Український математичний вісник
Том 20 **(2023)**, № 2, 219 – 240
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-2-4

Про спотворення діаметра образу круга

Ігор В. Пєтков, Руслан Р. Салімов,
Марія В. Стефанчук

(Представлена В. І. Рязановим)

Анотація. У статті досліджуються так звані кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля при $p > 2$ на комплексній площині. Отримано нижню оцінку спотворення діаметра образу круга. Розв'язані екстремальні задачі про мінімізацію функціоналу спотворення діаметра образу круга на деяких класах кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключові слова та фрази. p-модуль сім'ї кривих, кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля, конденсатор, p-ємність конденсатора.

1. Вступ

Нагадаємо деякі означення. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають допустимою для Γ, пишуть $\rho \in adm\, \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)|dz| \geqslant 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p-модулем сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\, \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\, dxdy\, .$$

Для довільних множин E, F, і G в $\mathbb{C}$, через $\Delta(E, F; G)$ позначимо сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Стаття надійшла в редакцію 14.04.2023

Для $z_0 \in \mathbb{C}$ покладемо

$$B\left(z_0, r\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\right\},$$

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

та

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Твердження 1.1. *Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ та $\Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})$ – сім'я всіх кривих, які з'єднують кола $S_1 = S(z_0, r_1)$ і $S_2 = S(z_0, r_2)$ в кільці $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Тоді при $p > 2$*

$$\mathrm{M}_p(\Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p} \tag{1.1}$$

(див, напр., співвідношення (2) у [1]).

Нехай D – область в комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $z_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\, \eta^p(|z - z_0|)\, dxdy$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Теорія Q-гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^n$ при $p = n$ досліджувалась в роботах [2–6], при $1 < p < n$ див. [7–15] і при $p > n$ див. в [16–20]. Більш загальні класи відображень досліджувались в [21–30], див. також [31]. Зауважимо також, що неконформний випадок ($p \neq n$) істотно відрізняється від конформного випадку ($p = n$), див. напр., [1, 25–27].

Результати статті можна застосувати до дослідження екстремальних та асимптотичних властивостей розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі, див. [32–34].

Нехай точка $z_0 \in \mathbb{C}$ та $r > 0$. Всюди далі будемо вважати, що $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$ – середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Нижче наведено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля при $p > 1$ на комплексній площині, див. теорему 2.3 в [12] при $n = 2$.

Твердження 1.2. *Нехай D – область в комплексній площині $\mathbb{C}$ і нехай $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція, така, що середнє інтегральне значення $q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля при $p > 1$ в точці $z_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли для довільних r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < d_0$ виконується умова*

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}}, \tag{1.2}$$

де $S_1 = S(z_0, r_1)$ і $S_2 = S(z_0, r_2)$.

Нижче наведемо деякі допоміжні відомості про p-ємність конденсатора. Згідно з роботою [35], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, де $A \subset \mathbb{C}$ – відкрита множина і C – непорожня компактна множина, яка міститься в A, називають *конденсатором.* Конденсатор $\mathcal{E}$ називається кільцевим конденсатором, якщо $\mathfrak{R} = A \setminus C$ – кільцева область, тобто якщо $\mathfrak{R}$ – область, доповнення якої $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{R}$ складається в точності з двох компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ називається обмеженим конденсатором, якщо множина A обмежена. Кажуть, що конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежить в області D, якщо $A \subset D$. Очевидно, що якщо $f : D \to \mathbb{C}$ – неперервне, відкрите відображення і $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) також конденсатор в fD. Надалі позначатимемо $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Нехай $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор. Позначимо через $\mathcal{C}_0(A)$ множину неперервних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ з компактним носієм та $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ – сім'ю невід'ємних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, що 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x, y) \geqslant 1$ для $(x, y) \in C$ і 3) u належить класу ACL. При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dxdy\,, \tag{1.3}$$

де

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,,$$

називають *p-ємністю конденсатора $\mathcal{E}$.*

Відомо, що при $p > 1$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \mathrm{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{1.4}$$

див. теорему 1 в [36].

Твердження 1.3. *При $p > 2$ справедлива оцінка*

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) \geqslant 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(|A|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |C|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p} \tag{1.5}$$

(див., напр. [37], нерівність (8.7)*).*

Тут і надалі $|E|$ означає міру Лебега множини E.

Твердження 1.4. *Нехай E – компактна множина в $\mathbb{C}$. Тоді*

$$|E| \leqslant \frac{1}{4}\,\pi\,(\operatorname{diam} E)^2\,.$$

(див., напр., [38], п. 9.13.8 та [39], наслідок 2.10.33).

2. Нижні оцінки для площі та діаметра образу круга

У цьому розділі наведені леми про нижні оцінки для площі та діаметра образу круга.

Лема 2.1. *Припустимо, що z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$ та $Q\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці z_0 при $p > 2$. Тоді для будь-яких r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < \infty$ виконується співвідношення*

$$|fB(z_0, r_2)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \geqslant |f\overline{B(z_0, r_1)}|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} + \lambda_p \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\,, \tag{2.6}$$

де $\lambda_p = \pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \frac{p-2}{p-1}\,.$

Доведення. Нехай $0 < r_1 < r_2 < \infty$ та $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$. Розглянемо конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ в $\mathbb{C}$, де $A = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r_2\}$ та $C = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| \leqslant r_1\}$. В силу гомеоморфності відображення f, $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ – кільцевий конденсатор в $\mathbb{C}$ і згідно (1.4) маємо

$$\operatorname{cap}_p(f\mathcal{E}) = \operatorname{cap}_p(fA, fC) = \mathrm{M}_p(\Gamma_*),$$

де $\Gamma_* = \Delta(\partial fA, \partial fC; f(A \setminus C))$. Тоді за твердженням 1.2

$$\mathrm{cap}_p(fA, fC) \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}, \tag{2.7}$$

де $q_{z_0}(t) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S(z_0,t)} Q(z)|dz|$ — середнє інтегральне значення по колу $S(z_0, t)$.

З іншого боку, за твердженням 1.3 маємо нерівність

$$\mathrm{cap}_p\,(fA, fC) \geqslant c_p \left(|fA|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |fC|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p}, \tag{2.8}$$

де $c_p = 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}$.

Комбінуючи нерівності (2.7) і (2.8), одержимо

$$2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(|fA|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |fC|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p} \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Останню оцінку можна переписати у наступному вигляді:

$$|fA|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \geqslant |fC|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} + \pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \frac{p-2}{p-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)},$$

де $A = B(z_0, r_1), C = \overline{B(z_0, r_2)}$.

Таким чином, лема 2.1 доведена. □

Зауваження 2.1. При виконанні умов леми 2.1 маємо

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty$$

для будь-якого $\varepsilon_0 > 0$.

Дійсно, вибираючи у лемі 2.1 $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon_0$, отримуємо

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leqslant \frac{1}{\lambda_p} \left(|fB(z_0, \varepsilon_0)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |f\overline{B(z_0, \varepsilon)}|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_p} |fB(z_0, \varepsilon_0)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}.$$

Перейшовши в останній нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$, приходимо до оцінки

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leqslant \frac{1}{\lambda_p} |fB(z_0,\varepsilon_0)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} < \infty.$$

Лема 2.2. *Припустимо, що z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$ та $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Нехай $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці z_0 при $p > 2$, де z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$, $r_0 > 0$. Тоді для будь-якого $R > r_0$ виконується оцінка*

$$|fB(z_0,R)| \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \tag{2.9}$$

де $B(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$.

Доведення. Дійсно, покладаючи у лемі 2.1 $r_1 = r_0$ та $r_2 = R$, приходимо до нерівності

$$|fB(z_0,R)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \geqslant |f\overline{B(z_0,r_0)}|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} + \lambda_p \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_p \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)},$$

де $\lambda_p = \pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \frac{p-2}{p-1}$.

Останню оцінку можна переписати у наступному вигляді

$$|fB(z_0,R)| \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}.$$

Таким чином, лема 2.2 доведена. □

Лема 2.3. *Припустимо, що z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$ та $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення*

$q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r>0$. Нехай $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці z_0 при $p>2$, де z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$, $r_0>0$. Тоді для будь-якого $R>r_0$ виконується оцінка

$$\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\geqslant 2\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \qquad (2.10)$$

де $B(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}\colon |z-z_0|<R\}$.

Доведення. Дійсно, згідно леми 2.2 маємо оцінку

$$|fB(z_0,R)|\geqslant\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \qquad (2.11)$$

для всіх $R>r_0>0$. В силу гомеоморфності відображення f множина $f\overline{B(z_0,R)}$ є компактом та згідно твердження 1.4, отримаємо наступну нерівність

$$\frac{1}{4}\pi\left[\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\right]^2\geqslant|f\overline{B(z_0,R)}|\geqslant|fB(z_0,R)|.$$

З останньої оцінки та (2.11) маємо

$$\frac{1}{4}\pi\left[\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\right]^2\geqslant\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}.$$

Зробивши елементарні перетворення в останній нерівності, приходимо до висновку леми 2.3. □

3. Асимптотична поведінка діаметра образу круга

Тут наведені результати про асимптотичну поведінку діаметра образу круга при кільцевих Q-гомеоморфізмах відносно p-модуля.

Теорема 3.1. *Припустимо, що z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$ та $Q\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{z_0}(r)$ скінченне для м.в. $r>0$. Нехай $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці $z_0\in\mathbb{C}$ при $p>2$, де z_0 – деяка точка в $\mathbb{C}$, $r_0>0$. Тоді виконується оцінка*

$$\liminf_{R\to\infty}\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{p-2}}\geqslant 2\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \qquad (3.12)$$

де $q_{z_0}(t)=\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{S(z_0,t)} Q(z)\,|dz|$ *– середнє інтегральне значення по колу* $S(z_0,t)$*.*

Доведення. Дійсно, легко бачити, що за лемою 2.3 маємо оцінку

$$\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{p-2}}\geqslant 2\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$$

для будь-якого $R>r_0$. Перейшовши в останній нерівності до нижньої границі при $R\to\infty$, отримаємо оцінку (3.12). □

Наслідок 3.1. *Припустимо, що* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *– кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля у точці* z_0 *при* $p>2$*, де* z_0 *– деяка точка в* $\mathbb{C}$*. Нехай для деяких чисел* $r_0>0$*,* $\kappa=\kappa(z_0)>0$ *виконується умова*

$$q_{z_0}(t)\leqslant \kappa\, t^{\alpha}$$

для м.в. $t\in[r_0,+\infty)$*. Якщо* $\alpha\in(0,p-2)$*, то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}}\geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}>0.$$

Якщо $\alpha=0$*, то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{R}\geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}>0.$$

Якщо $\alpha=p-2$*, то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}}\geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}>0,$$

де $B(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}$*.*

Наслідок 3.2. *Припустимо, що* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *– кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля у точці* z_0 *при* $p>2$*, де* z_0 *– деяка точка в* $\mathbb{C}$*. Нехай для деяких чисел* $r_0>1$*,* $\kappa=\kappa(z_0)>0$ *виконується умова*

$$q_{z_0}(t)\leqslant \kappa\, t^{p-2}(\ln t)^{\alpha}$$

для м.в. $t\in[r_0,+\infty)$*. Якщо* $\alpha\in[0,p-1)$*, то*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}}\geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}>0.$$

Якщо $\alpha = p-1$, *то*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} > 0,$$

де $B(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}$.

Зауваження 3.1. При виконанні умов наслідків 3.1 або 3.2 $\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\to\infty$ при $R\to\infty$.

Дійсно, нехай, наприклад, виконується умова наслідку 3.1 при $\alpha\in[0,p-2)$. Тоді, використовуючи нерівність 2.10, отримаємо

$$\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right) \geqslant 2\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \geqslant$$

$$\geqslant 2\kappa^{-\frac{1}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha+1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} = c_0\left(R^{\frac{p-\alpha-2}{p-1}} - r_0^{\frac{p-\alpha-2}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-2}},$$

де $c_0 = 2\left(\frac{p-2}{p-\alpha-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\kappa^{-\frac{1}{p-2}}$.

Звідки одразу випливає, що $\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)\to\infty$ при $R\to\infty$.

4. Екстремальні задачі

У цьому пункті розв'язані екстремальні задачі про мінімізацію асимптотичних функціоналів спотворення діаметра образу круга на деяких класах кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля.

Зафіксуємо точку $z_0\in\mathbb{C}$ та числа $p>2$, $r_0>0$, $\alpha\in[0,p-2)$, $\kappa>0$. Позначимо через $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_1(z_0,r_0,p,\alpha,\kappa)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ відносно p-модуля в точці $z_0\in\mathbb{C}$, для яких знайдеться $Q=Q_f\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ таке, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0 відносно p-модуля, причому

$$q_{z_0}(t)\leqslant\kappa\, t^{\alpha} \tag{4.13}$$

для майже всіх $t>r_0$.

Розглянемо на класі $\mathcal{H}_1$ функціонал

$$\mathcal{P}_\nu(f)=\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{R^\nu},\ \nu>0\,.$$

Теорема 4.1. *Для* $\nu = \frac{p-2-\alpha}{p-2}$, *справедливою є рівність*

$$\min_{f\in\mathcal{H}_1} \mathcal{P}_\nu(f) = 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\,\nu^{-\frac{p-1}{p-2}}.$$

Крім того, мінімум функціоналу досягається на гомеоморфізмі

$$f_1 = \begin{cases} c\,|z-z_0|^{\nu}\,\frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0\,, \end{cases}$$

де $c = \kappa^{\frac{1}{2-p}}\,\nu^{-\frac{p-1}{p-2}}$.

Доведення. Дійсно, використовуючи наслідок 3.1 та умову (4.13), отримуємо оцінку

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Тоді для будь-якого гомеоморфізму $f\in\mathcal{H}_1$ виконується нерівність

$$\mathcal{P}_\nu(f) \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Побудуємо гомеоморфізм $f_1\in\mathcal{H}_1$ на якому досягається мінімум функціонала $\mathcal{P}_\nu$. Нехай $f_1:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, де

$$f_1(z) = \begin{cases} \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} |z-z_0|^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}\,\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\,, & z\neq z_0 \\ 0, & z = z_0\,. \end{cases}$$

Легко бачити, що при відображенні f_1 круг $\overline{B(z_0,R)}$ перетворюється на круг $\overline{B(0,\widetilde{R})}$ з радіусом

$$\widetilde{R} = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}.$$

Тому виконується рівність

$$\mathcal{P}_\nu(f_1) = \lim_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam} f_1\left(\overline{B(z_0,R)}\right)}{R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\overline{B(0,\widetilde{R})}}{R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2\widetilde{R}}{R^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}} = 2\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Покажемо, що відображення f_1 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією $Q(z)=\kappa\,|z-z_0|^{\alpha}$ в точці z_0. Очевидно, що $q_{z_0}(t)=\kappa\,t^{\alpha}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}(z_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<\infty$. Зауважимо, що відображення f_1 кільце $\mathbb{A}(z_0,r_1,r_2)$ перетворює на кільце $\widetilde{\mathbb{A}}(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, де

$$\widetilde{r}_i=\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-2-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\,r_i^{\frac{p-2-\alpha}{p-2}}\,,\quad i=1,\,2. \tag{4.14}$$

Позначимо через $\Gamma=\Delta(S_1,S_2;\mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують кола $S_1=S(z_0,r_1)$ та $S_2=S(z_0,r_2)$ в кільці $\mathbb{A}=\mathbb{A}(z_0,r_1,r_2)$. Тоді за твердженням 1.1, p-модуль сім'ї кривих $f_1\Gamma$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=2\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(\widetilde{r}_2^{\frac{p-2}{p-1}}-\widetilde{r}_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Підставляючи в попередню рівність значення $\widetilde{r}_1$ та $\widetilde{r}_2$, визначені у формулі (4.14), отримуємо

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=2\pi\,\kappa\left(\frac{p-2-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}\left(r_2^{\frac{p-2-\alpha}{p-1}}-r_1^{\frac{p-2-\alpha}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Зауважимо, що останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=\frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\,q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}\,,$$

де $q_{z_0}(t)=\kappa\,t^{\alpha}$.

Отже, за твердженням 1.2, гомеоморфізм f_1 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією $Q(z)=\kappa\,|z-z_0|^{\alpha}$. □

Зафіксуємо $z_0\in\mathbb{C}$, $p>2$ та $\kappa>0$. Далі позначимо через $\mathcal{H}_2=\mathcal{H}_2(z_0,p,\kappa)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ відносно p-модуля в точці $z_0\in\mathbb{C}$, для яких знайдеться $Q=Q_f\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ таке, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0 відносно p-модуля, причому

$$q_{z_0}(t)\leqslant\kappa\,t^{p-2} \tag{4.15}$$

для м.в. $t\in(e,+\infty)$ та

$$q_{z_0}(t)\leqslant\kappa_p$$

для м.в. $t\in(0,e]$, де $\kappa_p=\kappa\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p-1}e^{p-2}$.

Розглянемо на класі $\mathcal{H}_2$ функціонал

$$\mathcal{L}_{\nu}(f)=\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\nu}},\ \nu>0\,.$$

Теорема 4.2. *Для $\nu = \frac{p-1}{p-2}$, справедливою є рівність*

$$\min_{f\in\mathcal{H}_2} \mathcal{L}_\nu(f) = 2\,\nu^{-\nu}\kappa^{\frac{1}{2-p}}.$$

Крім того, мінімум функціоналу досягається на гомеоморфізмі

$$f_2 = \begin{cases} k_0\,(\ln|z-z_0|)^{\frac{p-1}{p-2}}\,\frac{z-z_0}{|z-z_0|}, \ |z-z_0| > e, \\ k_0 e^{-1}(z-z_0), \ |z-z_0| \leqslant e, \end{cases}$$

де $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Доведення. Дійсно, використовуючи наслідок 3.1 та умову (4.15), отримуємо оцінку

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Нехай $\nu = \frac{p-1}{p-2}$. Тоді для будь-якого гомеоморфізму $f \in \mathcal{H}_2$ виконується нерівність

$$\mathcal{L}_\nu(f) \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Побудуємо гомеоморфізм $f_2 \in \mathcal{H}_2$ на якому досягається мінімум функціонала $\mathcal{L}_\nu$.

Нехай $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, де

$$f_2(z) = \begin{cases} k_0\,(\ln|z-z_0|)^{\frac{p-1}{p-2}}\,\frac{z-z_0}{|z-z_0|}, \ |z-z_0| > e, \\ k_0 e^{-1}(z-z_0), \ |z-z_0| \leqslant e, \end{cases}$$

та $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Легко перевірити, що f_2 відображає круг $\overline{B(z_0,R)}$ на круг $\overline{B(0,\widetilde{R})}$, де

$$\widetilde{R} = \begin{cases} k_0\,(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}, \ R > e, \\ k_0\,e^{-1}R, \ R \leqslant e. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam} f_2\left(\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} = \liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\overline{B(0,\widetilde{R})}}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} =$$

$$= \liminf_{R\to\infty} \frac{2\widetilde{R}}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} = 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Покажемо, що відображення f_2 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} \kappa\,|z-z_0|^{p-2}, \ |z-z_0| > e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1-p} e^{p-2}, \ |z-z_0| \leqslant e \end{cases} \tag{4.16}$$

у точці z_0. Очевидно, що

$$q_{z_0}(t) = \begin{cases} \kappa\, t^{p-2}, \ t > e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1-p} e^{p-2}, \ 0 < t \leqslant e. \end{cases} \tag{4.17}$$

Позначимо через $\Gamma = \Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують кола $S_1 = S(z_0, r_1)$ та $S_2 = S(z_0, r_2)$ в кільці $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$. Покажемо, що для відображення f_2 виконується рівність

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}, \tag{4.18}$$

де $q_{z_0}(t)$ – середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, t)$ та визначається за формулою (4.17).

Випадок 1. Нехай $0 < r_1 < r_2 \leqslant e$. Зауважимо, що гомеоморфізм f_2 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\, e^{-1} r_i, \ i = 1, 2$. Тоді за твердженням 1.1, p-модуль сім'ї кривих $f_2\Gamma$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} k_0^{2-p} e^{p-2} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p} =$$

$$= 2\pi\kappa\, e^{p-2} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Очевидно, що останню рівність можна переписати у вигляді (4.18).

Випадок 2. Нехай $e < r_1 < r_2 < \infty$. Легко перевірити, що гомеоморфізм f_2 відображає кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\,(\ln r_i)^{\frac{p-1}{p-2}}, \ i = 1, 2$. Тоді за твердженням 1.1, маємо рівність

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} k_0^{2-p} \left(\ln r_2 - \ln r_1\right)^{1-p} =$$

$$= 2\pi\kappa\left(\ln r_2 - \ln r_1\right)^{1-p}.$$

У цьому випадку також легко бачити, що останнє співвідношення можна записати у вигляді (4.18).

Випадок 3. Нехай $0 < r_1 \leqslant e < r_2 < \infty$. Очевидно, що гомеоморфізм f_2 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_1 = k_0\, e^{-1} r_1$, $\widetilde{r}_2 = k_0\,(\ln r_2)^{\frac{p-1}{p-2}}$ та за твердженням 1.1 знаходимо

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = 2\pi\kappa\left(\ln r_2 - e^{-\frac{p-2}{p-1}} r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Звідси, використовуючи адитивність визначеного інтеграла, приходимо до рівності

$$\mathrm{M}_p(f_2\Gamma) = 2\pi\kappa\left(\ln r_2 - e^{-\frac{p-2}{p-1}} r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}$$

$$= 2\pi\kappa\left(\frac{p-2}{p-1} e^{-\frac{p-2}{p-1}} \int\limits_{r_1}^{e} \frac{dt}{t^{p-1}} + \int\limits_{e}^{r_2} \frac{dt}{t}\right)^{1-p} = \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Отже, за твердженням 1.2, гомеоморфізм f_2 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці z_0 з функцією Q, визначеною формулою (4.16). □

Зафіксуємо $z_0 \in \mathbb{C}$, $p > 2$, $\alpha \in [0, p-1)$ і $\kappa > 0$. Позначимо через $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3(z_0, p, \alpha, \kappa)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ відносно p-модуля в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, для яких знайдеться $Q = Q_f\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$ таке, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0 відносно p-модуля, причому

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{p-2} (\ln t)^{\alpha} \tag{4.19}$$

для м.в. $t \in (e, +\infty)$ та

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa_p$$

для м.в. $t \in (0, e]$, де $\kappa_p = \kappa\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} e^{p-2}$.

Розглянемо на класі $\mathcal{H}_3$ функціонал

$$\mathcal{L}_\nu(f) = \liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0, R)}\right)}{(\ln R)^{\nu}}, \quad \nu > 0.$$

Теорема 4.3. *Для* $\nu = \frac{p-\alpha-1}{p-2}$, *справедливою є рівність*

$$\min_{f\in\mathcal{H}_3} \mathcal{L}_\nu(f) = 2\,\nu^{-\frac{p-1}{p-2}}\kappa^{\frac{1}{2-p}}.$$

Крім того, мінімум функціоналу досягається на гомеоморфізмі

$$f_3 = \begin{cases} k_0\left(\ln|z-z_0|\right)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}\frac{z-z_0}{|z-z_0|},\ |z-z_0|>e,\\ k_0e^{-1}(z-z_0),\ |z-z_0|\leqslant e,\end{cases}$$

де $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Доведення. Дійсно, використовуючи наслідок 3.2 та умову (4.19), отримуємо оцінку

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Нехай $\nu = \frac{p-\alpha-1}{p-2}$. Тоді для будь-якого гомеоморфізму $f\in\mathcal{H}_3$ виконується нерівність

$$\mathcal{L}_\nu(f) \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Побудуємо гомеоморфізм $f_3\in\mathcal{H}_3$ на якому досягається мінімум функціонала $\mathcal{L}_\nu$.

Нехай $f_3:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, де

$$f_3(z) = \begin{cases} k_0\left(\ln|z-z_0|\right)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}\frac{z-z_0}{|z-z_0|},\ |z-z_0|>e,\\ k_0e^{-1}(z-z_0),\ |z-z_0|\leqslant e,\end{cases}$$

та $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Легко перевірити, що f_3 відображає круг $\overline{B(z_0,R)}$ на круг $\overline{B(0,\widetilde{R})}$, де

$$\widetilde{R} = \begin{cases} k_0\,(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}},\ R>e,\\ k_0\,e^{-1}R,\ R\leqslant e.\end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam} f_3\left(\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}} = \liminf_{R\to\infty}\frac{\operatorname{diam}\overline{B(0,\widetilde{R})}}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}} =$$

$$= \liminf_{R\to\infty} \frac{2\widetilde{R}}{(\ln R)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}} = 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Покажемо, що відображення f_3 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} \kappa\,|z-z_0|^{p-2}(\ln|z-z_0|)^{\alpha},\ |z-z_0|>e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} e^{p-2},\ |z-z_0|\leqslant e \end{cases} \tag{4.20}$$

у точці z_0. Очевидно, що

$$q_{z_0}(t) = \begin{cases} \kappa\,t^{p-2}(\ln t)^{\alpha},\ t>e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} e^{p-2},\ 0<t\leqslant e. \end{cases} \tag{4.21}$$

Позначимо через $\Gamma = \Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують кола $S_1 = S(z_0, r_1)$ та $S_2 = S(z_0, r_2)$ в кільці $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$.

Покажемо, що для відображення f_3 виконується рівність

$$\mathrm{M}_p(f_3\Gamma) = \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}, \tag{4.22}$$

де $q_{z_0}(t)$ – середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, t)$ та визначається за формулою (4.21).

Випадок 1. Нехай $0 < r_1 < r_2 \leqslant e$. Зауважимо, що гомеоморфізм f_3 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\,e^{-1} r_i,\ i = 1,\,2$. Тоді за твердженням 1.1, p-модуль сім'ї кривих $f_3\Gamma$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}_p(f_3\Gamma) = 2\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} k_0^{2-p} e^{p-2} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p} =$$

$$= 2\pi\kappa\left(\frac{p-\alpha-1}{p-1}\right)^{p-1} e^{p-2} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Очевидно, що останню рівність можна переписати у вигляді (4.22).

Випадок 2. Нехай $e < r_1 < r_2 < \infty$. Легко перевірити, що гомеоморфізм f_3 відображає кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\,(\ln r_i)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}},\ i = 1,\,2$. Тоді за твердженням 1.1, маємо рівність

$$\mathrm{M}_p(f_3\Gamma) = 2\pi\,\kappa\left(\frac{p-1}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} \left((\ln r_2)^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}} - (\ln r_1)^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

У цьому випадку також легко бачити, що останнє співвідношення можна записати у вигляді (4.22).

Випадок 3. Нехай $0 < r_1 \leqslant e < r_2 < \infty$. Очевидно, що гомеоморфізм f_3 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_1 = k_0\, e^{-1} r_1$, $\widetilde{r}_2 = k_0\, (\ln r_2)^{\frac{p-\alpha-1}{p-2}}$ та за твердженням 1.1 знаходимо

$$\mathrm{M}_p(f_3\Gamma) = 2\pi\kappa \left(\frac{p-1}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} \left((\ln r_2)^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}} - e^{\frac{p-2}{1-p}} r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Звідси, використовуючи адитивність визначеного інтеграла, приходимо до рівності

$$\mathrm{M}_p(f_3\Gamma) = 2\pi\kappa \left(\frac{p-1}{p-\alpha-1}\right)^{1-p} \left((\ln r_2)^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}} - e^{\frac{p-2}{1-p}} r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}$$

$$= 2\pi\kappa \left(\frac{p-2}{p-\alpha-1} e^{\frac{p-2}{1-p}} \int\limits_{r_1}^{e} t^{\frac{1}{1-p}}\, dt + \int\limits_{e}^{r_2} (\ln t)^{\frac{\alpha}{1-p}} \frac{dt}{t}\right)^{1-p} =$$

$$= \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Отже, за твердженням 1.2, гомеоморфізм f_3 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці z_0 з функцією Q визначеною формулою (4.20). $\square$

Зафіксуємо точку $z_0 \in \mathbb{C}$ та числа $p > 2$, $\kappa > 0$. Далі позначимо через $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_4(z_0, p, \kappa)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ відносно p-модуля в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, для яких знайдеться $Q = Q_f\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$ таке, що f є кільцевим Q-гомеоморфізмом у точці z_0 відносно p-модуля, причому

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{p-2} (\ln t)^{p-1} \tag{4.23}$$

для м.в. $t \in (e^e, +\infty)$ та

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa_p$$

для м.в. $t \in (0, e^e]$, де $\kappa_p = \kappa \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1-p} e^{e(p-2)}$.

Розглянемо на класі $\mathcal{H}_4$ функціонал

$$\mathcal{L}_\nu(f) = \liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0, R)}\right)}{(\ln\ln R)^\nu}, \ \nu > 0.$$

Теорема 4.4. *Для* $\nu = \frac{p-1}{p-2}$, *справедливою є рівність*

$$\min_{f \in \mathcal{H}_4} \mathcal{L}_\nu(f) = 2\,\nu^{-\nu} \kappa^{\frac{1}{2-p}}.$$

Крім того, мінімум функціоналу досягається на гомеоморфізмі

$$f_4 = \begin{cases} k_0 \left(\ln\ln|z-z_0|\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & |z-z_0| > e^e, \\ k_0 e^{-e}(z-z_0), & |z-z_0| \leqslant e^e, \end{cases}$$

де $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Доведення. Дійсно, використовуючи наслідок 3.2 та умову (4.23), отримуємо оцінку

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(f\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Нехай $\nu = \frac{p-1}{p-2}$. Тоді для будь-якого гомеоморфізму $f \in \mathcal{H}_4$ виконується нерівність

$$\mathcal{L}_\nu(f) \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Побудуємо гомеоморфізм $f_4 \in \mathcal{H}_4$ на якому досягається мінімум функціонала $\mathcal{L}_\nu$.

Нехай $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, де

$$f_4(z) = \begin{cases} k_0 \left(\ln\ln|z-z_0|\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & |z-z_0| > e^e, \\ k_0 e^{-e}(z-z_0), & |z-z_0| \leqslant e^e, \end{cases}$$

та $k_0 = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$.

Легко перевірити, що f_4 відображає круг $\overline{B(z_0,R)}$ на круг $\overline{B(0,\widetilde{R})}$, де

$$\widetilde{R} = \begin{cases} k_0 \left(\ln\ln R\right)^{\frac{p-1}{p-2}}, & R > e^e, \\ k_0\, e^{-e} R, & R \leqslant e^e. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam} f_4\left(\overline{B(z_0,R)}\right)}{(\ln\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} = \liminf_{R\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\overline{B(0,\widetilde{R})}}{(\ln\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} =$$

$$= \liminf_{R\to\infty} \frac{2\widetilde{R}}{(\ln\ln R)^{\frac{p-1}{p-2}}} = 2\,\kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Покажемо, що відображення f_4 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} \kappa\,|z-z_0|^{p-2}(\ln|z-z_0|)^{p-1}, \ |z-z_0| > e^e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1-p} e^{e(p-2)}, \ |z-z_0| \leqslant e^e \end{cases} \tag{4.24}$$

у точці z_0. Очевидно, що

$$q_{z_0}(t) = \begin{cases} \kappa\,t^{p-2}(\ln t)^{p-1}, \ t > e^e, \\ \kappa\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{1-p} e^{e(p-2)}, \ 0 < t \leqslant e^e. \end{cases} \tag{4.25}$$

Позначимо через $\Gamma = \Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують кола $S_1 = S(z_0, r_1)$ та $S_2 = S(z_0, r_2)$ в кільці $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$. Покажемо, що для відображення f_4 виконується рівність

$$\mathrm{M}_p(f_4\Gamma) = \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}, \tag{4.26}$$

де $q_{z_0}(t)$ – середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, t)$ та визначається за формулою (4.25).

Випадок 1. Нехай $0 < r_1 < r_2 \leqslant e^e$. Зауважимо, що гомеоморфізм f_4 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\,e^{-e} r_i, \ i = 1, 2$. Тоді за твердженням 1.1, p-модуль сім'ї кривих $f_4\Gamma$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{M}_p(f_4\Gamma) = 2\pi\kappa\,e^{e(p-2)} \left(r_2^{\frac{p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Очевидно, що останню рівність можна переписати у вигляді (4.26).

Випадок 2. Нехай $e^e < r_1 < r_2 < \infty$. Легко перевірити, що гомеоморфізм f_4 відображає кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_i = k_0\,(\ln\ln r_i)^{\frac{p-1}{p-2}}, \ i = 1, 2$. Тоді за твердженням 1.1, маємо рівність

$$\mathrm{M}_p(f_4\Gamma) = 2\pi\,\kappa\,(\ln\ln r_2 - \ln\ln r_1)^{1-p}.$$

У цьому випадку також легко бачити, що останнє співвідношення можна записати у вигляді (4.26).

Випадок 3. Нехай $0 < r_1 \leqslant e^e < r_2 < \infty$. Очевидно, що гомеоморфізм f_4 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ на кільце $\mathbb{A}(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, де $\widetilde{r}_1 = k_0\, e^{-e} r_1$, $\widetilde{r}_2 = k_0\,(\ln\ln r_2)^{\frac{p-1}{p-2}}$ та за твердженням 1.1 знаходимо

$$\mathrm{M}_p(f_4\Gamma) = 2\pi\kappa\left(\ln\ln r_2 - e^{\frac{e(p-2)}{1-p}}\, r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Звідси, використовуючи адитивність визначеного інтеграла, приходимо до рівності

$$\mathrm{M}_p(f_4\Gamma) = 2\pi\kappa\left(\ln\ln r_2 - e^{\frac{e(p-2)}{1-p}}\, r_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p} =$$

$$= 2\pi\kappa\left(\frac{p-2}{p-1} e^{\frac{e(p-2)}{1-p}} \int\limits_{r_1}^{e^e} t^{\frac{1}{1-p}}\,dt + \int\limits_{e^e}^{r_2} \frac{dt}{t\ln t}\right)^{1-p} = \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Отже, за твердженням 1.2, гомеоморфізм f_4 є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці z_0 з функцією Q, визначеною формулою (4.24). $\Box$

Зауваження 4.1. Відзначимо, що із теорем 4.1, 4.2, 4.3 та 4.4 випливає точність оцінок, отриманих у наслідках 3.1 та 3.2.

Література

[1] Gehring, F.W. (1971). Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space. *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, 66*, 175–193.

[2] Ryazanov, V.I., Sevost'yanov, E.A. (2007). Equicontinuous classes of ring Q-homeomorphisms. *Siberian Mathematical Journal, 48*(6), 1093–1105.

[3] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Q-homeomorphisms. *Complex analysis and dynamical systems Contemp. Math., 364*, 193–203.

[4] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann.Acad. Sci. Fenn. Math., 30*(1), 49–69.

[5] Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory.* Springer Math. Monogr., New York.

[6] Salimov, R. (2008). ACL and differentiability of a generalization of quasiconformal maps. *Izvestiya: Mathematics, 72*(5), 977–984.

[7] Golberg, A. (2009). Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, 218–228.

[8] Golberg, A. (2010). Integrally quasiconformal mappings in space. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine, 7*(2), 53–64.

[9] Golberg, A., Salimov, R. (2014). Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module. *Complex Variables and Elliptic Equations, 59*(1), 91–98.

[10] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). Distortion estimates under mappings with controlled p-module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math 5*(LXIII), 95–114.

[11] Salimov, R. (2011). On finitely Lipschitz space mappings. *Siberian Elecronic Mathematical Reports, 8*, 284–295.

[12] Салимов, Р.Р. (2012). Об оценке меры образа шара. *Сиб. мат. журн., 53*(6), 920–930.

[13] Салимов, Р.Р. (2013). К теории кольцевых Q–гомеоморфизмов относительно p–модуля. *Укр. мат. вісник, 10*(3), 379—396.

[14] Салимов, Р.Р. (2013). Об одном свойстве кольцевых Q–гомеоморфизмов относительно p–модуля. *Укр. мат. журн., 65*(5), 728–733.

[15] Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2012). Analogs of the Ikoma-Schwartz lemma and Liouville theorem for mappings with unbounded characteristics. *Ukrainian Math. J., 63*(10), 1551–1565.

[16] Клищук, Б.А., Салимов, Р.Р. (2016). Экстремальная задача для площади образа круга. *Доповіді НАН України, 10*, 22–27.

[17] Клищук, Б.А., Салимов, Р.Р. (2017). Нижние оценки для площади образа круга. *Уфимск. матем. журн., 9*(2), 56–62.

[18] Клищук, Б.А., Салимов, Р.Р. (2017). Экстремальная задача для площади образа круга. *Зап. научн. сем. ПОМИ, 456*, 160–171.

[19] Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii, 50*(1), 36–43.

[20] Клищук, Б.А., Салимов, Р.Р. (2019). Нижние оценки объема образа шара. *Укр. мат. журн., 71*(6), 774–785.

[21] Cristea, M. (2014). Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Var. Eliptic Equ., 59*(2), 232–246.

[22] Cristea, M. (2016). Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Var. Eliptic Equ., 61*(5), 623–643.

[23] Cristea, M. (2019). Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Var. Eliptic Equ., 64*(4), 676–684.

[24] Маркиш, А.А., Салимов, Р.Р., Севостьянов, Е.А. (2018). Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений. *Укр. мат. журн., 70*(11), 1553–1562.

[25] Gol'dshtein, V., Gurov, L., Romanov, A. (1995). Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces. *Israel J. Math., 91*(1–3), 31–60.

[26] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled p-module. *J. Anal. Math., 127*, 303–328.

[27] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes. *Complex Analysis and Operator Theory, 10*, 881–901.

[28] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2017). Estimates for jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module. *Complex Anal. Oper. Theory, 11*(7), 1521–1542.

[29] Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module. *Contemporary Mathematics, 667*, 83–103.

[30] Sevost'yanov, E., Skvortsov, S., Dovhopiatyi, P. (2021). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences, 252*(4), 541–557.

[31] Sevost'yanov, E., Ukhlov, A. (2020). Sobolev Mappings and Moduli Inequalities on Carnot Groups. *Укр. мат. вісн., 17*(2), 215–233; transl. in *Journal of Mathematical Sciences, 249*(5), 754–768.

[32] Golberg, A., Salimov, R. (2020). Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations, 65*(1), 6–21.

[33] Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2021). Logarithmic Asymptotics of the Nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami Equation. *Ukr. Math. J., 73*, 463–478.

[34] Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2022). Nonlinear Beltrami equation and asymptotics of its solution. *J. Math. Sci., 264*(4), 441–454.

[35] Martio, O., Rickman, S., Väisälä, J. (1969). Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 448*, 1–40.

[36] Шлык, В.А. (1993). О равенстве p-емкости и p-модуля. *Сиб. мат. журн., 34*(6), 216–221.

[37] Mazya, V. (2003). Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces. *Contemp. Math., 338*, 307–340.

[38] Берже, М. (1984). *Геометрия, Т1.* М., Мир.

[39] Федерер, Г. (1987). *Геометрическая теория меры.* Наука, Москва.

Відомості про авторів

Ігор Васильович Пєтков
Національний університет кораблебудування, Миколаїв, Україна
E-Mail: `igorpetkov83@gmail.com`

Руслан Радікович Салімов
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: `ruslan.salimov1@gmail.com`

Марія Володимирівна Стефанчук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: `stefanmv43@gmail.com`