Український математичний вісник
Том 20 **(2023)**, № 2, 203 – 218
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-2-3

УМВ

Про розв'язання ускладненного бігармонічного рівняння у однієї гідропружної задачі

Юрій М. Кононов

(Представлена Р. М. Таранцем)

Анотація. В лінійній постановці розглянута гідропружна задача про вільні коливання тонкої пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини в жорсткому циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу. Для розв'язання ускладненого неоднорідного бігармонічного рівняння було використано фундаментальну систему рішень бігармонічного рівняння (ФСР) та власні форми коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині. Отримано частотне рівняння для довільних способів закріплення контуру пластини. На прикладі затиснутої пластини проведено спрощення частотного рівняння за допомогою розкладання однорідного бігармонічного рівняння на два гармонічних рівнянь та за допомогою формули Гріна для оператора Лапласа. Показано, що в цьому випадку частотне рівняння не залежить від ФСР, що значно спростило це рівняння, так як ФСР залежить від невідомої частоти. Отримане рівняння має єдину форму для випадків прямого кругового циліндру та прямокутного каналу і для окремих випадків збігається з раніше отриманими рівняннями. Проведені дослідження несиметричних частот коливань пластини та мембрани і осесиметричних частот коливань мембрани в круговому циліндрі. Наведено наближену формулу для великих частот, а також наближені умови стійкості коливань пластини і мембрани.

2010 MSC. 74E10.

Ключові слова та фрази. Гідропружність, тонка пластина, мембрана, ідеальна нестислива рідина, вільна поверхня, крайова задача, ускладнене бігармонічне рівняння, формули Гріна для оператора Лапласа, частотне рівняння, стійкість.

1. Вступ

Крайові задачі гідропружності відносяться до числа досить складних задач математичної фізики, оскільки потребують сумісно розв'я-

Стаття надійшла в редакцію 17.04.2023

зання диференціальних рівнянь в частинних похідних теорії пружності та гідромеханіки. В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження задач гідропружності. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі та статті останніх років. У всіх перелічених далі роботах гідропружна задача розглядається в лінійній постановці, рідина вважається важкою, ідеальною і нестисливою, пластина – пружною і тонкою, а порожнина – твердою. У монографії [1] розглянута задача про рух твердого тіла з порожниною, яка містить рідину на вільній поверхні якої розташована пружна пластина. Дано розв'язання крайової задачі гідропружності та розглянуто низку окремих випадків. Стаття [2] присвячена дослідженню вільних осесиметричних коливань двошарової рідини у прямому коаксіальному циліндрі з пружними основами у вигляді кільцевих пластин. Отримано частотне рівняння і проведено його дослідження для окремих випадків. Робота [3] узагальнює результати статті [2] на випадок несиметричних коливань. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани аналітично та чисельно проведено дослідження частотного спектру. У статті [4] узагальнена задача Л. М. Сретенського і задача про коливання фізичного маятника на випадок багатошарової рідини, розділеної пружними пластинами. З додатної визначеності потенціальної енергії (задача Л. М. Сретенського) і зміненої потенціальної енергії (фізичний маятник) отримано умови стійкості положення рівноваги. Більш детальні дослідження проведені для циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу. Задача про вільні осесиметричні коливання кругової мембрани, розташованої на вільній поверхні рідини в прямому круговому циліндричному резервуарі, розглянута в [5]. З урахуванням двох членів у ряді частотного рівняння отримано наближені умови стійкості спільних коливань мембрани і рідини. Запропоновано алгоритм, що дозволяє отримати точні умови стійкості. Відзначається, що урахування двох членів ряду у частотному рівнянні дає достатню для практики точність. Задача про вільні плоскі коливання пластини, яка горизонтально розділяє рідини різної густини в у твердому прямокутному каналі з пружною верхньою основою у вигляді пластини, досліджена в [6]. За відсутності верхньої основи (випадок наявності вільної поверхні у рідини) отримані наближені умови стійкості спільних коливань пластини і рідини. У статті [7] розв'язана плоска задача про вільні коливання рідини в твердому прямокутному каналі з твердою верхньою основою і пружним дном у вигляді прямокутної мембрани. Для парних та непарних частот виведено наближену формулу з якої отримано наближені умови стійкості коливань мембрани та рідини. Виведено точні умови стійкості, які збігаються з гідростатичними умовами стійкості. Робота [8] узагальнюю результати роботи [7] на випадок пружного дна у вигляді затиснутої прямокутної пластини.

Використання фундаментальної системи рішень бігармонічного рівняння (ФСР) та власних форм коливань ідеальної рідини у задач гідропружності вперше було використано у роботах Л. С. Лейбензона (1951), а потім у роботах Л. В. Докучаєва (1971) [1]. Цей підхід був застосований в статтях [1–8] та в багатьох інших. Основна складність застосування цього підходу полягає в тому, що ФСР залежить від невідомої частоти коливань пластини та рідини і потребує розглядати усі можливі варіанти ФСР. Вперше спрощення частотного рівняння було виконано у статті [9] в плоскій задачі о коливанні пружної мембрани на вільній поверхні ідеальної рідини у прямокутному каналі, коли тригонометричні функції були розкладені на найпростіші дроби, а також у роботі [10].

Ця стаття узагальнює результати роботи [5] на випадок жорсткого циліндричного резервуару довільного поперечного перерізу та верхньої рідини з вільною поверхнею. У ній продовжені дослідження, які були розпочаті у роботах [1–9] у яких був застосований підхід використання ФСР, що ускладнювало, а часом унеможливлювало проведення аналітичних досліджень частотного рівняння. В даній роботі на прикладі затиснутої пластини проведено спрощення частотного рівняння за допомогою розкладання однорідного бігармонічного рівняння на два гармонічних рівнянь та за допомогою формули Гріна для оператора Лапласа. Показано, що в цьому випадку частотне рівняння не залежить від ФСР, що значно спростило це рівняння, так як ФСР залежить від невідомої частоти.

2. Постановка задачі

Розглянемо коливання пружної тонкої пластини, яка горизонтально поділяє ідеальні нестисливі рідини з густиною ρ_i $(i = 1, 2)$ в твердому циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу. Пластина має постійну згинальну жорсткість D і схильна до розтягуючих та стискаючих зусиль в серединній поверхні інтенсивності T. Контур пластини може мати довільне закріплення, наприклад, бути затисненим, опертим або вільним. Верхня рідина густини ρ_1 заповнює канал до глибини h_1, а нижня рідина густини ρ_2 до глибини h_2. Верхня рідина має вільну поверхню. Систему координат $Oxyz$ розташуємо так, щоб площина Oxy перебувала на незбуреній серединній поверхні пластини, а вісь Oz – протилежно вектору прискорення сили тяжіння $\overrightarrow{g}$ (рис. 1). Коливання пластини і рідини будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи сумісні коливання пластини і рідини безвідривними, тобто без кавітації, а рухи рідин потенціальними.

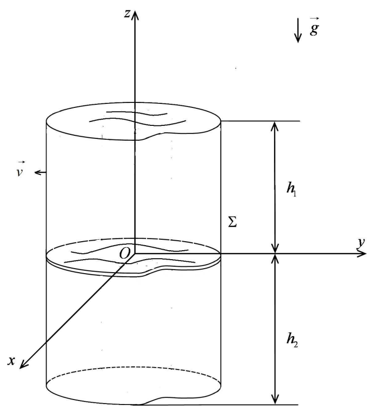

Рис. 1.

Рівняння коливань пластини і рідини мають вигляд [3–5]:

$$m_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\Delta_2^2 W-T\Delta_2 W+g\Delta\rho W=\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}+Q \text{ при } z=0,$$

$$\left(\Delta_2^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_i=0\ (i=1,2) \tag{1}$$

з граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\vec{\nu}}\right|_{\Sigma}=0,\ \frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z=0, \tag{2}$$

$$\left.(\mathcal{L}_p[W])\right|_{\gamma}=0\ (p=1,2), \tag{3}$$

$$\int_S W dS=0;\ W,\nabla W<\infty, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t},\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+g\zeta=0 \text{ при } z=h_1;\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h_2. \tag{5}$$

Тут $m_0=\rho_0\delta_0$; $W(x,y,t)$, ρ_0, δ_0 – відповідно нормальний прогин, густина і товщина пластини; $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$; $\Phi_i(x,y,z,t)$ – потенціал швидкостей i-ої рідини $(i=1,2)$; Δ_2 – двовимірний оператор Лапласа; $\vec{\nu}$ – орт зовнішньої нормалі до бічної поверхні Σ; γ – контур області S; $z=\zeta(x,y,t)$ – форма вільної поверхні верхньої рідини; $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ – диференціальні оператори граничних умов закріплення пластини на контурі γ; наприклад, у випадку затиснутої пластини оператор $\mathcal{L}_1$ буде одиничним, а $\mathcal{L}_2=\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}$.

3. Метод розв'язання

Представимо функції $\Phi_i\left(x,y,t\right)$ і $\zeta\left(x,y,t\right)$ у вигляді узагальнених рядів Фур'є за власними функціями $\psi_n\left(x,y\right)$:

$$\Phi_i\left(x,y,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\left(t\right)e^{k_nz}+B_{in}\left(t\right)e^{-k_nz}\right]\psi_n\left(x,y\right)(i=1,2), \quad (6)$$

$$\zeta\left(x,y,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n\left(t\right)\psi_n\left(x,y\right), \quad (7)$$

де ψ_n і k_n – власні функції і відповідні їм власні числа коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині довільного поперечного перерізу. Вони знаходяться з наступної крайової задачі:

$$\Delta_2\psi_n+k_n^2\psi_n=0 \text{ на } S, \quad \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\right|_{\gamma}=0.$$

Відомо, що ця крайова задача еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма 2-го роду з симетричним ядром, звідки випливає існування лічильних значень k_n і відповідних їм функцій ψ_n. Власні функції ψ_n лінійно незалежні, ортогональні на області S і після приєднання до них довільної константи стають повними на S [11].

Нескінченні ряди в (6)–(7) будемо вважати, що вони сходяться абсолютно і рівномірно відповідно в області S на кінцевому інтервалі часу разом зі своїми другими похідними по x, y, t [11].

Підставивши ряди (6)–(7) в (2) і (5) та, скориставшись ортогональністю функцій ψ_n, отримаємо:

$$A_{2n}=\frac{\dot{W}_ne^{\kappa_{2n}}}{2k_n\sinh\kappa_{2n}}, \quad B_{2n}=\frac{\dot{W}_ne^{-\kappa_{2n}}}{2k_n\sinh\kappa_{2n}}\,. \quad (8)$$

Тут

$$W_n=\frac{1}{N_n^2}\int_S W\psi_n dS, \quad N_n^2=\int_S\psi_n^2dS, \quad \kappa_{in}=h_ik_n. \quad (9)$$

З урахуванням співвідношень (6)–(9), рівняння (1) набуде вигляду

$$m_0\frac{\partial^2W}{\partial t^2}+D\Delta_2^2W-T\Delta_2W+g\Delta\rho W=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\ddot{\zeta}_n-a_n\ddot{W}_n}{k_n}\psi_n+Q, \quad (10)$$

де $a_n=\rho_1\coth\kappa_{1n}+\rho_2\coth\kappa_{2n}$, $b_n=\rho_1/\sinh\kappa_{1n}$.

Із другого співвідношення у (5) і співвідношень (9) маємо

$$\ddot{\zeta}_n+\sigma_n^2\zeta_n-\frac{\ddot{W}_n}{\cosh\kappa_{1n}}=0. \quad (11)$$

Тут $\sigma_n^2 = gk_n \tanh \kappa_{1n}$ – квадрат частоти коливань вільної поверхні верхньої рідини в випадку абсолютно жорсткої пластини ($W \equiv 0$).

Таким чином, спільні коливання пластини і рідини з вільною поверхнею знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь (9)–(11), граничних умов (3), з першої умови нестисливості рідини (4) і заданих початкових умов.

4. Крайова задача власних сумісних коливань пластини і рідини

Для знаходження власних спільних частот коливань пластини і рідини покладемо

$$W(x,y,t) = w(x,y)\,e^{i\omega t},\ \ \zeta(x,y,t) = \tilde{\zeta}(x,y)\,e^{i\omega t},\ \ Q = C_0 e^{i\omega t}, \quad (12)$$

де ω – частота цих коливань.

Підставивши (12) в (9)–(11), в граничні умови (3) і (4), будемо мати:

$$\Delta_2^2 w - 2P\Delta_2 w + q = \frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^* w_n}{k_n}\psi_n + C, \quad (13)$$

$$w_n = \frac{1}{N_n^2}\int_S w\psi_n dS, \quad (14)$$

$$\int_S w ds = 0 \ \ i \ \ w, \nabla w < \infty, \quad (15)$$

$$\left(\mathcal{L}_p[w]\right)\big|_\gamma = 0,\ \ (p = 1, 2). \quad (16)$$

Тут $P = T/2D$, $q = \left(g\Delta\rho - m_0\omega^2\right)/D$, $a_n^* = a_n - \tilde{b}_n$, $C = C_0/D$,

$$\tilde{b}_n = \frac{\omega^2 b_n}{(\omega^2 - \sigma_n^2)\cosh\kappa_{1n}} = \frac{2\omega^2\rho_1}{(\omega^2 - \sigma_n^2)\sinh 2\kappa_{1n}}.$$

Отже, власні частоти и форми спільних коливання пластини і рідини знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь (13)–(15) і граничних умов (16).

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати у вигляді

$$w = \sum_{k=1}^{4} A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\psi_n + w_0, \quad (17)$$

де w_k^0 $(k = \overline{1,4})$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння (13)

$$\Delta_2^2 w_k^0 - 2P\Delta_2 w_k^0 + q w_k^0 = 0. \quad (18)$$

Константи $\tilde{C}_n$ і w_0 виразимо через невідомі константи A_k^0, які будуть знайдені з умов закріплення пластини.

Слід зазначати, що за рахунок другої умови у (15), тобто умови обмеженості, для однозв'язкової області S індекс k повинен змінюватися від 1 до 2. Якщо область S була б двозв'язковою, то тоді $k = \overline{1,4}$. Таким чином, будемо далі вважати індекс $k = 1, 2$.

Підставивши (17) у рівняння (13) і скориставшись співвідношеннями $\Delta_2\psi_n = -k_n^2\psi_n$, $\Delta_2^2\psi_n = k_n^4\psi_n$, виразимо константу $\tilde{C}_n$ через w_n

$$\tilde{C}_n = \omega^2 a_n^* w_n / k_n d_n, \tag{19}$$

де $d_n = \left(Dk_n^2 + T\right) k_n^2 + g\Delta\rho - m_0\omega^2$.

Підставивши (17) у (14) і враховуючи (19), отримаємо вирази для w_0 і w_n

$$w_0 = -\sum_{k=1}^{2} \tilde{w}_k^0 A_k^0, \quad w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n^*} \sum_{k=1}^{2} A_k^0 E_{kn}^0. \tag{20}$$

Тут

$$\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{mes(S)} \int_S w_k^0 dS,$$

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_k^0 \psi_n dS. \tag{21}$$

З урахуванням (15), (19) і (20) остаточний вираз для форми прогину пластини w набуде вигляду

$$w = \sum_{k=1}^{2} \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* E_{kn}^0}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} \psi_n \right) A_k^0. \tag{22}$$

У формулу (22) входять невідомі константи A_k^0. З граничних умов закріплення пластини (16) маємо два лінійних однорідних рівняння відносно A_k^0

$$\sum_{k=1}^{2} \left(\mathcal{L}_{pk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{pn} \right) A_k^0 = 0 \ (p = 1, 2). \tag{23}$$

Тут

$$\mathcal{L}_{pk}^0 = \left(\mathcal{L}_p \left[w_k^0 - \tilde{w}_k^0 \right] \right)\Big|_\gamma, \ \mathcal{L}_{pn} = \left(\mathcal{L}_p [\psi_n] \right)\Big|_\gamma, \ \alpha_n = a_n^* / \left(\omega^2 a_n^* - k_n d_n \right).$$

З рівності нулю визначника однорідної системи (23) випливає частотне рівняння власних сумісних коливань пластини і рідини

$$\left| \| C_{qk} \|_{q,k=1}^2 \right| = 0, \tag{24}$$

де

$$C_{pk} = \mathcal{L}^0_{pk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E^0_{kn} \mathcal{L}_{pn} \quad (\,p = 1,2;\; k = 1,2),$$

Скориставшись розкладанням функцій w_k^0 в ряд по повній і ортогональній системі функцій ψ_n, умовою $\int_S \psi_n dS = 0$ і позначенням (21), рівняння (24) можна переписати так

$$\left| \|C_{qk}\|^2_{q,k=1} \right| = 0, \tag{25}$$

де

$$C_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E^0_{1n} \mathcal{L}_{1n}, \quad C_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E^0_{2n} \mathcal{L}_{1n},$$

$$C_{21} = \mathcal{L}^0_{21} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E^0_{1n} \mathcal{L}_{2n}, \quad C_{22} = \mathcal{L}^0_{22} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E^0_{2n} \mathcal{L}_{2n}.$$

Тут $\beta_n = k_n d_n / \left(\omega^2 a_n^* - k_n d_n\right)$.

Таким чином, при наявності функцій w_k^0, власних функцій ψ_n і власних чисел k_n ми можемо знайти з рівняння (25) власні частоти ω^2, а з формул (22)–(23) власні форми спільних коливань пластини та рідини. Такий підхід був використаний у багатьох роботах, наприклад, [1–8]. Складність такого підходу полягає в тому, що значення функцій w_k^0 та основних коефіцієнтів E^0_{kn} залежить від знака величин P і q, де у свою чергу величина q залежить від невідомої частоти ω^2. У зв'язку з цим проведемо спрощення частотного рівняння (25).

Бігармонічне рівняння (18) може бути представлено у вигляді [12]

$$\left(\Delta_2 w_k^0 - p_1^2 w_k^0\right)\left(\Delta_2 w_k^0 - p_2^2 w_k^0\right) = 0, \tag{26}$$

де $p^2_{1,2} = P \pm \sqrt{P^2 - q}$.

Так як $\Delta_2 \psi_n = -k_n^2 \psi_n$ і $\Delta_2 w_k^0 - p_k^2 w_k^0 = 0$ $(k = 1,2)$, то

$$\int_S w_k^0 \psi_n dS = -\frac{1}{k_n^2} \int_S w_k^0 \Delta_2 \psi_n dS = \frac{1}{p_k^2} \int_S \psi_n \Delta_2 w_k^0 dS. \tag{27}$$

З формул Гріна для оператора Лапласа і умови $\left.\frac{\partial \psi_n}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma = 0$ маємо

$$\int_S \left(w_k^0 \Delta_2 \psi_n - \psi_n \Delta_2 w_k^0\right) dS = \oint_\gamma \left(w_k^0 \frac{\partial \psi_n}{\partial \vec{\nu}} - \psi_n \frac{\partial w_k^0}{\partial \vec{\nu}} \right) d\gamma =$$

$$= -\oint_\gamma \left(\psi_n \frac{\partial w_k^0}{\partial \vec{\nu}} \right) d\gamma, \tag{28}$$

а з урахуванням формули (27) слідує

$$\int_S \left(w_k^0 \Delta_2 \psi_n - \psi_n \Delta_2 w_k^0\right) dS = -\left(k_n^2 + p_k^2\right) \int_S \psi_n w_k^0 dS. \tag{29}$$

З формул (21), (28) і (29) будемо мати

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_k^0 \psi_n dS = \frac{1}{N_n^2 \left(k_n^2 + p_k^2\right)} D_{kn}. \tag{30}$$

Тут $D_{kn} = \oint_\gamma \psi_n \frac{\partial w_k^0}{\partial \vec{\nu}} d\gamma$.

На прикладі затиснутого контуру проведемо подальше спрощення частотного рівняння (25). Як це було вже відмічено, в разі затиснутого контуру оператор $\mathcal{L}_1$ буде одиничним, а $\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}}$. В цьому випадку $\mathcal{L}_{1n} = \psi_n|_\gamma = B_n$, $\mathcal{L}_{2n} = 0$, а коефіцієнти рівняння (25) отримують вигляд:

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 B_n\,, \;\; C_{2k} = C_k = \left.\frac{\partial w_k^0}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma . \tag{31}$$

Рівняння (25) з урахування співвідношень (31) буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n B_n}{N_n^2} \left(\frac{C_2 D_{1n}}{k_n^2 + p_1^2} - \frac{C_1 D_{2n}}{k_n^2 + p_2^2}\right) = 0. \tag{32}$$

Для аналітичного розв'язання частотного рівняння (32) треба покласти

$$B_n = const \quad \text{і} \quad C_k = const. \tag{33}$$

Це може бути, наприклад, для кругової або для коаксіальної циліндричної порожнини, а також для порожнини у вигляді прямокутного каналу.

При виконані умов (33) будемо мати $D_{kn} = \gamma C_k B_n$ і рівняння (32) може бути записано наступним чином:

$$\gamma C_1 C_2 \sqrt{P^2 - q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n B_n^2}{N_n^2} \frac{1}{\left(k_n^2 + p_1^2\right)\left(k_n^2 + p_2^2\right)} = 0. \tag{34}$$

Так як $\left(k_n^2 + p_1^2\right)\left(k_n^2 + p_2^2\right) = d_n/D$, то при $C_k \neq 0$ і $P^2 \neq q$ частотне рівняння (34) отримує вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} \left(\frac{B_n}{N_n}\right)^2 = 0. \tag{35}$$

Таким чином, спрощене частотне рівняння (35) залежить тільки від власних чисел k_n і власних функцій ψ_n коливань ідеальної рідини в циліндричному резервуарі і не залежить від ФСР бігармонічного рівняння (18).

У разі прямокутного каналу шириною $2a$ будемо мати $\psi_n(x,y) = \psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$, $k_n = \pi n/2a$, $B_n = (-1)^n$ і $N_n^2 = a$. У цьому випадку рівнянні (35) збігаються з рівнянням роботи [6].

Рівняння (35) включає в себе ряд окремих випадків. Так, наприклад, при виродженні пластини в мембрану в цьому рівнянні треба покласти $D = 0$, а при відсутності верхньої рідини – $\rho_1 = 0$.

У разі повного заповнення циліндричної порожнини (випадок відсутності вільної поверхні у верхньої рідини) у першій граничній умові (5) необхідно покласти $\zeta \equiv 0$ і не розглядати другу умову сталості тиску на вільній поверхні. У рівнянні (10) треба покласти $\zeta_n = 0$ і не розглядати рівняння (11). У цьому випадку в рівнянні (13) та у інших рівняннях і співвідношеннях будемо вважати $a_n^* = a_n$ $\left(\tilde{b}_n = 0\right)$.

Таким чином, в у разі повного заповнення циліндричної порожнини частотне рівняння (35) буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} \left(\frac{B_n}{N_n}\right)^2 = 0. \tag{36}$$

Розглянемо випадок осесиметричних коливань пластини і рідини в круговому циліндрі. У цьому разі власні функції $\psi_n(x,y)$ будуть мати вигляд $\psi_n(x,y) = \psi_n(r) = J_0(k_n r)$, власні числа k_n знаходяться з рівняння $J_1(\xi_n) = 0$, де $\xi_n = k_n a$, J_0 – функція Бесселя першого роду, a – радіус циліндра, $B_n = J_0(\xi_n)$, $N_n = a\sqrt{\pi} J_0(\xi_n)$ і частотні рівняння (35)–(36) запишуться так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0, \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = 0. \tag{38}$$

Із робіт [1,13] слідує, що для затиснутої кругової пластини і нестисливої рідини неможливі осесиметричні коливання пластини і рідини в обмеженому об'ємі. Тому рівняння (37)–(38) можуть бути використані лише для випадку мембрани ($D = 0$) і в цьому разі коефіцієнт $d_n = Tk_n^2 + g\Delta\rho - m_0\omega^2$.

При відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$) рівнянні (37) збігається з рівняння роботи [5] і узагальнює це рівняння на випадок наявності рідини з вільною поверхнею на поверхні мембрани.

У випадку неосесиметричних коливань пластини і рідини (просторові коливання) в круговому циліндрі к однопараметричному сімейству індексу n, який раніше відповідав радіальним гармонікам, треба додати індекс m, який буде відповідати круговим гармонікам. В цьому випадку власні функції $\psi_n(x,y) = \psi_{nm}(r,\theta)$ представляються у вигляді $\psi_{nm}(r,\theta) = J_m(k_{nm}r)\left\{\begin{array}{l}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{array}\right.$, а власні числа k_{nm} знаходяться з рівняння $J'_m(\xi_{nm}) = 0$, де $\xi_{nm} = k_{nm}a$, J_m – функція Бесселя першого роду m-го порядку. Таке представлення власних функцій дає можливість розділити радіальні та кругові гармоніки в основних диференціальних та інтегральних рівняннях і записати частотне рівняння (35) наступним чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_{nm}}{\omega^2 a^*_{nm} - k_{nm}d_{nm}}\left(\frac{B_{nm}}{N_{nm}}\right)^2 = 0. \tag{39}$$

Тут $a_{nm} = \rho_1\coth\kappa_{1nm} + \rho_2\coth\kappa_{2nm}$, $\kappa_{inm} = h_i k_{nm}$, $a^*_{nm} = a_{nm} - \tilde{b}_{nm}$, $\tilde{b}_{nm} = \frac{2\omega^2\rho_1}{(\omega^2-\sigma^2_{nm})\sinh 2\kappa_{1nm}}$, $d_{nm} = \left(Dk^2_{nm} + T\right)k^2_{nm} + g\Delta\rho - m_0\omega^2$,

$$B_{nm} = J_m(\xi_{nm}),\ N^2_{nm} = \frac{\pi a^2(1+\delta_{m0})}{2\xi^2_{nm}}J^2_m(\xi_{nm})\left(\xi^2_{nm} - m^2\right). \tag{40}$$

З урахування (40) рівняння (39) отримує вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^3_{nm}}{(\xi^2_{nm} - m^2)(a\omega^2 a^*_{nm} - \xi_{nm}d_{nm})} = 0. \tag{41}$$

У разі повного заповнення циліндричної порожнини (випадок відсутності вільної поверхні у верхньої рідини) в частотному рівнянні (41) треба покласти $a^*_{nm} = a_{nm}$і воно набуде вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^3_{nm}}{(\xi^2_{nm} - m^2)(a\omega^2 a_{nm} - \xi_{nm}d_{nm})} = 0. \tag{42}$$

Раніше було відмічено о неможливі осесиметричних коливань для пластини та рідини. В зв'язку з цим отримані рівняння (41)–(42) справедливі для мембрани ($D = 0$), а для пластини ($D \neq 0$) їх слід розглядати тільки при $m \neq 0$.

5. Деякі механічні ефекти

У випадку пластини ліва частина рівняння (42) є монотонно зростаючою функцією параметра ω^2 на інтервалі

$\left(\xi_{nm}\tilde{d}_{nm}/a\tilde{a}_{nm},\, \xi_{n+1,m}\,\tilde{d}_{n+1,m}/a\tilde{a}_{n+1,m}\right)$ $(n = 1,\, 2,\, ...)$, приймаюча на ньому значення від $-\infty$ до ∞. Отже, між двома послідовними значеннями $\xi_{nm}\tilde{d}_{nm}/a\tilde{a}_{nm}$ лежить лише один корінь цього рівняння. Цим заздалегідь визначаються інтервали, де знаходяться власні частоти коливань пластини. Для великих частот $(n \gg 1)$ можемо отримати наступну наближену формулу

$$\omega_n^2 \approx \xi_{nm}\tilde{d}_{nm}/a\tilde{a}_{nm}, \tag{43}$$

де $\tilde{d}_{nm} = \left(Dk_{nm}^2 + T\right)k_{nm}^2 + g\Delta\rho$, $\tilde{a}_{nm} = a_{nm} + m_0 k_{nm}$.

З формули (43) випливає наступна наближена умова стійкості спільних коливань пластини і рідини

$$\left(Dk_{nm}^2 + T\right)k_{nm}^2 + g\Delta\rho > 0. \tag{44}$$

З нерівності (44) слідує, що вона буде завжди виконана при $T \geq 0$ і $\rho_2 \geq \rho_1$.

У випадку мембрани $(D = 0)$ між двома послідовними значеннями $\xi_{nm}\tilde{d}_{nm}/a\tilde{a}_{nm}$ лежить лише один корінь рівняння (42) і для великих частот $(n \gg 1)$ маємо наближену формулу

$$\omega_n^2 \approx \xi_{nm}\tilde{d}_{nm}/a\tilde{a}_{nm}, \tag{45}$$

де $\tilde{d}_{nm} = Tk_{nm}^2 + g\Delta\rho$.

З формули (45) випливає наступна наближена умова стійкості спільних коливань мембрани і рідини

$$Tk_{nm}^2 + g\Delta\rho > 0. \tag{46}$$

Слід зазначати, що отримані наближені умови стійкості (44) і (46) збігаються з достатньою умовою стійкості, отриманою в роботі [4] для однієї пластини або мембрани.

У разі відсутності пластини або мембрани $(D = 0,\, T = 0,\, m_0 = 0)$ із рівнянь (10)–(11) маємо частотне рівняння власних коливань двошарової ідеальної рідини в циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу

$$(\rho_1 + \rho_2 \coth\kappa_{1n}\coth\kappa_{2n})\,x^2 - \rho_2\,(\coth\kappa_{1n} + \coth\kappa_{2n})\,x + \Delta\rho = 0. \tag{47}$$

Тут $x = \omega_n^2/gk_n$.

Для нескінченно глибокої нижньої рідини $(h_2 = \infty)$ рівняння (47) має коріння $x_1 = \Delta\rho/\left(\rho_1 + \rho_2\coth\kappa_{1n}\right)$, $x_2 = 1$, де $gk_n\Delta\rho/\left(\rho_1 + \rho_2\coth\kappa_{1n}\right)$ – власна частота коливань внутрішньої поверхні рідини при наявності “кришки” на вільної поверхні, а gk_n –

власна частота коливань нескінченно глибокої ідеальної рідини з вільною поверхнею.

Із частотного рівняння (35) та робіт [2, 3] випливає, що частотний спектр цього рівняння складається з дух наборів частот, які відповідають коливанням пластини і вільної поверхні рідини. Великий інтерес представляє взаємний вплив цих двох наборів коливань. З рівнянь (35) і (36) слідує, що при $h_1/b \to \infty$, де b – характерний розмір порожнини, маємо $a_n^* \to a_n$ ($\tilde{b}_n \to 0$). З зростання h_1/b коефіцієнт $\tilde{b}_n$ прагне до нуля як $e^{-2k_1h_1/b}$, тому що власні числа k_n утворюють нескінченно зростаючу числову послідовність. Таким чином, при $h_1/b > 1$ впливом вільної поверхні на частотний спектр коливання пластини і рідини можна нехтувати.

Отримаємо наближені умови стійкості вільних коливань пластини і рідини у прямому круговому циліндрі. Для зручності запису індекс m у рівнянні (41) будемо опускати і запишемо це рівняння у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0. \tag{48}$$

Рівняння (48) з урахуванням двох членів ряду ($n = 1, 2$) отримує вигляд

$$c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0, \quad x = \omega^2 > 0. \tag{49}$$

Тут

$$c_0 = \alpha_1 k_1 a_2^* + k_2 a_1^* > 0, \quad c_1 = -\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) c_0 - k_1 k_2 \left(\alpha_2 \tilde{d}_1 + \alpha_1 \tilde{d}_2\right),$$

$$c_2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[\alpha_1 k_1 a_2 + \alpha_2 k_2 a_1 + m_0 k_1 k_2 \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right] + \tag{50}$$

$$+ \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) \left(\alpha_2 \tilde{d}_1 + \alpha_1 \tilde{d}_2\right) k_1 k_2,\ c_3 = -\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(\alpha_2 \tilde{d}_1 + \alpha_1 \tilde{d}_2\right) k_1 k_2,$$

$$a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n},\ \tilde{a}_n = a_n + m_0 k_n,$$

$$a_n^* = \tilde{a}_n - \frac{2\rho_1}{\sinh 2\kappa_{1n}} = \rho_1 \tanh \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n} + m_0 k_n > 0,$$

$$\alpha_n = \xi_n^2 / \left(\xi_n^2 - m^2\right) > 0$$

$$\tilde{a}_n = a_n - \frac{2\rho_1}{\sinh 2\kappa_{1n}} + m_0 k_n = \rho_1 \tanh \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n} + m_0 k_n > 0,$$

$$\tilde{d}_n = \left(D k_n^2 + T\right) k_n^2 + g \Delta\rho, \sigma_n^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}.$$

Згідно правилу Декарта про кількість додатних коренів алгебраїчних рівнянь, все корені рівняння (49) будуть додатними, якщо

$$c_1 < 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 < 0. \tag{51}$$

З коефіцієнтів (50) випливає, що для виконання нерівностей (51) достатньо, щоб

$$\alpha_2 \tilde{d}_1 + \alpha_1 \tilde{d}_2 > 0$$

або

$$D\left(\alpha_{1m} k_{2m}^4 + \alpha_{2m} k_{1m}^4\right) + T\left(\alpha_{1m} k_{2m}^2 + \alpha_{2m} k_{1m}^2\right) + g\Delta\rho\left(\alpha_{1m} + \alpha_{2m}\right) > 0. \quad (52)$$

Нерівність (52) не залежить від глибин заповнення рідин і маси пластини. З цієї нерівності випливає, що при стискаючих зусиллях ($T < 0$) або при наявності вгорі рідини більшої густини, ніж внизу ($\Delta\rho < 0$) може статися втрата стійкості спільних коливань пластини і рідини. З нерівності (52) також слід, що за рахунок попереднього збільшення натягу ($T > 0$) можна стабілізувати нестійкі коливання пластини та рідини.

Наближені умови стійкості вільних частот коливань мембрани ($D = 0$) і рідини випливають із нерівності (52) і мають вигляд

$$T\left(\alpha_{1m} k_{2m}^2 + \alpha_{2m} k_{1m}^2\right) + g\Delta\rho\left(\alpha_{1m} + \alpha_{2m}\right) > 0. \quad (53)$$

Умови стійкості (52)–(53) доповнюють раніше отримані умови (44) і (46).

Нерівність (52) також слідує з рівняння (42) для двох членів ряду ($n = 1, 2$) із умови $\omega^2 > 0$. Таким чином, наближені умови стійкості як при наявності вільної поверхні, так і при її відсутності збіглися.

У статтях [5, 7, 8] зазначалося, що наближені умови стійкості, отримані з урахуванням двох членів ряду, є достатніми для практичної точності.

Слід зазначити, що найбільший теоретичний і практичний інтерес представляє випадок $m = 1$, тому що в цьому випадку коливання пластини та рідини впливають на рух твердого тіла і це взаємно [1].

6. Висновки

В лінійній постановці розв'язана гідропружна задача про вільні коливання тонкої пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини в жорсткому циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу. Для розв'язання ускладненого неоднорідного бігармонічного рівняння було використано фундаментальну систему рішень бігармонічного рівняння (ФСР) та власні форми коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині. Отримано частотне рівняння для довільних способів закріплення контуру пластини. На прикладі затиснутої пластини проведено спрощення частотного рівняння за допомогою розкладання однорідного бігармонічного рівняння на два гармонічних рівнянь та за допомогою формули Гріна для оператора Лапласа. Показано, що в цьому випадку частотне рівняння не залежить від ФСР, що значно спростило це рівняння та дало можливість провести аналітичні дослідження. Показано, що коли глибина заповнення верхньої рідини більша за характерний розмір порожнини, то впливом вільної поверхні на частотний спектр коливань пластини можна нехтувати. Отримане спрощене частотне рівняння має єдину форму для випадків прямого кругового циліндру та прямокутного каналу і для окремих випадків збігається з раніше отриманими рівняннями. Проведені дослідження несиметричних частот коливань пластини та мембрани і осесиметричних частот коливань мембрани в круговому циліндрі. Наведено наближену формулу для великих частот, а також наближені умови стійкості коливань пластини і мембрани. Умови стійкості не залежить від глибин заповнення рідин і маси пластини або мембрани. З цих умов випливає, що при стискаючих зусиллях або при наявності вгорі рідини більшої густини, ніж внизу може статися втрата стійкості сумісних коливань пластини і рідини, а також те, що за рахунок попереднього збільшення натягу можна стабілізувати нестійкі коливання пластини та рідини. Показано, що наближені достатні умови стійкості як при наявності вільної поверхні, так і при її відсутності збігаються.

Acknowledgments

The author is partially supported by the Grant EFDS-FL2-08 of the found The European Federation of Academies of Sciences and Humanities (ALLEA).

Література

[1] Dokuchaev, L.V. (1987). *Nonlinear Dynamics of Aircraft with Deformable Elements.* M., Mashinostroenie.

[2] Kononov, Y.M., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Y.O. (2018). Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir. *Journal of Mathematical Sciences, 240* (1), 98–112.

[3] Kononov, Y.M., Dzhukha, Y.O. (2020). Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journal of Mathematical Sciences, 246*(3), 365–383.

[4] Kononov, Yu.M. (2022). Stability of the Equilibrium State of a Rigid Body with a Multilayer Ideal Liquid Separated by Elastic Plates. *Ukrainian Mathematical Journal, 73*, 1551–1565.

[5] Kononov, Yu.N., Dzhukha, Yu.A. (2017). Influence of overload on axisymmetric vibrations of a circular membrane located on the free surface of a liquid in a cylindrical tank. *Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, 14*(2), 32–41.

[6] Kononov, Yu.N., Lymar, A.A. (2017). On the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with one elastic base. *Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy: zb. nauk. prats, 26*, 79–96.

[7] Kononov, Y., Lymar, A. (2020). On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Fluid mechanics, 50*, 292–303.

[8] Kononov, Y., Lymar, O. (2022). Stability of the coupled liquid-elastic bottom oscillations in a rectangular tank. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Fluid mechanics, 52*, 164–178.

[9] Trotsenko, V.A. (1995). Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface. *Prikladnaya mekhanika, 31*(8), 74–80.

[10] Bogun, R.I., Trotsenko, V.A. (2009). Free oscillations of the fluid in a rectangular channel with an arbitrary symmetrical bottom and an elastic membrane on the free surface. *Problemy dynamiky ta stiikosti bahatovymirnykh system : zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, 6*(3), 53–76.

[11] Mikishev, G.N., Rabinovich, B.I. (1968). *Dynamics of a Rigid Body with Cavities Partially Filled with Fluid.* M., Mashinostroenie.

[12] Filippov, A.P. (1970). *Vibrations of deformable systems.* M., Mashinostroenie.

[13] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Applied Mathematical Modeling, 37*, 228–239.

Відомості про авторів

Юрій Микитович Кононов

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com