Український математичний вісник
Том 20 **(2023)**, № 2, 258 – 268
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-2-6

Реконструкція розкладу Фур'є періодичної сили, що діє на осцилятор

Володимир Ф. Щербак

(Представлена Р. М. Таранцем)

Анотація. Розглядається задача визначення періодичної зовнішньої сили, яка діє на нелінійну автоколивальну систему загального виду (осцилятор Лієнара). Запропоновано схему асимптотичного оцінювання невідомих коефіцієнтів часткової суми ряду Фур'є, яка апроксимує периодичне збурення осцилятора, за даними про рух вихідної системи. Методика базується на методі синтеза інваріантних співвідношень, який дозволяє знаходити залежності між змінними на траєкторіях побудованої спеціальним чином розширеної динамічної системи та визначати шукані невідомі як функції від відомих величин. Наведено результати чисельного моделювання процесу асимптотичного оцінювання параметрів зовнішньої сили для моделі осцилятора Дуффінга.

2010 MSC. 34C15, 34D20.

Ключові слова та фрази. Коефіцієнти ряду Фур'є, осцилятор Лієнара, асимптотичне оцінювання, інваріантні співвідношення.

1. Вступ

Проблема оцінювання частоти, амплітуди та фази зовнішньої сили, яка діє на механічну систему, знаходить відображення у достатньої кількості публікацій як у минулі так і в сучасні часи. Причина такого інтересу полягає в використанні відповідних методик в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, для механічних систем перетворення кінетичної енергії коливань, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму через обертові механізми, для компенсації гармонійних збурень в алгоритмах автоматичного керування, у адаптивної фільтрації при обробці сигналів, тощо. В принципі, метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетврення Лапласа

Стаття надійшла в редакцію 12.01.2023

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

дають потенційне рішення відповідних задач. Однак ці методи можуть не підходити, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних в реальному часі.

Незважаючи на відносну простоту задачі визначення частоти, амплітуди та фази коливань підходи до їх розв'язання використовують досить складний апарат сучасних методів прикладної математики. Алгоритм нелінійного представлення синусоїдального сигналу з подальшим застосуванням нелінійного спостерігача Луєнбергера розглянуто у статті [15], де на базі загальної теорії нелінійного спостереження автори будують досить складну конструкцію відповідного спостерігача. В роботі [14] після представлення синусоїдального сигналу як лінійно параметризованої форми розроблено кілька адаптивних законів в яких з використовуючи апарату теорії ковзного режиму керування отримано оцінки параметрів синусоіди. Для мультисинусоїдального сигналу в [8] побудоано оцінювач з використання стандартного градієнтного алгоритму. Задача ідентифікації невідомої частоти синусоїдального збурення, яке діє на лінійне диференціальне рівняння першого порядку вирішується в роботі [1]. Слід зазначити роботу [7], в який також представлено підхід, заснований на побудові спостерігачів станів але вже для визначення параметрів періодичної сили, яка діє на лінійний осцилятор. На першому етапі доведена розв'язаність задачі оцінювання коефіцієнтів ряду Фур'є, далі запропоновано схему спостереження відрізку ряду, який який апроксимує періодичну силу з відомою частотою. На другому етапі пропонується за результатами першого етапу побудувати спостерігач вже для невідомої частоти сигналу.

Метою даної роботи є поширення методу синтезу інваріантних співвідношень на задачі визначення параметрів зовнішнього впливу на механічну систему з власною динамікою. Буде розглянуто відносно простий випадок задачі реконструції діючої сили, коли інформація про рух максимальна – вимірюється повний фазовий вектор. Узагальнення на більш складні конструкції систем вхід - вихід, у тому числі і із залученням інформації про вихід, отриманий на декількох траєкторіях [3], можуть бути проведені з використанням описаного нижче підходу і є предметом окремого дослідження.

Для отримання асимптотичних оцінок коефіцієнтів ряду Фур'є використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [5], який було призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження дозволила синтезувати між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткові зв'язки, що виникають в процесі руху її розширеної динамічної моделі [2,6]. В роботі запропоновано методику реконструкції розкладу Фур'є періодичної зовнішньої сили. Доведено асимптотичну збіжність оцінок невідомих до їх справжнього значення. Наведено результати чисельного моделюання процесу асимптотичного оцінювання параметрів зовнішньої сили для моделі осцилятора Дуффінга. Варто зазначити, що більш загальний підхід, ніж метод інваріантних співвідношень, до задач спостереження було запропоновано в роботах [9, 10] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем $I\&I$ (Input and Invariance).

2. Задача відновлення зовнішньої періодичної сили

В якості моделі автоколивної системи будемо розглядати рівняння вимушеного руху осцилятора Лієнара – диференціального рівняння другого порядку, яке моделює коливання матеріальної точки

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = u(t). \tag{1}$$

Тут $x(t)$ – відхилення точки від початку координат в момент t, $\dot{x}(t)$ – швидкість відхилення, множник $f(x(t))$ – характеризує закон дисипації, а функція $g(x(t))$ потенціальні сили, $u(t)$ – зовнішня періодична сила, що діє на осцилятор і яку далі представимо у вигляді її апроксімаїї – часткової суми ряду Фур'є

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1}\cos k\omega t + a_{2k}\sin k\omega t).$$

Зауваження. Проблеми визначення умов обмеженості коливань, існування періодичних розв'язків, наявності граничних циклів тощо стосовно диференціального рівняння (1) є предметом багатьох досліджень. Не розглядаючи ті чи інші якісні властивості розв'язків рівняння Лієнара, далі нам буде достатньо припущення, що вихідне рівняння моделює процес перманентних коливань реального об'єкту під дією періодичної сили, отже його розв'язок – функції $x(t), \dot{x}(t)$ будемо вважати обмеженими та коректно визначеними функціями часу на $[0, \infty)$.

Перепишемо (1) у формі системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Лієнара [4] за формулами

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t)),$$

де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma)d\sigma$. В результаті маємо

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - F(x_1(t)),\ \dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)) + u(t). \tag{2}$$

Будемо вважати, що функції $f(x), g(x)$, довжина n відрізку ряду Фур'є, частота ω є відомими. Передбачається також, що коливання осцилятора вимірюються, тобто значення компонент фазового вектора $x(t), \dot{x}(t)$, а отже і $x_1(t), x_2(t)$ є відомими у будь який момент часу. За таких умов задача реконструкції зовнішньої періодичної сили полягає у визначенні невідомих коефіцієнтів $a_i,\ i = \overline{0, 2n}$ за даними про рух осцилятора. Такими даними є функції часу $x_1(t), x_2(t)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням тільки цих значень. Зокрема, далі вважатимемо відомим будь-який розв'язок задачі Коші для поки що невизначеної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(t, \xi, x_1(t), x_2(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^{2n+1}, \tag{3}$$

розмірність $2n+1$ якої повинна дорівнювати числу невідомих, а права частина $U(t, \xi, x_1, x_2)$ задовольняти достатнім умовам теорем існування розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея методу інваріантних співвідношень полягає в формуванні зв'язків, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3), між $x_1(t), x_2(t), \xi(t)$ – відомим фазовим вектором і розв'язком задачі Коші для додаткової системи (3) та шуканими параметрами $a_i,\ i = \overline{0, 2n}$ вихідної системи. В наступних розділах за цим методом буде розглянута

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки коефіцієнтів $a_i,\ i = \overline{0, 2n}$ за даними про $x_1(t), x_2(t)$ системи диференціальних рівнянь (2).

3. Побудова інваріантних співвідношень

Будемо шукати додаткові співвідношення на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3) у вигляді

$$a_i = \Psi_i(t, x_1, x_2) + \xi_i(t),\ i = \overline{0, 2n}. \tag{4}$$

Як і права частина $U(t, \xi, x_1, x_2)$ системи диференціальних рівнянь (3), функції $\Psi_i(t, x_1, x_2),\ i = \overline{0, 2n}$ поки що невизначені. Передбачається, що ці функції є неперервно диференційованими функціями своїх аргументів. Введемо у розгляд відхилення $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})^T$ від співвідношень (4), зробивши у вихідних рівняннях заміну параметрів a_i за формулами

$$\varepsilon_i = a_i - \xi_i - \Psi_i(t, x_1, x_2),\ i = \overline{0, 2n}. \tag{5}$$

Якщо буде встановлено, що при виборі тим чи іншим чином вільних функцій $\xi_i(t), \Psi_i(t,x_1,x_2)$ на деяких траєкторіях (2), (3) має місце тотожність $\|\varepsilon(t)\| \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях і саме для таких функцій рівності (4) стають інваріантними співвідношеннями для розширеної системи диференціальних рівнянь, а відтак безпосередньо визначають значення $a_i,\ i=\overline{0,2n}$.

З урахуванням заміни (5) рівняння $\dot{a}_i = 0$ перетворюються в диференціальні співвідношення

$$\begin{gathered}\dot{\varepsilon}_i+\dot{\xi}_i=-\Psi'_{it}-\Psi'_{ix_1}[x_2-F(x_1)]-\Psi'_{ix_2}\{-g(x_1)+\Psi_0+\xi_0+\varepsilon_0+\\+\sum_{k=1}^{n}[(\Psi_{2k-1}+\xi_{2k-1}+\varepsilon_{2k-1})\cos k\omega t+(\Psi_{2k}+\xi_{2k}+\varepsilon_{2k})\sin k\omega t]\}.\end{gathered}\tag{6}$$

Тут $\Psi'_{ix_j}=\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(t,x_1,x_2),\ \Psi'_{it}=\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}(t,x_1,x_2),\ i=\overline{0,2n},\ j=1,2.$

На першому етапі визначимо структуру допоміжної системи диференціальних рівнянь (3). Для цього виберемо з попередніх рівностей усі доданки, які не залежать від відхилень і покладемо

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_i=-\Psi'_{it}-\Psi'_{ix_1}[x_2-F(x_1)]-\Psi'_{ix_2}\{-g(x_1)+\Psi_0+\xi_0+\\+\sum_{k=1}^{n}[(\Psi_{2k-1}+\xi_{2k-1})\cos k\omega t+(\Psi_{2k}+\xi_{2k})\sin k\omega t]\}.\end{gathered}\tag{7}$$

За таким вибором маємо, що вразі $\xi_i(t)$ є будь-яким розв'язком задачі Коші для цієї системи, то ті доданки, які залишилися в співвідношеннях (6), утворюють лінійні однорідні рівняння відносно відхилень $\varepsilon_i(t)$

$$\dot{\varepsilon}_i=-\Psi'_{ix_2}[\varepsilon_0+\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{2k-1}\cos k\omega t+\varepsilon_{2k}\sin k\omega t)],\tag{8}$$

які допускають тривіальний розв'язок $\varepsilon(t)\equiv 0$.

Таким чином, на першому етапі побудови оцінок параметрів зовнішнього навантаження отримано сім'ю додаткових систем виду (7), яка залежить від поки що вільних функцій $\Psi_i(t,x_1,x_2), i=\overline{0,2n}$ та їхніх похідних. Кожна з них, разом з вихідною системою (2), перетворює на деяких траєкторіях рівності (4) в інваріантні співвідношення, за якими безпосередньо можуть бути знайдені параметри a_i. На інших траєкторіях системи (2), (7) з'являються ненульові доданки $\varepsilon_i(t)$.

4. Стабілізації відхилень

Оскільки невідомо на яких траєкторіях системи (2), (7) рівності (4) перетворюються в інваріантні співвідношення, то природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Psi_i(t,x_1,x_2)$ таким чином, щоб доданки $\varepsilon_i(t), i = \overline{0,2n}$ в формулах (5) асимптотично прямували до нуля. Відповідь на це питання становить зміст другого етапу процедури синтезу інваріантних співвідношень.

Використовуючи множники $\Psi_{i}{}'_{x_2}, i = \overline{0,2n}$ в рівняннях (8) як керування, розглянемо задачу їх вибору з умов глобальної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку: $\forall\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \in R^{2n+1}$: $\lim\limits_{t\to\infty} \|\varepsilon(t,\varepsilon_0)\| = 0$. З цією метою введемо у розгляд знаковизначену функцію $V = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon_i^2$ та запишемо її похідну, взяту в силу системи (8)

$$\dot{V} = -\left[\varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_{2k-1}\cos k\omega t + \varepsilon_{2k}\sin k\omega t)\right]\cdot\sum_{i=0}^{2n}\Psi_{i}{}'_{x_2}\varepsilon_i. \tag{9}$$

Нехай функції, які поки залишались вільними, приймають вигляд $k = \overline{1,n}$:

$$\Psi_0(x_2) = x_2,\ \Psi_{2k-1}(t,x_2) = x_2\cos k\omega t,\ \Psi_{2k}(t,x_2) = x_2\sin k\omega t, \tag{10}$$

За такими функціями похідна від V стає знакосталою

$$\dot{V} = -\left[\varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon_{2k-1}\cos k\omega t + \varepsilon_{2k}\sin k\omega t\right)\right]^2 \leq 0.$$

Тобто для рівнянь у відхиленнях функція V є функцією Ляпунова з негативно напіввизначеною похідною, $\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon_i^2(t) \leq \sum_{i=0}^{2n}\varepsilon_i^2(0)$. Для дослідження асимптотичної стійкості нульового розв'язку неавтономної системи диференціальних рівнянь (8) скористаємось методом стабілізації, який розроблено в задачах адаптивного керування з використанням властивості незгасаючого збудження (persistency of excitation) (див., наприклад, [11–13]).

Означення 1. Матрична функція, що локально інтегрується $W(t)$: $R_{\geq 0} \to R^{p\times q}$ має властивість НЗ – незгасаючого збудження (PE – persistency of excitation), якщо існують числа $\mu > 0$ і $T > 0$ такі, що $\forall t \in R_{\geq 0}$ виконано співвідношення

$$\int_t^{t+T} W(\tau)W^T(\tau)d\tau \geq \mu I,$$

де I – одинична матриця розмірності $(p\times p)$, а знак $\geq$ у випадку матричної нерівності означає, що різниця відповідних матриць є невід'ємно визначеною.

Для неавтономної лінійної системи диференціальних рівнянь виду

$$\dot{e}(t) = -W(t)W^T(t)e(t), \tag{11}$$

де $e(t) \in R^p, W(t) \in R^{p\times q}$ має місце

Теорема 1. [12, Th. 2.5.1] Для системи (11) з обмеженими функціями $W(t)$, $\dot{W}(t)$ початок координат є глобально експоненціально стійким тоді і тільки тоді, коли $W(t)$ має властивість НЗ.

Твердження 1. Якщо функції $\Psi_i(t, x_1, x_2), i = \overline{0, 2n}$ вибрані за формулами (10), то тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у відхиленнях (8) є глобально експоненціально стійким.

Доведення. Дійсно, рівняння (8) в цьому випадку приймають вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_0 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{2n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & \cos\omega t & \cdots & \sin n\omega t \\ \cos\omega t & \cos^2\omega t & \cdots & \cos\omega t \sin n\omega t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\omega t & \sin n\omega t\cos\omega t & \cdots & \sin^2 n\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Візьмемо в якості матричної функції $W(t)$ вектор

$$W(t) = (1,\ \cos\omega t,\ \sin\omega t,\ \ldots,\ \cos n\omega t,\ \sin n\omega t)^T.$$

Тоді рівняння у відхиленнях (12) при $p = 2n+1, q = 1$ мають вид (11). А відтак, згідно з наведеної вище теоремою, для доведення глобальної експоненціальної стійкості тривіального розв'язку системи (12) нам потрібно показати:

1) $W(t)$ та її похідна є обмеженими функціями; 2)$W(t)$ має властивість НЗ.

Перша умова є очевидною, оскільки всі компоненти вектора $W(t)$ не перевищують за модулем одиниці, а абсолютна величина компонент вектора $\dot{W}(t)$ при фіксованих n та ω менше або дорівнює $n\omega$.

Для доведення властивості НЗ оберемо константи в означенні наступним чином: $T = \frac{2\pi}{\omega},\ \mu = \frac{\pi}{n\omega}$. В результаті маємо $\forall t \geq 0, k, l = \overline{1, n}$:

$$\int\limits_t^{t+T} \sin(k\omega\sigma)d\sigma = \int\limits_t^{t+T} \cos(k\omega\sigma)d\sigma = 0, \int\limits_t^{t+T} \cos(l\omega\sigma)\sin(k\omega\sigma)d\sigma = 0,$$

$$\int\limits_t^{t+T} d\sigma = \frac{2\pi}{\omega}, \int\limits_t^{t+T} \cos^2(k\omega\sigma)d\sigma = \int\limits_t^{t+T} \sin^2(k\omega\sigma)d\sigma = \frac{\pi}{k\omega},$$

звідки випливає, що матриця WW^T стає діагональною і виконано відповідну нерівність

$$\int\limits_t^{t+T} W(\tau)W^T(\tau)d\tau = diag\left\{\frac{2\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{\omega},\ldots,\ \frac{\pi}{n\omega},\ \frac{\pi}{n\omega}\right\} \geq \mu I.$$

Твердження пропозиції доведено. □

5. Остаточний вигляд співвідношень

Таким чином, зафіксовано всі ступені свободи в співвідношеннях (5), а саме: структура допоміжних диференціальних рівнянь задана рівняннями (7), а вибір функцій $\Psi_i(t, x_1, x_2),\ i = \overline{0, 2n}$ за формулами (10) формує остаточний вид цієї системи

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_0 = g(x_1) - x_2 - \xi_0 - X(t, x_2, \xi), \\ &\dot{\xi}_{2k-1} = k\omega x_2 \sin k\omega t - Y(t, x_1, x_2, \xi)\cos k\omega t, \\ &\dot{\xi}_{2k} = -k\omega x_2 \cos k\omega t - Y(t, x_1, x_2, \xi)\sin k\omega t,\ \ k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тут $X(t, x_2, \xi) = \sum_{k=1}^{n}[(x_2 \cos k\omega t + \xi_{2k-1})\cos k\omega t + (x_2 \sin k\omega t + {}+\xi_{2k})\sin k\omega t],\ Y(t, x_1, x_2, \xi) = x_2 - g(x_1) + \xi_0 + X(t, x_2, \xi)$.

В підсумку отримуємо, що доданки $\Psi_i(t, x_1, x_2),\ \xi_i(t)$ в формулах (5) стають відомими величинами, відхилення $\varepsilon_i(t)$ асимптотично прямують до нуля, а самі формули безпосередньо визначають асимптотичні оцінки шуканих параметрів $a_i,\ i = \overline{0, 2n}$. Тим самим доведено

Твердження 2. Формули

$$\hat{a}_0 = x_2(t) + \xi_1(t),\ \ \hat{a}_{2k-1} = x_2(t)\cos k\omega t + \xi_{2k-1}(t),$$

$$\hat{a}_{2k} = x_2(t)\sin k\omega t + \xi_{2k}(t),$$

де $\xi(t),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^{2n+1}$ – будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (13), формують асимптотичні оцінки параметрів $a_k,\ k = \overline{1, n}$.

6. Чисельне моделювання. Осцилятор Дуффінга

Як приклад застосування запропонованого методу розглянемо результати чисельного моделювання процесу визначення параметрів зовнішньої періодичної сили $u(t)$, під дією якої осцилятор Дуффінга здійснює вимушені коливання і яка апроксимована відрізком ряду

Фур'є (n=3). Модель осцилятора Дуффінга – це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, прикріпленої до нелінійної пружини та лінійного амортизатора. Рівняння вимушених коливань запишемо у вигляді

$$\ddot{x}(t)+\delta\dot{x}(t)+\alpha x(t)+\beta x^3(t) = a_0+\sum_{k=1}^{3}(a_{2k-1}\cos k\omega t+a_{2k}\sin k\omega t). \quad (14)$$

Тут $x(t)$ – зміщення матеріальної точки від початку координат; δ – характеризує дисипацію в системі; коефіцієнти α і β визначають відповідно лінійну та нелінійну жорсткість; ω – кутова частота зовнішньої спонукальної (змушуючої) сили; $a_i, i = \overline{0,6}$ – невідомі параметри. Зауважемо, що якщо β від'ємна то динаміка траєкторій є тривіальною, оскільки всі розв'язки диференціального рівняння (14) експоненціально прямують до нескінченності. Отже, розглядається випадок $\beta \geq 0$. Як і в загальному випадку передбачаємо, що при вибраних нижче параметрах моделі розв'язки (14) коректно визначені на $[0,\infty)$.

Перепишемо рівняння (14) у формі системи в просторі станів, зробивши заміну змінних Лієнара. Маємо

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 - \delta x_1, \\ &\dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 + a_0 + \sum_{k=1}^{3}[(a_{2k-1}\cos k\omega t + a_{2k}\sin k\omega t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Запропонована в роботі схема була чисельно промодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічної системи (15). Сама ця система в процесі моделювання використана для отримання значень $x_1(t), x_2(t)$, за даними про які вирішувалась задача побудови асимптотичних оцінок a_i, $\overline{i = 0,6}$. Параметри системи наступні: $\delta = 0.5$; $\alpha = 4.0$; $\beta = 0.5$; $\omega = 2.5$; $a_0 = 0.5$; $a_1 = 1.0$; $a_2 = 1.5$; $a_3 = 0.0$; $a_4 = -0.5$; $a_5 = -1.0$; $a_6 = -1.5$.

Початкові умови відповідної задачі Коші для осцилятора: $x(0) = (-1.0; 1.0)$; початкові умови для змінних додаткової системи диференціальних рівнянь обираються довільним чином, в даному випадку $\xi(0) = (-2; -2; -2; -2; -2; -2; -2)$ для рис. 1 та $\xi(0) = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 11)$ для рис. 2. Сама додаткова система з такими параметрами має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_0 = 4x_1 - 0.5x_1^3 - x_2 - \xi_0 - X(t, x_2, \xi), \\ &\dot{\xi}_{2k-1} = kx_2 \sin kt - Y(t, x_1, x_2, \xi)\cos kt, \\ &\dot{\xi}_{2k} = -kx_2 \cos kt - Y(t, x_1, x_2, \xi)\sin kt, \ k = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (16)$$

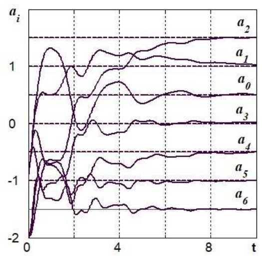

Рис. 1.

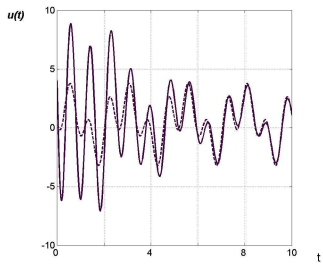

Рис. 2.

Тут $X(t,x_2,\xi)=\sum_{k=1}^{3}[(x_2\cos kt+\xi_{2k-1})\cos kt+(x_2\sin kt+\xi_{2k})\sin kt]$, $Y(t,x_1,x_2,\xi)=x_2-4x_1+0.5x_1^3+\xi_0+X(t,x_2,\xi)$.

На рис. 1 показано процес оцінювання коефіцієнтів a_i. Неперервною лінією зображено графіки функцій ($k=\overline{1,3}$)

$$\hat{a}_0=x_2(t)+\xi_0(t),\ \ \hat{a}_{2k-1}=x_2(t)\cos k\omega t+\xi_{2k-1}(t),$$

$$\hat{a}_{2k}=x_2(t)\sin k\omega t+\xi_{2k}(t),$$

які в повній відповідності до твердження 2 асимтотично прямують з часом до значень шуканих коефіцієнтів (графіки яких зображено переривчатими відрізками прямих).

На рис. 2 показано відстеження зовнішнього сигналу $u(t)$. Переривчатою лінією зображено графік діючої на осцилятор зовнішньої сили $u(t)=a_0+\sum_{k=1}^{3}(a_{2k-1}\cos k\omega t+a_{2k}\sin k\omega t)$, а неперервною лінією його апроксимацію за результатом моделювання

$$\hat{a}_0+\sum_{k=1}^{3}\hat{a}_{2k-1}\cos k\omega t+\hat{a}_{2k}\sin k\omega t).$$

Як видно з цих графіків результати моделювання підтверджують ефективність пропонуємого способу асимптотичного оцінювання параметрів зовнішньої періодичної сили.

Література

[1] Беззубов, В.А., Бобцов, А.А. (2020). Алгоритм идентификации параметров неизмеряемого синусоидального возмущения с нестационарной амплитудой. *Мехатроника, автоматизация, управление 21*(8), 464–469.

[2] Жоголева, Н.В., Щербак, В.Ф. (2015). Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления. *Труды ИПММ НАН Украины, 29*, 69–76.

[3] Ковалев, А.М., Щербак, В.Ф. (1993). *Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем.* Киев, Наук. думка.

[4] Lienard, A. (1928). Etude des oscillations entretenues. *Revue generale de l'electricite, 23*, 901–954.

[5] Харламов, П.В. (1974). Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений. *Механика твердого тела, 6*, 15–24.

[6] Щербак, В.Ф. (2004). Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения. *Механика тведого тела, 33*, 197–216.

[7] Chauvin, J., Petit, N. (2010). Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems. *Automatica, 46*(2), 354–361.

[8] Hou, M. (2012). Parameter identification of sinusoids. *IEEE Trans. Autom. Control, 57*(2), 467–472.

[9] Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. In: *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, pp. 7775–7780.

[10] Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 53*(11), 2602–2614.

[11] Fradkov, A.L., Miroshnik, I.V., Nikiforov, V.O. (1999). *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*, Springer.

[12] Sastry, S., Bodson, M. (2011). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Dover.

[13] Loria, A., Kelly, R., Teel, A.R. (2005). Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems. *European Journal of Control, 11*(2), 87–100.

[14] Na, J., Yang, J., Wu, X., Guo, Y. (2015). Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals. *Automatica, 53*, 376–384.

[15] Praly, L., Isidori, A., Marconi, L. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. In: *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006*, pp. 24–28.

[16] Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM., 4*(1), 139–140.

Відомості про авторів

Володимир Федорович Щербак

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: scherbakv54@gmail.com