності (2.23), поєднуючи (2.34) та (2.39) одержимо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv=O\Bigg(1+\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v\psi(v)dv\Bigg),\ \sigma\to\infty. \tag{2.40}$$

Таким чином, застосовуючи твердження A, приходимо до висновку, що перетворення $\widehat{\tau}_\beta(t)$ функції $\tau(v)$, заданої формулою (2.1), сумовне на всій числовій осі. Із нерівностей (2.6) і (2.7), з урахуванням формул (2.17), (2.18), (2.20) і (2.40), отримуємо оцінку величини $A(\tau_\sigma)$, що визначається формулою (2.4). Теорему доведено. $\square$

Використовуючи методи доведення, що використані в роботах [29, 30], неважко переконатись в справедливості наступних наслідків.

Наслідок 2.1. *Якщо виконуються умови теореми 2.1,* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, *де* $\alpha(t)=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, *то при* $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};P_{3,\sigma})_{\hat{C}}=\frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv+O\left(\psi(\sigma)\right). \tag{2.41}$$

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 2.1 є функції $\psi\in\mathfrak{A}^*$, які на проміжку $[1,\infty)$ мають вигляд $\psi(v)=\frac{1}{\ln^{\alpha}(v+K)}$, де $\alpha>1,\ K>0$.

Наслідок 2.2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{A}^*_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $v^3\psi(v)$ *опукла догори або донизу на* $[b,\infty), b\geq 1$, *існує* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)$, *де* $\alpha(t)=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, *і*

$$\lim_{v\to\infty}v^3\psi(v)=\infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_{1}^{\sigma}v^2\psi(v)du=\infty,$$

тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};P_{3,\sigma})_{\hat{C}}=\frac{1}{3\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{1}^{\sigma}v^2\psi(v)dv+O\left(\psi(\sigma)\right). \tag{2.42}$$

Відмітимо, що умови наслідку 2.2 задовольняють, наприклад, функції $\psi\in\mathfrak{A}^*$, які при $v\geq 1$ мають вигляд $\psi(v)=\frac{1}{v^3}\ln^{\alpha}(v+K)$, $K>0,\ \alpha>0$.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{A}^*_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $v^3\psi(v)$ *опукла донизу на* $[b,\infty), b\geq 1$, *і*

$$\lim_{v\to\infty}v^3\psi(v)=K<\infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_{1}^{\sigma}v^2\psi(v)dv=\infty,$$

тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};P_{3,\sigma})_{\hat{C}}=\frac{1}{3\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{1}^{\sigma}v^2\psi(v)dv+O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right). \tag{2.43}$$

Прикладом функцій $\psi \in \mathfrak{A}^*$, для яких має місце наслідок 2.3, є функції, які при $v \geq 1$ мають вигляд $\psi(v) = \frac{1}{v^3}\operatorname{arctg} v$, $\psi(v) = = \frac{1}{v^3}(K + e^{-v})$, $\psi(v) = \frac{1}{v^3}\ln^{\alpha}(v + K)$, $K > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 2.1–2.3 рівності (2.41)–(2.43) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних ореараторів Пуассона на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ в метриці простору $\hat{C}$.

Література

[1] Степанец, А.И. *Методы теории приближения. Ч. II.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002.

[2] Степанец, А.И. *Методы теории приближения. Ч. I.*, Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002.

[3] Hrabova, U.Z. (2019). Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences, 11*(2), 321–334.

[4] Степанец, А.И. (1990). Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I. *Укр. мат. журн., 42*(1), 102–112.

[5] Степанец, А.И. (1990). Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II. *Укр. мат. журн., 42*(2), 210–222.

[6] Дзимистаришвили, М.Г. (1989). *Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда*, Препринт АН УССР. Ин-т математики, 89.25, Киев, 3–42.

[7] Дзимистаришвили, М.Г. (1990). *О поведении верхних граней уклонений операторов Стеклова*, Препринт АН УССР. Ин-т математики, 90.25, Киев, 3–29.

[8] Островська, О.В. (1999). Наближення неперервних функцій, заданих на дійсній осі, узагальненими операторами Зигмунда. *Укр. мат. журн., 51*(11), 1505–1512.

[9] Рукасов, В.И. (1992). Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси. *Укр. мат. журн., 44*(5), 682–691.

[10] Рукасов, В.І., Чайченко, С.О. (2010). Наближення операторами Валле-Пуссена на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі. *Укр. мат. журн., 62*(7), 968–978.

[11] Репета, Л.А. (1992). Приближение функций классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U^{\varphi,F}_{\sigma}$. *Ряды Фурье: теория и приложения: Сб.науч.тр., Киев: Ин-т математики НАН Украины*, 147–154.

[12] Rukasov, V.I., Chaichenko, S.O. (2010). Approximation by de la Vallee-Poussin operators on the classes of functions locally summable on the real axis. *Ukr. Math. J., 62*(7), 1126–1138.

[13] Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V. (2004). Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ–methods of summation of their Fourier integrals. *Ukr. Math. J., 56*(9), 1509–1525.

[14] Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V. (2005). Approximation of (ψ, β)–differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukr. Math. J., 57*(8), 1297–1315.

[15] Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V. (2008). Approximation of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukr. Math. J., 60*(5), 769–798.

[16] Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V. (2017). Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukr. Math. J., 69*(5), 757–765.

[17] Kal'chuk, I.V. (2007). Approximation of (ψ, β)–differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukr. Math. J., 59*(9), 1342–1363.

[18] Zhyhallo, K. M., Kharkevych ,Yu. I. (2001).On the approximation of functions of the Holder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J., 53*(6), 1012–1018.

[19] Hrabova, U.Z. (2020). Approximation of conjugate periodic functions by their threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automat. and Informat. Sci., 52*(10), 42–51.

[20] Hembars'ka, S.B. (2018). On boundary values of three-harmonic Poisson integral on the boundary of a unit disk. *Ukr. Math. J., 70*(7), 876–884.

[21] Hrabova, U.Z., Kal'chuk, I.V. (2019). Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ., 11*(2), 321–334.

[22] Kal'chuk, I.V., Kravets, V.I., Hrabova, U.Z. (2020). Approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci., 246*(2), 39–50.

[23] Hrabova, U.Z., Kal'chuk, I.V., Filozof, L.I. (2021). Approximative properties of the three-harmonic Poisson integrals on the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *J. Math. Sci., 254*(3), 397–405.

[24] Ryazanov, V.I. (2019).Stieltjes integrals in the theory of harmonic functions. *J. Math. Sci., 243*(6), 922–933.

[25] Ryazanov, V.I. (2019). On the theory of the boundary behavior of conjugate harmonic functions. *Complex Anal. Oper. Theory, 13*, 2899–2915.

[26] Gutlyanskiĭ, V., Ryazanov, V., Yakubov, E., Yefimushkin, A. (2021). On the Hilbert boundary-value problem for Beltrami equations with singularities. *J. Math. Sci., 254*(3), 357–374.

[27] Hrabova, U., Tovkach, R. (2022). On a boundary properties of functions from a class H_p $(p \geq 1)$. *J. Math. Sci., 264*(4), 389–395.

[28] Баусов, Л.И. (1965). Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I. *Изв. АН СССР. Сер. матем., 46*(3), 15–31.

[29] Hrabova, U.Z., Kal'chuk, I.V. (2022). Approximation of $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ classes by three-harmonic Poisson integrals in uniform metric (low smoothness). *J. Math. Sci., 268*(2), 178–191.

[30] Zhyhallo, T., Kharkevych, Y. (2022). On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ., 14*(1), 223–229.

Відомості про авторів

Уляна Зеновіївна Грабова

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: grabova_u@ukr.net

Інна Володимирівна Кальчук

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-Mail: k.inna.80@gmail.com