

ПРО МОЖЛИВІСТЬ ІСНУВАННЯ НЕФІШЕРІВСЬКИХ КЛАСІВ УНІВЕРСАЛЬНОСТІ

О.І. ІВАНИЦЬКИЙ, К.О. БУГАЄВ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03680, Україна; e-mail:

a_iv_@ukr.net, bugaev@th.physik.uni-frankfurt.de)

УДК 539.12
© 2012

Критичні показники α , α' , β , γ' та δ моделі кварк-глюонних мішків з поверхневим натягом знайдено як функції найбільш загальних модельних параметрів. Розглянуто два різновиди моделі, які генерують фазову діаграму сильновзаємодіючої матерії з критичною або трикритичною точкою відповідно. Аналіз співвідношень між критичними індексами (скейлінгових законів) демонструє, що у загальному випадку скейлінг може бути порушено. Проаналізовано питання про можливе відновлення скейлінгових законів за допомогою фішерівського означення α'_s та його узагальнень α'_c , α'_m . Показано, що скейлінгове співвідношення Фішера можна відновити за допомогою узагальнень α'_c та α'_m , в той час, як жодне означення α' нездатне відновити співвідношення Гріффітса у традиційній формі. Також явно показано, що додаткової умови $\alpha = \alpha'$ недостатньо для відновлення співвідношення Гріффітса у традиційному вигляді. Запропоновано узагальнення цього скейлінгового співвідношення, яке справедливе для всіх відомих моделей. Отримані результати дозволяють нам зробити висновок про можливість існування нефішерівських класів універсальності, для яких традиційні скейлінгові співвідношення можуть бути порушені, у той час, як для них виконуються узагальнені скейлінгові закони.

1. Вступ

Надзвичайно цікавими феноменами, що потрапляють у поле зору дослідника під час вивчення термодинамічних властивостей певних фізичних систем, є різноманітні критичні явища. Відправною точкою досліджень у цій галузі стало відкриття Д.І. Менделєєвим “температури абсолютного кипіння”, за якої зникає поверхневий натяг двох співіснуючих фаз при фазовому переході (ФП) типу рідина–пара, а отже, вони стають нерозпізнавальними. Фізична система при цьому існує в критичному стані, а відповідна точка фазової діаграми називається критичною точкою (КТ). По мірі наближення до цієї точки вздовж кривої ФП різниця густин двох фаз зменшується, аж доки не зникне. Дослідження термодинамічних властивостей магнітних систем також продемонстрували

існування КТ, в якій зникає спонтанна намагніченість системи.

Подальший розвиток уявлень про критичні явища був пов'язаний із експериментальним визначенням термодинамічних величин, що характеризують КТ деякої фізичної системи: критичні тиск, температуру та густину. Якісним стрибком стало усвідомлення того, що різні фізичні системи проявляють надзвичайну подібність поведінки під час наближення до КТ. Так, у роботі [1] було продемонстровано існування деякої універсальної кривої ФП типу рідина–пара у координатах $\rho - T$, якщо останні нормовані на критичні значення. Виміри, проведені для восьми речовин (Ne, Ar, Kr, Xe, N₂, O₂, CO та CH₄), свідчили про існування подібності в критичній поведінці різноманітних фізичних систем, що належали до одного класу універсальності. Природно постало питання про визначення класу універсальності певної речовини. Про можливість існування різних класів універсальності свідчило вже те, що магнітні системи, зовсім відмінні за природою від простих рідин, також демонстрували універсальність критичної поведінки.

Перша спроба визначення класу універсальності певних фізичних систем ґрунтувалася на аналізі властивостей їх КТ. Оскільки останні описуються критичними індексами, то саме вивчення їх значень та скейлінгових співвідношень між ними [2, 3] лягло в основу запропонованої класифікації. Доведена в цих роботах теорема Фішера стверджує, що для фізичних систем з найбільш загальними термодинамічними властивостями скейлінгові співвідношення мають деякий конкретний вигляд, а самі системи потрапляють до одного класу універсальності. Проте, ситуація зі скейлінговими співвідношеннями між критичними індексами реальних речовин та деяких фізичних моделей, що задовольняють вимоги теореми Фішера, виявилась не такою простою. Так, скейлінгові співвідношення не завжди виконуються навіть у межах експериментальної точності для деяких простих рідин [4–8] та тривимірної моделі Ізінга [9]. Більше того, набагато раніше в [3] було продемонстровано, що стандартне визначення

ння критичного індекса α' вздовж критичної ізохори може приводити до невиконання скейлінгових законів навіть для моделей, які задовольняють вимогам теореми Фішера. Таким чином, виникло надзвичайно важливе питання з приводу того, що є причиною невиконання скейлінгових законів у фішерівській формі для деяких моделей, що розв'язані точно, – некоректність визначень деяких критичних індексів (наприклад, α') або недостатній ступінь загальності теореми Фішера. Останнє, в свою чергу, може свідчити про існування нефішерівських класів універсальності, для яких ця теорема не виконується. В даній роботі, щоб відповісти на питання чи можна забезпечити виконання скейлінгових співвідношень у традиційній формі, ми проаналізуємо різні визначення критичних індексів.

Зазначені проблеми скейлінгової систематики класів універсальності зумовили розвиток альтернативного підходу [10], заснованого на аналізі цілком загальних вимог стійкості критичного стану. Їх аналіз дозволив виділити чотири основних типи КТ, що відповідають певним загальним класам універсальності критичної поведінки системи. До переваг даного підходу можна віднести те, що на його основі вдалося провести чітку класифікацію цілої низки статистичних моделей та реальних фізичних систем. Однак необхідно зазначити, що відсутність передбачень щодо вигляду скейлінгових законів для певної системи є суттєвим недоліком цього підходу. Ця обставина не дозволяє відмовитися від фішерівської класифікації, оскільки саме однаковість критичних індексів, пов'язаних з поведінкою системи в околі КТ, є експериментально спостережуваним проявом належності систем до одного класу універсальності. Спробу часткового вирішення цієї проблеми було зроблено в роботі [11], де у ролі умови виконання скейлінгових співвідношень у фішерівській формі розглядалась рівність критичних індексів α та α' . Виконання цієї умови разом з вимогами теореми Фішера могли б бути достатніми для віднесення деякої фізичної системи до фішерівських класів універсальності. Саме тому надзвичайно важливо провести перевірку виконання скейлінгових законів при $\alpha = \alpha'$. Нижче ми продемонструємо існування прикладів, коли виконання цієї умови разом з вимогами теореми Фішера не задовольняє всіх трьох найбільш загальних скейлінгових співвідношень. Однак, буде показано, що фізично обґрунтоване означення індекса α'_c дозволяє відновити співвідношення Фішера, але не спрацьовує у випадку співвідношення Гріффітса. Більше того, оскільки останнє може не виконуватися у традиційній формі

для жодного з існуючих означень індекса α' , то це співвідношення потребує переформулювання. Саме ці обставини, на наш погляд, свідчать про можливість існування нефішерівських класів універсальності.

Зазначені складності з визначенням класу універсальності певної фізичної системи мають бути вирішені не лише для того, щоб задовольнити академічний інтерес, але й через причини чисто практичного характеру, пов'язані із надзвичайно широким використанням гіпотези подібності. Яскравим прикладом її застосування є квантова хромодинаміка (КХД), яка, як вважається, але досі не доведено, у випадку 2+1 кваркових ароматів належить до класу універсальності тривимірних $O(4)$ спінових систем [12–14]. Проте, за сучасними уявленнями, кварк-глюонна плазма (КГП) в області ФП деконфайнмента є сильновзаємодіючою рідиною [15]. Ця обставина надзвичайно ускладнює питання щодо визначення класу універсальності КХД, з одного боку, і робить його надзвичайно важливим з іншого. Вказаний приклад демонструє наскільки важливо з'ясувати: чи можуть існувати класи універсальності відмінні від фішерівського, оскільки, в такому випадку питання про припустимість використання гіпотези подібності перестає бути настільки тривіальним, як це вважалося раніше. На основі розвинених в [2, 3] та [10, 11] схем продемонструємо можливість існування класів універсальності, відмінних від фішерівського.

Вивчення поставлених питань будемо проводити на основі аналізу критичних експонент КТ сильновзаємодіючої матерії та скейлінгових співвідношень між ними. Нажаль, ні КХД, ні, навіть, її ґраткове формулювання не дозволяють зробити цього. Саме тому, подальший аналіз буде виконано за допомогою однієї із феноменологічних моделей, що в останній час здобули надзвичайне значення [15, 16]. Найбільш популярними моделями цього типу є модель Намбу–Йона–Лазіньо [17], її модифікація на основі петель Полякова [18, 19] та кварк-мезонна модель [20], що є моделями середнього поля. Інший напрямок розвитку феноменологічного підходу пов'язаний із точно розв'язуваною моделлю газу мішків (МГМ) [21], одна з сучасних версій якої наведена в роботі [22]. Остання використовує фізично неадекватний механізм генерації трикритичної точки і тому, на жаль, не може розглядатися в ролі надійного джерела інформації про термодинамічні властивості КХД. Іншим різновидом МГМ є модель кварк-глюонних мішків (КГМ) з поверхневим натягом [23]. Її механізм утворення КТ такий самий, як і в моделі статистичної мультифрагментації (СММ) [24] та краплинній моделі Фішера

(КМФ) [25] і є типовим для ФП типу рідина–пара – зникнення коефіцієнта поверхневого натягу (КПН) в КТ приводить до нерозпізнавальності двох фаз. Надзвичайно важливою перевагою моделі КГМ з поверхневим натягом є те, що вона є точнорозв’язуваною, а не середнього поля. Саме тому вона дозволяє вивчати термодинамічні властивості сильновзаємодіючої речовини, виходячи з перших принципів статистичної механіки. Крім того, у цій роботі вперше показано надзвичайну загальність моделі КГМ з поверхневим натягом, що здатна описати критичні індекси цілої низки відомих класів універсальності – простих рідин, моделі Ізінга $O(2)$, $O(3)$ та $O(4)$ симетричних спінових систем. Також принципово важливою, з точки зору даного дослідження, обставиною є те, що модель КГМ з поверхневим натягом цілком відповідає вимогам теореми Фішера, а отже, є придатною для відповіді на питання про можливість існування нефішерівських класів універсальності.

Дана робота організована таким чином. Стислий опис моделі КГМ з поверхневим натягом та її різновидів подано в розділі 2. Деталі обчислення критичних індексів цієї моделі наведено в розділі 3. Розділ 4 присвячено аналізу скейлінгових співвідношень між критичними індексами моделі КГМ і можливості їх задовільнення за допомогою альтернативного визначення індекса α' . Можливість існування нефішерівських класів універсальності також обговорюється у цьому розділі. Висновки подано в розділі 5.

2. Модель КГМ з поверхневим натягом

Модель КГМ з поверхневим натягом має два різновиди – модель з трикритичною точкою (ТКТ) [26] та модель з КТ [27]. В подальшому ми будемо позначати їх як М1 та М2 відповідно. Оскільки вони значною мірою схожі одна на одну, то доцільно спочатку зробити їх спільний опис і лише потім розглянути кожну окремо. Вперше точний аналітичний розв’язок моделі КГМ з поверхневим натягом було знайдено в [23]. Фізичними ступенями вільності цієї моделі є адрони та мішки КГП. Взаємодія між ними враховується так само, як це було зроблено в МГМ. Велика кількість сортів конститuentів дозволяє врахувати притягання між ними так, як це було зроблено в оригінальній моделі статистичного бутстрапа [28]. В той же час, відштовхування ван-дер-ваальсівського типу є наслідком взаємодії твердого кора адронів та мішків КГП [21, 23]. Застосовуючи до статистичної суми $Z(T, \mu, V)$ у великому канонічному ансамблі перетворення Лапласа за змінною V , отримуємо ізобаричну статисти-

чну суму $\hat{Z}(T, \mu, z)$ [23]. Зручність такого перетворення полягає в тому, що найправіша сингулярність ізобаричної статистичної суми z^* визначає тиск системи $p = Tz^*$. Саме тому для вивчення фазової структури моделі КГМ з поверхневим натягом потрібно проаналізувати структуру сингулярностей $\hat{Z}(T, \mu, z)$, що визначається як

$$\hat{Z}(T, \mu, z) \equiv \int_0^\infty dV e^{-zV} Z(T, \mu, V) = \frac{1}{z - F(T, \mu, z)}. \quad (1)$$

Функція $F(T, \mu, z) = F_H(T, \mu, z) + F_Q(T, \mu, z)$, що фігурує у виразі для $\hat{Z}(T, \mu, z)$, є об’ємним спектром моделі. Її дискретна частина

$$F_H(z, T, \mu) = \sum_{j=1}^n g_j e^{\frac{b_j \mu}{T} - v_j z} \phi(T, m_j), \quad (2)$$

відповідає легким адронам з масою m_j , баріонним зарядом b_j , власним об’ємом v_j , виродженням g_j та одночастинковою густиною

$$\phi(T, m_j) \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 dp e^{-\frac{(p^2 + m_j^2)^{1/2}}{T}}. \quad (3)$$

Великі за об’ємом мішки КГП описуються неперервною частиною об’ємного спектра:

$$F_Q(T, \mu, z) = u(T, \mu) I_\tau(\Delta z, \Sigma), \quad (4)$$

де використано позначення

$$I_\tau(\Delta z, \Sigma) \equiv \int_{v_0}^\infty \frac{dv}{v^\tau} e^{-\Delta z v - \Sigma v^\kappa}. \quad (5)$$

Крім того, $\Delta z \equiv z - z_Q(T, \mu)$, а $T\Sigma$ позначає КПН (Σ позначає редукований КПН). Ефективна площа поверхні КГМ об’єму v в неперервній частині спектра мішків описується за допомогою параметра κ , як v^κ . Зазвичай κ визначається розмірністю простору d , як $\kappa = \frac{d-1}{d}$, але тут він трактуватиметься як вільний параметр в межах $0 < \kappa < 1$. Параметр τ є фішерівським індексом, що відіграє значну роль. Варто зазначити, що в М1 ($1 < \tau \leq 2$) та М2 ($\tau > 2$) він набуває різних значень. Модель розв’язана для широкого класу функцій $u(T, \mu)$ та $z_Q(T, \mu)$, єдиними обмеженнями на які є скінченність та двічі диференційованість за будь-яких значень аргументів [23, 26, 27]. Зміст функції $z_Q(T, \mu)$ полягає в тому, що вона визначає тиск p_Q всередині мішка КГП, а саме

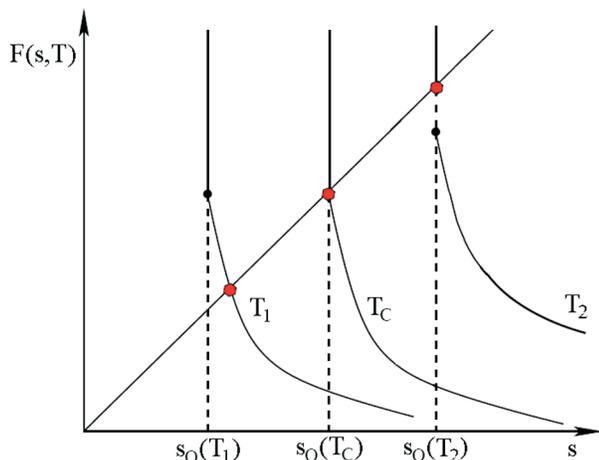


Рис. 1. Графічне розв'язання рівняння (6) в області ФП ($\mu > \mu_{сер}$) у випадку М1. Крива ФП лежить нижче кривої нульового значення КПН, тобто $T_c(\mu) < T_\Sigma(\mu)$, і тому $F(z_Q, T, \mu)$ залишається скінченим при $T < T_\Sigma(\mu)$, де $\Sigma > 0$. При малих температурах $T_1 < T_c(\mu)$ простий полюс є найправішою сингулярністю $\hat{Z}(T, \mu, z)$ і тому адронна фаза є домінуючою. За високих температур $T_c(\mu) < T_2 < T_\Sigma(\mu)$ тиск системи визначається суттєво особливою сингулярністю (7), а отже фаза КГР є домінуючою. При критичному значенні температури $T_c(\mu)$ відбувається ФП, за якого сингулярності (6) та (7) ізобаричного розподілу збігаються

$p_Q = Tz_Q(T, \mu)$. Тому, спираючись на дані ґраткової КХД, можна стверджувати, що $z_Q(T, \mu)$ є монотонно зростаючою функцією своїх аргументів.

Надзвичайно важливою особливістю моделі КГМ з поверхневим натягом є залежність від температури T та баріонного хімічного потенціалу μ редукованого КПН $\Sigma(T, \mu)$. Зазначимо, що він дорівнює нулеві на кривій $T_\Sigma(\mu)$ фазової діаграми в $\mu - T$ координатах, тобто $\Sigma(T_\Sigma, \mu) = 0$. За певного значення баріонного хімічного потенціалу μ редукований КПН є додатним нижче цієї кривої ($\Sigma(T < T_\Sigma, \mu) > 0$) та від'ємним вище неї ($\Sigma(T > T_\Sigma, \mu) < 0$). Тут слушно сказати, що, як було зазначено в [23, 26, 27], від'ємні значення Σ ні в якому разі не суперечать фундаментальним фізичним уявленням. Дійсно, у великому канонічному ансамблі КПН визначає поверхневу вільну енергію кластера $f_{surf} = e_{surf} - Ts_{surf}$, де e_{surf} та s_{surf} є поверхневою енергією та ентропією відповідно. Тому, $\Sigma < 0$ означає лише те, що ентропійний внесок у вільну енергію поверхні просто перевищує енергетичний. Це є наслідком виникнення такої величезної кількості несферичних деформацій, які просто не можуть бути подавлені больцманівським експоненціальним фактором. Саме таку поведінку поверхневої вільної енергії (а отже і КПН) передбачає точноро-

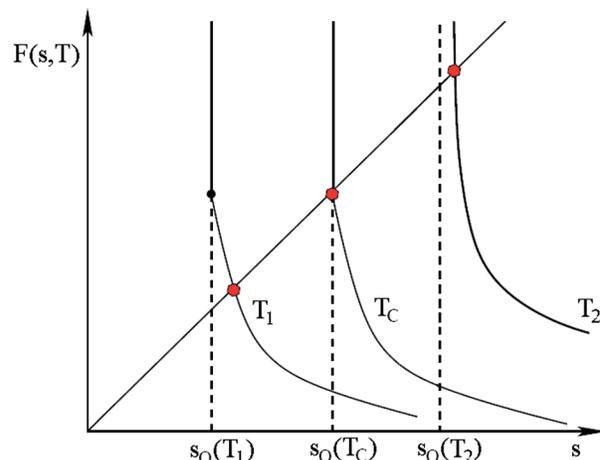


Рис. 2. Графічне розв'язання рівняння (6) в області ФП ($\mu > \mu_{сер}$) у випадку М2. Криві ФП та нульового значення КПН збігаються, тобто $T_c(\mu) = T_\Sigma(\mu)$, і тому $F(z_Q, T, \mu)$ залишається скінченим при $T < T_c(\mu)$, де $\Sigma > 0$. При малих $T_1 < T_c(\mu)$ та великих $T_2 > T_c(\mu)$ температурах простий полюс є найправішою сингулярністю $\hat{Z}(T, \mu, z)$ і тому адронна фаза є домінуючою. КГР існує лише, коли сингулярності (6) та (7) ізобаричного розподілу збігаються під час ФП при температурі $T_c(\mu)$

з'язувана модель поверхневих деформацій [29]. Необхідно відзначити, що в роботах [30, 31], на основі теоретико-польових методів, також зроблено висновок про можливість від'ємних значень КПН. Більше того, нещодавній розгляд співвідношення між натягом кольорової струни, що спричиняє конфайнмент, та поверхневим натягом мішка КГП [32, 33] продемонстрував, що в області крос-овера Σ обов'язково є від'ємним.

Як зазначалося раніше, тиск системи визначається найправішою сингулярністю z^* ізобаричного розподілу $\hat{Z}(T, \mu, z)$. Вони бувають двох типів – простий полюс, що відповідає газовій фазі і визначається рівнянням

$$z^* = F(T, \mu, z^*), \tag{6}$$

та суттєво особлива сингулярність, що відповідає рідкій фазі і визначається, як

$$z^* = z_Q(T, \mu). \tag{7}$$

Графічно розв'язуючи рівняння $z = F(T, \mu, z)$, можна визначити найправішу з (6) та (7) сингулярність [26]. Зробимо це для простішого випадку сталого баріонного хімпотенціалу. Розглянемо зпочатку регіон ФП $\mu > \mu_{сер}$ (рис. 1 у випадку М1 та рис. 2 у випадку М2). КПН в цій області є додатним при температурах, менших за $T_\Sigma(\mu)$, а отже інтеграл (5) разом зі

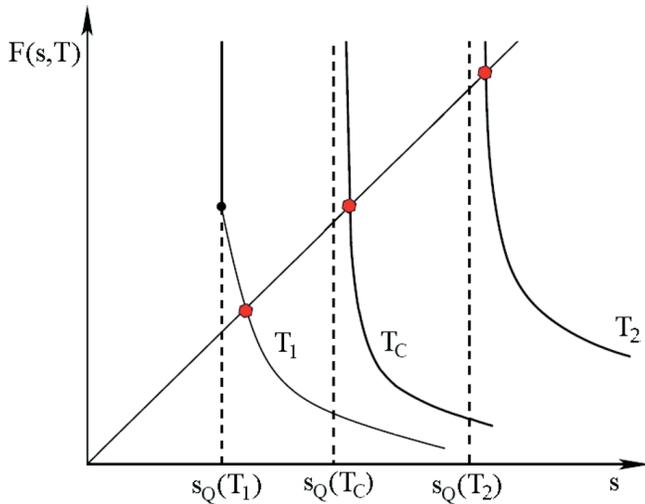


Рис. 3. Графічне розв'язання рівняння (6) в області крос-овера ($\mu \leq \mu_{сер}$), де КПН є від'ємним [23, 26] і тому $F(z_Q, T, \mu)$ залишається скінченим лише за малих температур. Тоді простий полюс (6) завжди є найправішою сингулярністю ізобаричного розподілу

спектром моделі $F(z, T, \mu)$, залишаються скінченими при $z \geq z_Q(T, \mu)$. Тому при $T_1 < T_\Sigma(\mu)$ сингулярність, що визначається рівнянням (6), розташована правіше за $z_Q(T_1, \mu)$ і тому система існує у фазі адронного газу. Оскільки в разі збільшення температури різниця $z^* - z_Q(T, \mu)$ зменшується, то при деякому критичному її значенні $T_c(\mu) \leq T_\Sigma(\mu)$ сингулярності (6) та (7) стануть рівними, тобто $z_Q(T_c, \mu) = F(T_c, \mu, z_Q(T_c, \mu))$. Необхідно зазначити, що оскільки тиск системи визначається правішою сингулярністю ізобаричної статистичної суми, як $p = z^*T$, то ця умова є нічим іншим, як критерієм рівноваги фаз Гіббса [23, 26, 27]. Отже, криву $T_c(\mu)$ слід ототожнити із кривою ФП деконфайнмента, причому при температурах $T_2 \in (T_c(\mu), T_\Sigma(\mu))$ найправішою сингулярністю $\hat{Z}(T, \mu, z)$ є суттєво особлива точка і тому система існує у стані рідини, що зазнала деконфайнмента – кварк-глюонної рідини (КГР). Вздовж кривої нульового значення КПН $T_\Sigma(\mu)$ сингулярності (6) та (7) знов стають рівними, а отже, відбувається поверхнеіндукований ФП другого або більш високого роду [26]. Зазначимо, він існує лише у M1 в той час, як в M2 він збігається із ФП деконфайнмента оскільки $T_c(\mu) = T_\Sigma(\mu)$ в цій моделі. Крім того, в M2 справжня КГР, тиск якої визначається суттєво особливою сингулярністю (7), існує лише вздовж кривої співіснування фаз $T_c(\mu)$. Ці дві обставини є основними щодо відмінностей в фазових структурах M1 та M2. Подальше зростання температури приведе до того, що КПН ста-

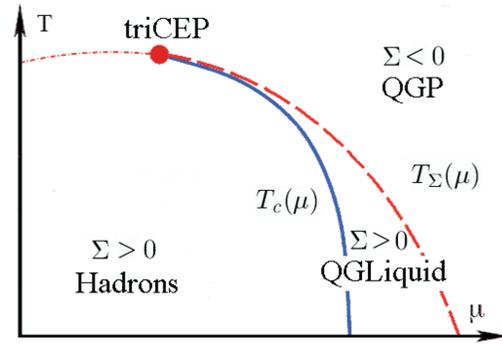


Рис. 4. Схематичне зображення фазової діаграми M1 у μ - T координатах. КПН змінює знак вздовж пунктирної кривої $T_\Sigma(\mu)$. ФП деконфайнмента відбувається вздовж суцільної кривої $T_c(\mu)$ при $\mu > \mu_{сер}$. При $\mu < \mu_{сер}$ він вироджується в крос-овер (коротко-пунктирна крива $T_\Sigma(\mu)$). Ці регіони відділені ТКТ, що позначена суцільним кругом

не від'ємним, а $F(T, \mu, z)$ розбіжним при $z \leq z_Q(T, \mu)$. Отже, при температурах більших за $T_\Sigma(\mu)$ найправішою сингулярністю ізобаричної статистичної суми буде простий полюс (6), що відповідає КГП – газовій фазі, яка зазнала деконфайнмента. Наведений аналіз стосується області $\mu > \mu_{сер}$ фазової діаграми, де існує ФП деконфайнмента першого роду. При $\mu < \mu_{сер}$ ФП вироджується в неперервний перехід крос-овера (рис. 3). В цьому випадку тип найправішої сингулярності ізобаричного розподілу не змінюється, оскільки Σ є від'ємним в цій області [23, 26].

У великому канонічному ансамблі тиск рідкої (КГР) та газової (адрони чи КГП) фаз даної моделі відповідно є

$$p_L(T, \mu) = T z_Q(T, \mu), \tag{8}$$

$$p_G(T, \mu) = T [F_H(z, T, \mu) + u(T, \mu)I_\tau(\Delta z, \Sigma)], \tag{9}$$

причому тиск адронної фази $p_H \equiv p_G|_{T < T_c}$ та $p_{QGP} \equiv p_G|_{T > T_\Sigma}$ (в M2 $T_\Sigma = T_c$) є тиском КГП. Зручно позначати величини, що визначені за температур, менших чи більших, ніж T_c індексами – та +. Тоді, наприклад, для тисків $p_{T=T_c \pm 0} \equiv p^\pm$.

2.1. Модель з трикритичною точкою

M1 була точно розв'язана в [23, 26]. Її фазова структура включає в себе адронну фазу та фази КГП і КГР. Фазова діаграма M1 у μ - T координатах зображена на рис. 4. В цій моделі $p^- = p_H$ та $p^+ = p_{QGL}$. ФП деконфайнмента від адронної фази до фази КГР відбувається при $\mu > \mu_{сер}$ вздовж кривої $T_c(\mu)$, яка знаходиться нижче кривої нульового значення КПН $T_\Sigma(\mu)$.

При $\mu < \mu_{\text{сер}}$ ФП вироджується в крос-овер. Ці два регіони відділені ТКТ з координатами $(\mu_{\text{сер}}, T_{\text{сер}})$. Необхідною умовою існування ФП деконфайнмента першого роду та його ТКТ в М1 є $\frac{3}{2} < \tau \leq 2$ [23].

Нова параметризація редукованого КПН була вперше запропонована в [23]. Однак слід зазначити, що в цій роботі вона досліджується в більш загальному випадку:

$$\Sigma(T, \mu) = \text{sign}(T - T_{\Sigma}(\mu)) \frac{\sigma}{T} \left| \frac{T_{\Sigma}(\mu) - T}{T_{\Sigma}(\mu)} \right|^{\zeta}, \quad (10)$$

що припускає будь-які додатні значення параметра ζ для виконання умови $\Sigma(T_{\Sigma}) = 0$. Параметр σ є деякою додатною константою, що має зміст КПН при температурі $T = 0$. Однак його можна трактувати і як гладку та регулярну функцію температури та/чи баріонного хімічного потенціалу, що аж ніяк не вплине на результати.

В околі ТКТ поведінка кривих ФП деконфайнмента та нульового значення КПН у $\mu - T$ координатах може бути описана одним параметром $\xi^T > 0$:

$$T_{\text{сер}} - T_{\Sigma}(\mu) \sim T_{\text{сер}} - T_c(\mu) \sim (\mu - \mu_{\text{сер}})^{\xi^T}. \quad (11)$$

Це є наслідком того, що криві $T_c(\mu)$ та $T_{\Sigma}(\mu)$ не перетинаються, а саме доторкаються одна до одної в ТКТ. Доведення цього твердження та аналіз достатніх для його виконання умов буде подано нижче. Цей параметр дозволяє описати фазову діаграму М1 найбільш загальним чином. Його надзвичайне значення полягає в тому, що лише завдяки йому М1 може описати критичні показники тривимірної моделі Ізінга, простих рідин, О(4) симетричної тривимірної спінової моделі, тощо. Так, наприклад, для СММ це неможливо [34]. Крім того, параметр ξ^T однозначно пов'язаний із введеною в [10, 11] величиною K_c , яка відіграє визначну роль при класифікації типів критичних точок.

Вздовж кривої фазової рівноваги рівняння Клапейрона–Клаузіуса може бути записано у вигляді $\frac{d\mu_c}{dT} = -\frac{s^- - s^+}{\rho^- - \rho^+} \Big|_{T=T_c}$. Баріонна густина ρ та густина ентропії s кожної фази визначаються як частинні похідні по баріонному хімічному потенціалу μ та температурі T від тиску даної фази. За допомогою (8) та (9) це рівняння можна записати явно

$$\frac{d\mu_c}{dT} = -\frac{A_T - \frac{\partial \Sigma}{\partial T} u_{I_{\tau-\kappa}}(0, \Sigma)}{A_{\mu} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} u_{I_{\tau-\kappa}}(0, \Sigma)} \Big|_{T=T_c}, \quad (12)$$

де для $i \in \{T, \mu\}$ використано позначення

$$A_i \equiv \frac{\partial F_H}{\partial i} + \frac{\partial u}{\partial i} I_{\tau} + \frac{\partial z_Q}{\partial i} \left(\frac{\partial F_H}{\partial z} - 1 \right). \quad (13)$$

Параметризація редукованого КПН (10) та форми кривої $T_c(\mu)$ (11) разом з (12) дозволяють зробити висновок, що

$$A_T|_{T=T_c} \sim (T_{\text{сер}} - T_c(\mu))^{\chi + \frac{1}{\xi^T} - 1}, \quad (14)$$

$$A_{\mu}|_{T=T_c} \sim (T_{\text{сер}} - T_c(\mu))^{\chi}, \quad (15)$$

де індекс χ вперше було введено в [35]. Його поява є неминучим наслідком аналізу рівняння Клапейрона–Клаузіуса, яке природно впливає із критерію фазової рівноваги Гіббса. Саме тому введення параметра χ є цілком загальним і може бути зроблене для будь-якої моделі з ФП типу рідина–пар. Проте, цей індекс ще ніколи не розглядався під час аналізу критичних експонент інших моделей. Так, наприклад, в СММ він неявно вважається рівним нулю [34]. Проте, внаслідок скінченності за будь-яких значень T і μ інтеграла I_{τ} та функцій F_H , u , z_Q разом з їхніми першими похідними можливі значення цього параметра визначаються нерівністю $\chi \geq \max(0, 1 - \frac{1}{\xi^T})$.

Повернемося до розгляду питання про те, як поведуться криві $T_c(\mu)$ та $T_{\Sigma}(\mu)$ в околі ТКТ, редукований КПН $\Sigma = 0$ та параметр $\Delta z = 0$ вздовж кривої $T_{\Sigma}(\mu)$. Тому аналог рівняння Клапейрона–Клаузіуса (12) для цієї кривої має вигляд $\frac{d\mu_{\Sigma}}{dT} = -\frac{A_T}{A_{\mu}} \Big|_{T=T_{\Sigma}}$. Якщо накласти на функції A_T та A_{μ} цілком загальні вимоги аналітичності, то можна стверджувати, що таке співвідношення між ними з точністю до деякого несуттєвого множника f має місце для будь-якої кривої, що лежить в околі ТКТ. Тобто

$$A_T = -f A_{\mu} \frac{d\mu_{\Sigma}}{dT} \quad (16)$$

в околі ТКТ. Необхідно зазначити, що f має бути гладкою функцією T та/чи μ , що не має ніяких особливостей або навіть є сталою величиною. Спираючись на те, що $(T_c(\mu) - T_{\Sigma}(\mu))_{\mu \rightarrow \mu_{\text{сер}}} \rightarrow 0$ та, використовуючи параметризацію редукованого КПН (10) отримуємо

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial T} \Big|_{T=T_c} \simeq -\frac{T_{\Sigma}}{T_c} \frac{d\mu_{\Sigma}}{dT} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} \Big|_{T=T_c}, \quad (17)$$

що разом з рівняннями (12) та (16) дозволяє стверджувати, що $\frac{d\mu_c}{dT} = \frac{d\mu_{\Sigma}}{dT}$ в ТКТ. Це можливо лише за умови, що криві $T_c(\mu)$ та $T_{\Sigma}(\mu)$ не перетинаються, а саме доторкаються одна до одної в ТКТ, а отже їх поведінка може бути, як це було зроблено раніше, описана одним параметром ξ^T . Необхідно зазначити, що при цьому на функції A_T та A_{μ} накладаються цілком загальні вимоги аналітичності в околі ТКТ.

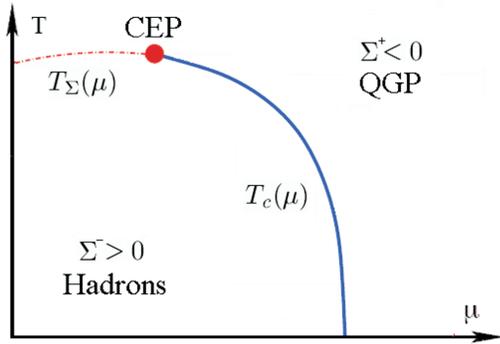


Рис. 5. Схематичне зображення фазової діаграми M2 у $\mu - T$ координатах. ФП деконфайнмента відбувається вздовж суцільної кривої $T_c(\mu)$ при $\mu > \mu_{сер}$. При $\mu < \mu_{сер}$ він вироджується в крос-овер (пунктирна крива $T_\Sigma(\mu)$). При μ більших за критичне значення $\mu_{сер}$ КПН змінює знак точно на кривій фазової рівноваги, тобто $T_\Sigma(\mu) = T_c(\mu)$ при $\mu > \mu_{сер}$. Регіони ФП та крос-овера відділені КТ, що позначена суцільним кругом

2.2. Модель з критичною точкою

Точний розв'язок M2 було знайдено в [27]. Так само, як і в M1, фазова структура M2 включає в себе адронну фазу, фазу КГП та КГР. Головна відмінність фазової діаграми M2 від фазової діаграми M1 полягає в тому, що при баріонних хімічних потенціалах більших за $\mu_{сер}$ КПН змінює знак точно на кривій фазової рівноваги, тобто $T_\Sigma(\mu) = T_c(\mu)$ при $\mu > \mu_{сер}$. Таким чином, як вже зазначалося раніше, в M2 поверхнеіндукований ФП другого роду "прихований" всередині ФП деконфайнмента першого роду. Внаслідок цього справжня КГР існує лише вздовж кривої рівноваги фаз $T_c(\mu)$. Схематичне зображення фазової діаграми M2 в координатах $(\mu - T)$ наведено на рис. 5. Зазначимо, що в цій моделі $p^- = p_H$ та $p^+ = p_{QGP}$. В [27] було продемонстровано, що ФП деконфайнмента першого роду та його КТ в M2 існують при $\tau > 2$.

Параметризація редукованого КПН в M2 є подібною до прийнятої в M1. Проте вона відрізняється від (10) тим, що параметр

$$\sigma^\pm(T, \mu) = \sigma_0^\pm \left(T - T_{сер} + \frac{dT_c}{d\mu}(\mu_{сер} - \mu) \right)^{\xi^\pm} \quad (18)$$

вже не є сталою величиною. Крім того, значення сталих параметрів σ_0^\pm , ζ^\pm та ξ^\pm у загальному випадку є різними – вище та нижче кривої рівноваги фаз. Причиною цього є те, що у M2 ФП першого роду генерується внаслідок розриву часткових похідних редукованого КПН під час переходу через криву $T_c(\mu)$ [27]. Необхідно зазначити, що вимогу додатності стрибка баріонної густини при ФП деконфайнмента, тоб-

то $\rho^+(T_c) > \rho^-(T_c)$, можна задовольнити лише за $\zeta^+ = 1$.

Поведінка кривої ФП в околі КТ, як і в M1, параметризується параметром ξ^T за допомогою рівняння (11), тобто $T_{сер} - T_c(\mu) \sim (\mu - \mu_{сер})^{\xi^T}$. Аналіз рівняння Клапейрона-Клаузіуса, що має місце вздовж кривої $T_c(\mu)$, дозволяє описати поведінку функцій A_T та A_μ так само, як це було зроблено в M1 через параметр χ (див. (14) та (15)).

3. Критичні індекси

Традиційно, поведінка системи в околі критичної точки описується критичними індексами α , α' , β , γ' та δ [3-5]. Так, теплоємність системи $C_\rho \equiv \frac{T}{\rho} \frac{ds}{dT} \Big|_\rho$ вздовж критичної ізохори $\rho = \rho_{сер}$ має вигляд

$$C_\rho \sim \begin{cases} |t|^{-\alpha'}, & \text{при } t \leq 0, \\ t^{-\alpha}, & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (19)$$

стрибок баріонної густини $\Delta\rho \equiv (\rho^+ - \rho^-)_{T=T_c}$ при наближенні до критичної точки зникає за законом

$$\Delta\rho \sim |t|^\beta, \quad t \leq 0, \quad (20)$$

а стрибок ізотермічних стисливостей $K_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \Big|_T$ розбігається в критичній точці як

$$\Delta K_T \sim |t|^{-\gamma'}, \quad t \leq 0, \quad (21)$$

де $\Delta K_T \equiv (K_T^+ - K_T^-)_{T=T_c}$. Змінна $t \equiv \frac{T - T_{сер}}{T_{сер}}$ тут позначає редуковану температуру. Форма критичної ізотерми $T = T_{сер}$ визначається індексом δ :

$$\rho_{сер} - \tilde{p} \sim (\rho_{сер} - \tilde{\rho})^\delta, \quad (22)$$

де тільда індукує величини, визначені за $t = 0$.

Для знаходження критичного індекса α' необхідно знайти повну похідну по температурі від густини ентропії вздовж критичної ізохори, що міститься всередині змішаної фази [2-5]. Стан системи на цій кривій за фіксованих значень T та μ визначається об'ємною долею адронної фази λ :

$$\rho|_{T=T_c} = \lambda\rho^-|_{T=T_c} + (1 - \lambda)\rho^+|_{T=T_c}, \quad (23)$$

$$s|_{T=T_c} = \lambda s^-|_{T=T_c} + (1 - \lambda)s^+|_{T=T_c}. \quad (24)$$

Необхідно зазначити, що $1 - \lambda$ є об'ємною долею КГР в M1 чи КГП в M2. Використовуючи ці рівняння, можна знайти вираз для $\frac{ds}{dT}$ вздовж критичної ізохори, який разом з рівнянням Клапейрона-Клаузіуса дає

$$C_{\rho_{сер}} = \frac{T_c}{\rho_{сер}} \left[(\rho_Q - \rho_{сер}) \frac{d^2\mu_c}{dT^2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{ds_Q}{dT} + \frac{d\mu_c}{dT} \frac{d\rho_Q}{dT} \right]_{T=T_c}, \quad (25)$$

де тут і надалі індекс Q маркує всі величини, що відносяться до КГР. Для деяких класів універсальності, наприклад, тривимірних $O(4)$ симетричних спінових систем, індекс α' є від'ємним. Тому для надання більшої загальності даній моделі важливо забезпечити в її рамках генерацію $\alpha' < 0$, що згідно з означенням (19) має місце, коли C_ρ дорівнює нулю в критичній точці. Розкладаючи різницю $\rho_Q - \rho_{\text{сер}}$ в ряд за відхиленням температури та хімпотенціала від критичних значень та використовуючи (11), можна показати, що перший доданок в (25) поводить як $|t|^{\min(1, \frac{1}{\xi^T}) + \frac{1}{\xi^T} - 2}$. Крім того, оскільки баріонна густина КГР ρ_Q визначається, як похідна за баріонним хімпотенціалом μ від $p_Q = Tz_Q(T, \mu)$, то в силу скінченності та двічі диференційованості останньої, поведінка третього доданка в (25) визначається квадратом похідної $\frac{d\mu_c}{dT}$, тобто $|t|^{\frac{2}{\xi^T} - 2}$. Отже, при $\frac{1}{\xi^T} > 1$ перший та третій доданки в (25) дорівнюють нулю в критичній точці. Тому в даній моделі індекс α' може бути від'ємним лише, коли $\xi^T < 1$ і $\left. \frac{ds_Q}{dT} \right|_{\text{сер}} = 0$, де останнє має місце при

$$\left. \frac{\partial s_Q}{\partial T} \right|_{T=T_c} \sim |t|^\omega, \quad (26)$$

де параметр $\omega \geq 0$. Причому $\omega = 0$ відповідає скінченній в КТ похідній $\frac{\partial s_Q}{\partial T}$, в той час, як при $\omega > 0$ вона дорівнює нулю. Геометрично це означає, що за додатних ω функцій $s_Q(T, \mu_{\text{сер}})$ має перегин при критичній температурі. З (26) випливає, що другий доданок в (25) поводить як $|t|^{\min(\omega, \frac{1}{\xi^T} - 1)}$. Отже, з означення (19) маємо

$$\alpha' = 2 - 2 \min \left(\frac{1}{\xi^T}, 1 + \frac{\omega}{2}, \frac{1 + \frac{1}{\xi^T}}{2} \right). \quad (27)$$

Вираз для критичного індекса α' дозволяє показати, що він є невід'ємним при $\omega = 0$, в той час як $\alpha'|_{\omega > 0} < 0$ при $\xi^T < 1$. Звідси випливає надзвичайно важливий для аналізу значень критичних індексів результат. А саме, $\alpha' < 0$ коли похідна $\left. \frac{\partial s_Q}{\partial T} \right|_{\text{сер}}$ дорівнює нулю, а її скінченні значення відповідають невід'ємним значенням цього індекса. Цікаво відзначити, що вирази для α' є абсолютно ідентичними в М1 та М2 і включають в себе лише параметри ξ^T та ω . Фізичним поясненням цього факту є те, що даний індекс описує теплоємність системи вздовж критичної ізохори, яка в обох версіях моделі КГМ з поверхневим натягом цілком лежить всередині змішаної фази, форму якої в площині $\mu - T$ описує параметр ξ^T .

В обох різновидах моделі КГМ з поверхневим натягом система існує у стані КГП за температур вищих, ніж критична. Тому для знаходження критичного індекса α необхідно знайти повну похідну по температурі від ентропії s^+ вздовж критичної ізохори $\rho^+ = \rho_{\text{сер}}$. Тоді, використовуючи стандартні означення баріонної густини і ентропії та рівняння (9), знайдемо, що при $T \geq T_{\text{сер}}$:

$$C_\rho = \frac{T}{\rho_{\text{сер}}} \frac{d}{dT} \left[\Delta z + s_Q + (\rho_{\text{сер}} - \rho_Q) \frac{A_T - \frac{\partial \Sigma}{\partial T} u_{T-\kappa}}{A_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} u_{T-\kappa}} \right]_{\rho_{\text{сер}}} \quad (28)$$

Через аналітичність функції z_Q за будь-яких скінченних значень її аргументів можна стверджувати, що параметризація (26) справедлива не лише на кривій ФП, але й в усьому околі критичної точки. Звідси випливає, що другий доданок в (28) поводить як $|t|^{\min(\omega, \frac{1}{\xi^T} - 1)}$. Крім того, використовуючи параметризацію КПН, рівняння (16) та, розкладаючи різницю $\rho_{\text{сер}} - \rho_Q$ до лінійних по відхиленню температури та хімічного потенціалу від критичних значень членів, знайдемо, що поведінка третього доданка в (28) описується виразом $t^{\min(\frac{1}{\xi^T} - 1, \frac{2}{\xi^T} - 2)}$. Отже, для знаходження α необхідно проаналізувати поведінку Δz , що в околі критичної точки визначається, як

$$\Delta z = \frac{A_T|_{\text{сер}} \Delta T + A_\mu|_{\text{сер}} \Delta \mu - \Sigma u_{T-\kappa}}{1 - \frac{\partial F_H}{\partial s} + u_{T-1}}. \quad (29)$$

Зазначимо, що відмінності у поведінці цієї величини в М1 та М2 приводять до різних у загальному випадку виразів для критичного індексу α в цих моделях.

Відхилення густини чистих фаз від критичного значення прямує до нуля при наближенні до ТКТ чи КТ. Тому зручно ввести індекси β^+ та β^- , що описують їх поведінку, тобто

$$(\rho^\pm - \rho_{\text{сер}})_{T=T_c} \sim |t|^{\beta^\pm}. \quad (30)$$

В термінах цих індексів

$$\beta = \min(\beta^+, \beta^-). \quad (31)$$

Необхідно зазначити, що з умови скінченності в КТ об'ємної долі низькотемпературної фази λ та об'ємної долі високотемпературної фази $1 - \lambda$ в М2 впливає співвідношення $\beta < \min \left(1, \frac{1}{\xi^T}, \chi \right)$ [35]. Його аналогом в М1 є $\beta < \min \left(1, \frac{1}{\xi^T} \right)$. Отже, для знаходження β необхідно дослідити поведінку відхилення густин чистих фаз від $\rho_{\text{сер}}$. У випадку рідкої фази, якою є

КГР, розклад в ряд до членів лінійних за відхиленням T та μ від критичних значень дає

$$(\rho_L - \rho_{\text{сер}})_{T=T_c} \simeq \Delta T \left. \frac{\partial \rho_Q}{\partial T} \right|_{\text{сер}} + \Delta \mu \left. \frac{\partial \rho_Q}{\partial \mu} \right|_{\text{сер}}. \quad (32)$$

Так само можна показати, що для газової фази, якою є адрони та КГП, відхилення густини від критичного значення є

$$(\rho_G - \rho_{\text{сер}})_{T=T_c} \simeq \left[T \frac{A_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} u I_{\tau-\kappa}}{1 - \frac{\partial F_H}{\partial z} + u I_{\tau-1}} + \rho_L - \rho_{\text{сер}} \right]_{T=T_c}. \quad (33)$$

Вирази (32), (33) разом з (11), (15) та параметризацією КПН дають змогу знайти β^+ та β^- , а отже і критичний індекс β .

Для знаходження критичного індексу γ' зручно представити похідну $\left. \frac{d\rho}{dp} \right|_T$ у вигляді відношення відповідних диференціалів за сталої температури. Тоді, використовуючи означення баріонної густини $\rho = \frac{\partial p}{\partial \mu}$, остаточно дістанемо

$$\Delta K_T = \left[\frac{1}{\rho^{+2}} \frac{\partial^2 p^+}{\partial \mu^2} - \frac{1}{\rho^{-2}} \frac{\partial^2 p^-}{\partial \mu^2} \right]_{T=T_c}. \quad (34)$$

З (8) та (9) слідує, що

$$\frac{\partial^2 p_L}{\partial \mu^2} = T \frac{\partial^2 z_Q}{\partial \mu^2} \quad (35)$$

для рідкої фази та

$$\frac{\partial^2 p_g}{\partial \mu^2} \simeq T \frac{\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \mu} \right)^2 u I_{\tau-2} - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \mu^2} u I_{\tau-\kappa}}{1 - \frac{\partial F_H}{\partial z} + u I_{\tau-1}} \quad (36)$$

для газової фази. Зазначимо, що в (36) входять лише найбільш сингулярні в ТКТ чи КТ члени. Крім того, перший доданок у попередньому виразі є головним у М1, в той час як у М2 – другий доданок є домінуючим. Саме це приводить до відмінностей у виразах для індексу γ' в обох моделях.

Крива нульового КПН є опуклою в площині $T - \mu$, як в М1, так і в М2 (див. рис. 4 та 5). Тому в обох цих моделях критична ізотерма розташована в області, в якій Σ є від'ємним всюди, крім ТКТ чи КТ. Внаслідок цього в обох версіях моделі КГМ з поверхневим натягом при $T = T_{\text{сер}}$ та $\mu \neq \mu_{\text{сер}}$ система існує в стані КГП, яка є газовою фазою з тиском, що визначається рівнянням (9). Тому, розкладаючи відхилення тиску

та густини КГП від критичних значень до лінійних по $\Delta \mu = \mu - \mu_{\text{сер}}$ членів, отримуємо

$$\tilde{p} - p_{\text{сер}} = \Delta \mu \rho_{\text{сер}}, \quad (37)$$

$$\tilde{\rho} - \rho_{\text{сер}} = T_{\text{сер}} \frac{\partial \tilde{\Delta}_z}{\partial \mu}, \quad (38)$$

де було використано означення баріонної густини $\rho = \frac{\partial p}{\partial \mu}$ та змінної Δz . Зазначимо, що повний вираз для відхилення густини КГП від критичного значення включає в себе член $T_{\text{сер}} \Delta \mu \left. \frac{\partial^2 z_Q}{\partial \mu^2} \right|_{\text{сер}}$. Однак накладання умови $\delta > 1$ робить його нехтовно малим, що дає (38). Таким чином аналізуючи поведінку

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}_z}{\partial \mu} = \left. \frac{A_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} u I_{\tau-\kappa}}{1 - \frac{\partial F_H}{\partial z} + u I_{\tau-1}} \right|_{T=T_{\text{сер}}}, \quad (39)$$

можна знайти критичний індекс δ .

3.1. Критичні індекси М1

За надкритичних температур форма ізохори $\rho = \rho_{\text{сер}}$ визначається похідною $\frac{d\mu_{\rho_{\text{сер}}}}{dT} = -\frac{\partial \rho}{\partial T} / \frac{\partial \rho}{\partial \mu}$. Враховуючи лише головні члени в похідних від баріонної густини, можна показати, що в околі ТКТ $\frac{d\mu_{\rho_{\text{сер}}}}{dT} \simeq -\frac{\partial \Delta z}{\partial T} / \frac{\partial \Delta z}{\partial \mu} \sim \frac{d\mu_{\Sigma}}{dT}$, а отже форма критичної ізохори також визначається параметром ξ^T . Тоді, використовуючи (28) та (29), знайдемо, що в М1

$$\alpha|_{\chi \neq 1 - \frac{1}{\xi^T}} = \alpha', \quad (40)$$

$$\alpha|_{\chi = 1 - \frac{1}{\xi^T}} = \max \left[\alpha', \frac{\zeta \min(\kappa, \tau - 1)}{\tau - 1} - 1 \right], \quad (41)$$

Використовуючи (32) та (33) разом з прийнятою в М1 параметризацією, можна показати, що в даній моделі

$$\beta^+ = \min \left(1, \frac{1}{\xi^T} \right), \quad (42)$$

$$\beta^- = \frac{\zeta}{\kappa} (2 - \tau) + \min \left[\chi, \frac{\zeta}{\kappa} \min(\kappa, \tau - 1) - \frac{1}{\xi^T} \right]. \quad (43)$$

З вказаної раніше умови $\beta < \min \left(1, \frac{1}{\xi^T} \right)$ випливає, що $\beta = \beta^-$ в М1. Інші критичні індекси цієї моделі є

$$\gamma' = \frac{\zeta}{\kappa} - 2\beta, \quad (44)$$

$$\delta|_{\chi=0} = \left[\frac{\min \left[\xi^T \frac{\zeta}{\kappa} \min(\tau - 1, \kappa), 1 \right]}{\tau - 1} - 1 \right]^{-1}, \quad (45)$$

$$\delta|_{\chi>0} = \left[\frac{\xi^T \frac{\zeta}{\kappa} \min(\tau - 1, \kappa)}{\tau - 1} - 1 \right]^{-1}. \quad (46)$$

Як видно з виразів (27) та (40)–(46), спектр значень критичних індексів моделі M1 є досить широким. У рамках цієї моделі можна відтворити як додатні, так і від’ємні значення індексу α' , всі додатні значення індексів β і γ' та значення індексу δ більше одиниці. Це свідчить про значний ступінь загальності моделі, що дозволяє описати за її допомогою критичні індекси дво- та тривимірних моделей Ізінга, простих рідин та тривимірних O(2), O(3) і O(4) симетричних спінових моделей, які наведено в табл. 1. Значення модельних параметрів, що генерують критичні індекси, вказаних фізичних систем та моделей, наведено в табл. 2.

Оскільки M1 сформульована для $1 < \tau \leq 2$, а в СММ цей параметр набуває таких самих значень [24], то цікаво проаналізувати, як співвідносяться критичні індекси цих моделей. Важливість такого порівняння пов’язана з тим, що, як в M1, так і в СММ, кінцевою точкою ФП є саме ТКТ, тобто фазові діаграми цих моделей значною мірою схожі між собою. Явні вирази для критичних індексів даної моделі демонструють, що в ній реалізується режим, за якого критичні індекси M1 відтворюють критичні індекси СММ $\alpha'_{\text{СММ}} = 0$, $\beta_{\text{СММ}} = \frac{\zeta}{\kappa}(2 - \tau)$, $\gamma'_{\text{СММ}} = \frac{\zeta}{\kappa}(2\tau - 3)$ та $\delta_{\text{СММ}} = \frac{\tau-1}{2-\tau}$ [34]. Дійсно, це має місце при $\frac{\zeta}{\kappa} \min(\kappa, \tau - 1) - \frac{1}{\xi^T} \geq \chi = 0$ та $\frac{1}{\xi^T} \geq 1$. Цей факт яскраво свідчить про те, що M1 є більш загальною, ніж СММ і тому включає в себе розв’язки останньої, як частинний випадок. Необхідно зазначити, що при $\xi^T > 1$ та $\frac{\zeta}{\kappa} \min(\kappa, \tau - 1) - \frac{1}{\xi^T} \geq \chi = 0$ в M1 генерується режим, в якому індекси β , γ' та δ збігаються з відповідними індексами СММ, в той час як α' є додатним і залежить лише від параметра ξ^T . Саме ця

Т а б л и ц я 1. Критичні індекси двовимірної моделі Ізінга [4], простих рідин [4], тривимірної моделі Ізінга [9], тривимірних O(2) [36], O(3) [37] та O(4) [38, 39] симетричних спінових моделей

	Прості рідини	2D Ізінг	3D Ізінг	O(2) модель	O(3) модель	O(4) модель
α'	0,10(1)	0	0,1096(5)	-0,0146(8)	-0,1336(15)	-0,19(6)
β	0,335(15)	1/8	0,3265(1)	0,3485(2)	0,3689(3)	0,38(1)
γ'	1,25(5)	7/4	1,2373(2)	1,3177(5)	1,3960(9)	1,44(4)
δ	4,5(3)	15	4,7893(8)	4,780(2)	4,78(3)	4,82(5)

обставина дозволяє моделі M1, на відміну від СММ, описати критичні індекси тривимірної моделі Ізінга та простих рідин.

Ще один надзвичайно цікавий режим M1 реалізується при $\chi \geq \frac{\zeta}{\kappa} \min(\kappa, \tau - 1) - \frac{1}{\xi^T}$ та $\kappa \geq \tau - 1$, коли вирази для індексів

$$\gamma' = \frac{1}{\xi^T} - \beta, \quad (47)$$

$$\delta = \frac{1}{\xi^T \beta}. \quad (48)$$

збігаються із виразами для них в M2 (див. (53) та (54)). Такий збіг є не випадковим, оскільки явні вирази для критичних індексів моделей M1 і M2 дуже відрізняються. Він свідчить про існування зв’язків між значеннями критичних експонент різних моделей та властивостями кривої ФП, форма якої описується індексом ξ^T . Цей результат має велике значення для подальшого розвитку моделі M1 в контексті КХД, яка, за сучасними уявленнями, у випадку 2+1 кваркових ароматів потрапляє до класу універсальності тривимірної O(4) симетричної спінової моделі [12–14, 40, 41]. В той самий час, для O(N) спінових моделей ξ^T дорівнює відношенню магнітного y_h та термального y_t індексів [42–44]. Для O(4) симетричної моделі цей індекс пов’язаний із критичними експонентами β та δ так само, як в (48), тобто $\xi^T = (\beta\delta)^{-1}$ [43]. Тому, можна стверджувати, що M1 в даному режимі відповідає КХД у випадку 2+1 кваркових ароматів.

3.2. Критичні індекси M2

Така сама, як і у випадку M1 аргументація демонструє, що $\frac{d\mu_{\text{пер}}}{dT} \simeq -\frac{\partial \Delta z}{\partial T} / \frac{\partial \Delta z}{\partial \mu} \sim \frac{d\mu_{\Sigma}}{dT}$ в M2. Саме тому форма критичної ізохори за надкритичних температур в цій моделі також визначається параметром ξ^T . Отже, з рівнянь (28) та (29) випливає, що в M2

$$\alpha = \alpha'. \quad (49)$$

Крім того, рівняння (32) та (33) і прийнята в M2 параметризація дозволяють знайти інші індекси цієї моделі

$$\beta^+ = 1 + \xi^+ - \frac{1}{\xi^T}, \quad (50)$$

$$\beta^-|_{\zeta=1} = \min \left(1, \frac{1}{\xi^T}, 1 + \xi^- - \frac{1}{\xi^T} \right), \quad (51)$$

$$\beta^-|_{\zeta>1} = \min \left(1, \frac{1}{\xi^T} \right). \quad (52)$$

Т а б л и ц я 2. Параметри M1, що генерують критичні індекси зі значеннями з табл. 1. Значення параметра ω отримані з виразів для α' , α'_s і α'_c відмічені *, ** та *** відповідно. Символ \emptyset означає, що неможливо знайти значення відповідного параметра, яке дозволяє описати критичні індекси з табл. 1

	Прості рідини	2D модель Ізінга	3D модель Ізінга	O(2) спінова модель	O(3) спінова модель	O(4) спінова модель
χ	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
ζ/κ	1,92(4)	2	1,8903(3)	2,0147(4)	2,1338(4)	2,20(3)
τ	1,818(9)	31/16	1,8273(5)	1,8270(5)	1,8271(5)	1,828(1)
κ	$\in [0, 818(9), 1)$	$\in [15/16, 1)$	$\in [0, 8273(5), 1)$	$\in [0, 8270(5), 1)$	$\in [0, 8271(5), 1)$	$\in [0, 828(1), 1)$
ξ^T	0,631(19)	8/15	0,6395(9)	0,6002(4)	0,5666(45)	0,55(1)
ω^*	\emptyset	0	\emptyset	0,0146(8)	0,1336(15)	0,19(6)
ω^{**}	1,565(18)	≥ 0	1,5639(5)	1,6661(8)	1,7647(15)	1,81(6)
ω^{***}	$\geq 1, 565(18)$	≥ 0	$\geq 1, 5639(5)$	$\geq 1, 6661(8)$	$\geq 1, 7647(15)$	$\geq 1, 81(6)$

Т а б л и ц я 3. Параметри M2, що генерують критичні індекси зі значеннями з табл. 1. Значення параметра ω , отримані з виразів для α' , α'_s і α'_c відмічені *, ** та *** відповідно. Символ \emptyset означає, що неможливо знайти значення відповідного параметра, яке дозволяє описати критичні індекси з табл. 1

	Прості рідини		2D модель Ізінга		3D модель Ізінга		O(2) спінова модель		O(3) спінова модель		O(4) спінова модель	
ξ^T	0,631(19)	0,631(19)	8/15	8/15	0,6395(9)	0,6395(9)	0,6002(4)	0,6002(4)	0,5666(45)	0,5666(45)	0,55(1)	0,55(1)
ζ^+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ζ^-	1	> 1	1	> 1	1	> 1	1	> 1	1	> 1	1	> 1
ξ^+	0,84(1)	0,84(1)	1	1	0,8902(5)	0,8902(5)	1,0143(4)	1,0143(4)	1,127(30)	1,127(30)	1,21(6)	1,21(6)
ξ^-	0,84(1)	> 0	1	> 0	0,8902(5)	> 0	1,0143(4)	> 0	1,127(30)	> 0	1,21(6)	> 0
ω^*	\emptyset	\emptyset	0	0	\emptyset	\emptyset	0,0146(8)	0,0146(8)	0,1336(15)	0,1336(15)	0,19(6)	0,19(6)
ω^{**}	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
ω^{***}	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$\geq 0, 0146(8)$	$\geq 0, 0146(8)$	$\geq 0, 1336(15)$	$\geq 0, 1336(15)$	$\geq 0, 19(6)$	$\geq 0, 19(6)$

З цих виразів та умови $\beta < \min\left(1, \frac{1}{\xi^T}, \chi\right)$ випливає, що $\beta = \beta^+$ при $\zeta^- > 1$ та $\beta = \min\left(\beta^+, 1 + \xi^- - \frac{1}{\xi^T}\right)$ при $\zeta^- = 1$. Крім того, в M2 маємо

$$\gamma' = \frac{1}{\xi^T} - \beta, \tag{53}$$

$$\delta = \frac{1}{\xi^T \beta^+}. \tag{54}$$

Явні вирази для критичних індексів M2 дуже відрізняються від відповідних виразів в M1. Більше того, на відміну від M1, індекси τ , κ та χ взагалі не входять у вирази (50)–(54). Така властивість M2 є надзвичайно цікавою і екзотичною, оскільки у всіх інших моделях, в яких фігурує фішерівський індекс τ , тобто в M1, СММ [24, 34] та КМФ [25], критичні показники залежать від нього. Проте, як видно з табл. 3, ця модель також цілком спроможна описати критичні індекси дво- та тривимірної моделі Ізінга, простих рідин та тривимірних O(2), O(3) і O(4) симетричних спінових моделей.

Як було зазначено в розділі 3.1, незважаючи на значні відмінності у явних виразах для критичних експо-

нент M1 і M2, існують режими, коли співвідношення між ними повністю збігаються в обох моделях. В M2 такий режим реалізується при $\zeta^- > 1$ або при $\zeta^- = 1$ та $\xi^- > \xi^+$, коли вирази (53), (54) в M2 повністю збігаються з аналогічними виразами (47), (48) в M1. При цьому, як і в M1, $\xi^T = (\beta\delta)^{-1}$, що має місце для O(4) симетричної моделі [43], а отже, і для КХД у випадку 2+1 кваркових ароматів [12–14, 40, 41]. Такий зв'язок між двома моделями M1 та M2, з одного боку, і даними ґраткової КХД, з іншого боку, здається не випадковим і гарантує, що за допомогою M1 і M2 можна надійно моделювати не лише рівняння стану сильновзаємодіючої речовини, але й такі нетривіальні властивості, як критичні показники ТКТ/КТ КХД матерії.

4. Скейлінгові співвідношення

Добре відомі скейлінгові закони

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2, \tag{55}$$

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2, \tag{56}$$

$$\gamma' + \beta(1 - \delta) \geq 0, \tag{57}$$

традиційно відіграють значну роль у систематиці класів універсальності [2, 3] і теорії критичних явищ [5, 42]. Для простих рідин вони були доведені Фішером [2], Гріффітсом [45] та Ліbermanом [46] відповідно. У випадку магнітних систем ці закони називають співвідношеннями Рашбрука, Гріффітса та Відома.

Проте, ситуація із задовільненням скейлінгових законів у випадку реальних фізичних систем не є такою тривіальною, як здається на першій погляд. Так, існують моделі [3, 34], в яких співвідношення (55) та (56) не виконуються у загальному випадку. Більше того, в деяких експериментальних роботах, наприклад в [6] або в [7, 8], також відзначаються проблеми із задовільненням законів Фішера та Гріффітса. Так, авторами роботи [7] було продемонстровано існування деяких проблем навіть із добре визначеним критичним показником β . Його експериментально визначене значення $\beta = 0,300(4)$, що було знайдено для бінарного іонного розчину $\text{PеNвг-N}_2\text{O}$, не узгоджується ні з іншими даними по простих рідинах, ні з моделлю Ізінга. Крім того, воно приводить до порушення, наприклад, співвідношення Фішера між критичними показниками простих рідин $\alpha' + 2\beta + \gamma' = 1,95 < 2$. При цьому, ситуація із співвідношенням Гріффітса для простих рідин виглядає ще більш драматично, оскільки $\alpha' + \beta(1 + \delta) = 1,75 < 2$ при використанні β з роботи [7]. Необхідно зазначити, що хоча на основі сучасних даних і можна стверджувати про виконання цих законів в межах експериментальних похибок, але деколи вони є досить значними. Саме тому дуже цікаво перевірити виконання скейлінгових законів (55)–(57) для критичних індексів М1 та М2.

Зручно почати з аналізу співвідношення Ліbermanа. В обох різновидах моделі КГМ реалізується режим $O(4)$ скейлінгу, коли $\gamma' = \frac{1}{\xi^T} - \beta$ та $\delta = \frac{1}{\xi^T \beta}$. Легко показати, що в цьому режимі співвідношення (57) виконується як рівність. Крім того, при $\chi = 0$ в М1 існує режим, що відтворює критичні показники β , γ' та δ в такому самому вигляді, як і в СММ [34]. Тому, як і в СММ, скейлінгове співвідношення Ліbermanа виконується в М1 у цьому випадку завжди. Проте, продемонструємо це, використовуючи явні вирази для відповідних індексів:

$$[\gamma' + \beta(1 - \delta)]_{M1} = \frac{\min\left(0, \frac{\zeta}{\kappa} \min(\tau - 1, \kappa) - \frac{1}{\xi^T}\right)}{\tau - 2} \geq 0, \tag{58}$$

де було використано $\min(0, \dots) \leq 0$ та $\tau < 2$. Справедливість співвідношення (57) для М1 в усіх інших випадках може бути доведена так само. У випадку М2 ситуація цілком аналогічна. Явні вирази для критичних індексів цієї моделі та співвідношення $\beta \leq \beta^+$ демонструють, що

$$[\gamma' + \beta(1 - \delta)]_{M2} = \frac{1}{\xi^T} \left(1 - \frac{\beta}{\beta^+}\right) \geq 0. \tag{59}$$

Тепер, використовуючи доведену нерівність Ліbermanа, можна показати, що для М1 і М2 завжди має місце співвідношення $\alpha' + \beta(\delta + 1) \leq \alpha' + 2\beta + \gamma'$. Воно є важливим результатом, який має декілька наслідків. По-перше, на його основі можна стверджувати, що умови виконання законів Фішера (55) і Гріффітса (56) збігаються лише за умови, що закон Ліbermanа виконується як рівність. По-друге, воно демонструє, що навіть задовольняючи співвідношення (55) не гарантовано виконання співвідношення (56) у загальному випадку. Використовуючи явні вирази для критичних індексів α' , β та γ' можна продемонструвати, що в М1

$$[\alpha' + 2\beta + \gamma']_{M1} = 2 + \frac{\zeta}{\kappa} - 2 \min\left(1, \frac{1}{\xi^T}\right) < 2 \tag{60}$$

при $\frac{\zeta}{\kappa} < 2 \min\left(1, \frac{1}{\xi^T}\right)$, а в М2

$$[\alpha' + 2\beta + \gamma']_{M2} = 2 \max\left(1, \frac{1}{\xi^T}\right) - \gamma'_{M2} \tag{61}$$

обов'язково менше за 2 при $\frac{1}{\xi^T} < 1 + \frac{\gamma'_{M2}}{2}$. Таким чином, можна стверджувати, що в моделях М1 і М2 співвідношення Фішера не виконується у загальному випадку для традиційного визначення α' . Необхідно зазначити, що відповідно до раніше зроблених висновків, співвідношення Гріффітса (56) також не виконується в обох різновидах моделі КГМ з поверхневим натягом.

Той факт, що проблеми виникають із задовільненням саме скейлінгових законів, в які входить індекс α' , тобто співвідношень Фішера та Гріффітса, був встановлений ще в [3]. Як пояснення цього факту було висунуто припущення про некоректність визначення вказаного індексу. Для того щоб задовольнити скейлінгові нерівності (55) та (56) введено новий індекс α'_s , який описує поведінку різниці теплоємностей двох чистих фаз на кривій ФП:

$$\Delta C \equiv (C^+ - C^-)_{T=T_c} \sim |t|^{-\alpha'_s}. \tag{62}$$

Використовуючи означення теплоємностей чистих фаз $C = \frac{T}{\rho} \frac{ds}{dT}$ та рівняння Клапейрона–Клаузіуса, ΔC можна представити у вигляді

$$\frac{\Delta C}{T_c} = \left[\frac{\rho^- - \rho^+}{\rho^+ \rho^-} \frac{d \left(s_Q + \frac{d\mu_c}{dT} \rho_Q \right)}{dT} - \frac{d\mu_c}{dT} \frac{d \ln \frac{\rho^+}{\rho^-}}{dT} \right]_{T=T_c}, \quad (63)$$

що має місце як для М1, так і для М2. Оскільки на кривій ФП $\rho^+ - \rho^- \sim |t|^\beta$, то з (11) та (26) випливає, що перший доданок у виразі для ΔC поведеться в околі критичної точки, як $|t|^{\min(\omega, \frac{1}{\xi T} - 2) + \beta}$. Використовуючи справедливе при малих відхиленнях густини від критичного значення наближення $\ln \frac{\rho^+}{\rho^-} \simeq \frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^-}$ можна показати, що поведінка другого доданка описується виразом $|t| \sim \xi T^{-2+\beta}$. Отже,

$$\alpha'_s = \max \left(\frac{1}{\xi T} - \omega, 2 \right) - \beta - \frac{1}{\xi T}, \quad (64)$$

в обох різновидах моделі КГМ з поверхневим натягом. Вираз (64) дозволяє безпосередньо перевірити гіпотезу Фішера і відповісти на питання чи можливо задовольнити скейлінгові закони використовуючи індекс α'_s замість α' . В обох моделях ця гіпотеза дійсно спрацьовує у випадку закону Фішера. Для доведення цього у випадку М1 використаємо співвідношення $\beta_{M1} \leq \frac{\zeta}{\kappa} (2 - \tau + \min(\kappa, \tau - 1)) - \frac{1}{\xi T}$, що впливає з явного виразу для цього індексу (43). З нього випливає, що $\frac{\zeta}{\kappa} - \beta - \frac{1}{\xi T} \geq 0$, а отже,

$$[\alpha'_s + 2\beta + \gamma']_{M1} = \max \left(2, \frac{1}{\xi T} \right) + \frac{\zeta}{\kappa} - \beta - \frac{1}{\xi T} \geq 2, \quad (65)$$

де на другому кроці було використано очевидну нерівність $\max(2, \dots) \geq 2$. За допомогою (53) та (64) можна показати, що для критичних індексів М2 виконується співвідношення

$$[\alpha'_s + 2\beta + \gamma']_{M2} = \max \left(2, \frac{1}{\xi T} \right) \geq 2. \quad (66)$$

Як видно, переозначення критичного індексу α' відповідно до фішерівського означення (62) дійсно дозволяє задовольнити скейлінговий закон (55) в обох версіях моделі КГМ з поверхневим натягом. Однак, це не спрацьовує у випадку скейлінгового закону (56). Дійсно, в моделі М2 залишаються певні проблеми з задовільненням співвідношення Гріффітса:

$$[\alpha'_s + \beta(1 + \delta)]_{M2} =$$

$$= \max \left(\frac{1}{\xi T} - \omega, 2 \right) + \frac{1}{\xi T} \left(\frac{\beta}{\beta^+} - 1 \right), \quad (67)$$

що при $\beta = \beta^- < \beta^+ \min(1, (2 + \omega)\xi T)$ дійсно менше за двійку. Таким чином, запропонована Фішером гіпотеза не спрацьовує у випадку співвідношення Гріффітса (56). Зазначимо, що причина невдалості фішерівського означення α'_s , з точки зору задовільнення скейлінгових співвідношень, полягає в тому, що під час обчислення ΔC найбільш сингулярні доданки можуть скорочуватися, якщо вони відносяться до двох фаз одного типу. Саме це і має місце в М2, оскільки співіснуючі по обидва боки від кривої ФП деконфайнмента адрони і КГП є газовими фазами. Зазначимо, що виконання скейлінгових законів з α'_s в М1 пов'язано з тим, що в цій моделі перехід деконфайнмента є ФП від газової адронної фази до рідкої фази КГР. Доведемо, що жодне означення критичного індексу α' не дозволить вирішити проблему із традиційним формулюванням скейлінгового співвідношення Гріффітса (56). Більш слушним, ніж α'_s з точки зору задовільнення скейлінгових законів, виглядає критичний індекс α'_c , який є узагальненням фішерівського означення (62):

$$C_{tot} \sim |t|^{-\alpha'_c}, \quad (68)$$

де $C_{tot} = [K^+ C^+ + K^- C^-]_{T=T_c}$. Скінченні при всіх значеннях температури та баріонного хімпотенціала коефіцієнти K^+ та K^- пов'язані із внесками чистих фаз у повну теплоємність системи в околі критичної точки. Зрозуміло, що, вибираючи конкретну функціональну залежність цих коефіцієнтів від T і μ , можна реалізувати різні значення індексу α'_c . Так, наприклад, $K^+ = 1$ і $K^- = -1$ у випадку фішерівського означення α'_s . Більш прийнятне та фізично обґрунтоване визначення відповідає додатним K^+ та K^- , що дозволяє запобігти скороченню будь-яких членів у виразах для теплоємностей двох фаз C^+ та C^- . Крім того, це відповідає фізичному змісту теплоємності C_{tot} , що характеризує систему, яка внаслідок значних флуктуацій в околі ТКТ чи КТ з певними ймовірностями існує в стані низькотемпературної чи високотемпературної фази. Саме тому, при знаходженні α'_c внески від кожної фази можна аналізувати окремо. З цією метою теплоємності чистих фаз на кривій ФП представимо у вигляді

$$C^\pm = \frac{T}{\rho^\pm} \left[\frac{ds_Q}{dT} - \frac{d}{dT} \left((\rho^\pm - \rho_Q) \frac{d\mu_c}{dT} \right) \right]. \quad (69)$$

Зазначимо, що для газових фаз (адрони та КГП) цей вираз є наслідком рівняння Клапейрона–Клаузіуса

$\frac{d\mu_c}{dT} = -\frac{s^\pm - s_Q}{\rho^\pm - \rho_Q} \Big|_{T=T_c}$, в той час, як для рідкої фази КГР він перетворюється на тотожність, оскільки $\rho = \rho_Q$ в цьому випадку. Використовуючи (69) та запропоноване означення (68), можна знайти C_{tot} . Проте, в цьому немає необхідності, оскільки в силу додатності коефіцієнтів K^+ і K^- маємо повне право окремо аналізувати поведінку теплоємностей чистих фаз. У випадку М1 КГР є високотемпературною фазою, а отже вираз для її теплоємності включає в себе лише перший доданок з (69). З (26) випливає, що в околі ТКТ його поведінка, так само, як і поведінка першого доданка з виразу для теплоємності низькотемпературної фази, описується ступенем $|t|^\omega$. Приймаючи до уваги те, що $(\rho^- - \rho_Q)_{T=T_c} \sim |t|^\beta$ та, використовуючи (11), можна показати, що другий доданок у виразі для C^- поводить як $|t|^{\frac{1}{\xi T} + \beta - 1}$. Критичний індекс α'_c описує поведінку головного члена у виразі для C_{tot} , тому

$$\alpha'_c = \max \left(\frac{1}{\xi T} + \beta - \omega, 2 \right) - \beta - \frac{1}{\xi T}. \quad (70)$$

Для знаходження індексу α'_c в М2, зазначимо, що лінійна комбінація перших доданків з виразів для C^\pm поводить як $|t|^\omega$. Крім того, використовуючи означення баріонних густин ρ^\pm та ρ_Q , як похідних по μ від відповідних тисків, за допомогою рівнянь (8) та (9) отримуємо для газових фаз, що співіснують по обидва боки від кривої ФП:

$$(\rho^\pm - \rho_Q)_{T=T_c} = T_c \frac{A_\mu - u \frac{\partial \sigma^\pm}{\partial \mu} I_{\tau-\kappa}}{1 - \frac{\partial F_\mu}{\partial z} + u I_{\tau-1}} \Big|_{T=T_c}. \quad (71)$$

З параметризацій (10), (15) та (18) випливає, що в околі КТ поведінка $(\rho^\pm - \rho_Q)_{T=T_c}$ описується виразом $|t|^{\min(\chi, \beta^\pm)}$ при $\zeta^\pm = 1$ або $|t|^\chi$ при $\zeta^\pm > 1$. Нагадаймо, що в М2 $\zeta^+ = 1$ завжди. Використовуючи явний вираз для індексу β даної моделі, можна показати, що лінійна комбінація інших доданків з виразів для C^+ та C^- поводить як $|t|^{\beta + \frac{1}{\xi T} - 2}$. Проведений аналіз дозволяє знайти індекс α'_c моделі М2, вираз для якого повністю збігається з (70).

Явні вирази (64) та (70) демонструють, що $\alpha'_c \geq \alpha'_s$ і тому означення індексу α'_c дійсно виглядає більш адекватним щодо задовільнення скейлінгових законів. Проте, навіть воно не дозволяє задовольнити скейлінгове співвідношення Гріффітса у формі (56). Так, наприклад, у моделі М2 комбінація критичних індексів, що відповідає цьому співвідношенню може бути менше за двійку при $\beta = \beta^- < \beta^+$ та $\beta \leq 2 + \omega - \frac{1}{\xi T}$.

Дійсно, в цьому режимі $\alpha'_c = 2 - \beta - \frac{1}{\xi T}$, а отже

$$[\alpha'_c + \beta(1 + \delta)]_{\text{M2}} = 2 + \frac{1}{\xi T} \left(\frac{\beta}{\beta^+} - 1 \right) < 2. \quad (72)$$

Таким чином, навіть найбільш фізично обґрунтоване означення критичного індексу α'_c не дозволяє задовольнити скейлінгові закони у загальному випадку. Для того щоб продемонструвати відсутність означення, яке дозволить це зробити, розглянемо також індекс α'_m , визначений як

$$\frac{T_c}{\rho_{\text{tot}}} \frac{ds_{\text{tot}}}{dT} \sim |t|^{-\alpha'_m}, \quad (73)$$

де ентропія $s_{\text{tot}} = [K^+ s^+ + K^- s^-]_{T=T_c}$, а ρ_{tot} – відповідна їй баріонна густина. Необхідно зазначити, що на коефіцієнти K^+ та K^- тут накладаються такі самі умови, як і у випадку визначення C_{tot} . Причини цього аналогічні вказаним вище. Похідна від s_{tot} містить члени пропорційні $\frac{ds^+}{dT}$ та $\frac{ds^-}{dT}$, їх поведінка описується виразом $|t|^{-\alpha'_c}$. Параметризуючи температурну залежність K^+ та K^- в околі критичної точки як $K^\pm \sim |t|^{\eta^\pm}$ знайдемо, що у виразі для $\frac{ds_{\text{tot}}}{dT}$ доданки, що пропорційні похідним від цих коефіцієнтів, поведуться як $|t|^{\min(\eta^+, \eta^-) - 1}$. Зазначимо, що при $\eta^+ \rightarrow 0$, $\eta^- \rightarrow 0$ їх поведінка є найбільш сингулярною. Тому для найбільшого з усіх можливих значень індексу α'_m отримуємо $\alpha'_m = \max(1, \alpha'_c)$. Крім того, з явних виразів для індексів α'_c та β випливає, що $\alpha'_c < 1$. Отже остаточно маємо

$$\alpha'_m = 1. \quad (74)$$

Такий самий результат для найбільшого з усіх можливих значень α' було отримано в [11]. Саме це дає змогу стверджувати, що означений відповідно до (73) індекс α'_m є найбільш прийнятним для того, щоб задовольнити скейлінгові співвідношення. Ще одним аргументом на користь цього твердження є співвідношення між критичними індексами α' , α'_s , α'_c та α'_m :

$$\alpha' \leq \alpha'_s \leq \alpha'_c < \alpha'_m, \quad (75)$$

що безпосередньо випливає з виразів (27), (64), (70) та (74). Цілком можливо, що така ієрархія має місце не лише у моделі КГМ з поверхневим натягом, але й у інших моделях та фізичних системах. Проте, в даний момент, на жаль, це неможливо перевірити через брак розуміння експериментальних даних. Однак, якщо це дійсно має місце, то незадовільнення скейлінгових законів з критичним індексом α'_m є однозначним доказом існування нових, тобто нефішерівських класів

універсальності, для яких останні мають вигляд, відмінний від (55)–(57). Перевіримо, чи має це місце у випадку скейлінгового закону Гріффітса:

$$\alpha'_m + \beta(1 + \delta) = 1 + \beta(1 + \delta), \quad (76)$$

який не виконується у формі (56) при $\beta(1 + \delta) < 1$. В моделі М2 це має місце при $\beta = \beta^- < \beta^+$ та $\beta^- < \frac{\xi^T \beta^+}{1 + \xi^T \beta^+}$. Наведений приклад демонструє, що жодне, навіть найбільш прийнятне означення критичного індексу α' , не дозволяє задовольнити скейлінгове співвідношення Гріффітса у традиційній формі. Оскільки це порушення скейлінгу має місце в моделі, яка не містить в собі жодних дефектів і є цілком сумісною з вимогами теореми Фішера [2], то необхідно з'ясувати чи можливо доповнити вимоги цієї теореми таким чином, щоб вона завжди справджувалася для певного кола фізичних систем. У роботах [10, 11] на основі аналізу цілком загальних вимог стійкості критичного стану системи було зроблено припущення про виконання скейлінгових законів Фішера та Гріффітса лише за умови рівності критичних індексів α та α' . Тому, природно перевірити чи приводить ця умова разом із вимогами теореми Фішера до задовільнення скейлінгових співвідношень у формі (55) та (56) в моделі КГМ з поверхневим натягом. Явні вирази для α , (40) і (41) в М1 та (49) в М2 демонструють, що в обох версіях моделі КГМ реалізується режим, в якому $\alpha = \alpha'$. В М1 це відбувається при $\chi \neq 1 - \frac{1}{\xi^T}$, що не забезпечує виконання скейлінгових законів Фішера (55) та Гріффітса (56). В М2, взагалі, рівність $\alpha = \alpha'$ має місце без накладання додаткових умов на будь-які модельні параметри. Отже, рівність критичних індексів α та α' не забезпечує виконання скейлінгових законів (55) та (56) у загальному випадку.

Оскільки ні переозначення критичного індексу α' [3], ні накладання додаткової умови $\alpha = \alpha'$ [11] не дозволяє задовольнити скейлінговий закон (56) в моделі КГМ з поверхневим натягом у загальному випадку, то ми робимо висновок про те, що вона належить до нового (нефішерівського) класу універсальності, для якого співвідношення Гріффітса має вигляд, відмінний від (56). Тому, можна зробити висновок, що скейлінгова проблема є значно глибшою, ніж здавалося попереднім дослідникам, і може вимагати переформулювання скейлінгових законів для деяких фізичних систем. Як вже зазначалося, їх порушення відбувається саме в моделях, в яких типи співіснуючих по обидва боки від кривої ФП фаз збігаються. Прикладом такої моделі є М2. Оскільки в М2 порушення скейлінга за всіх означень α' пов'язане зі співвідношенням Гріффітса та відбувається при

$\beta = \beta^- < \beta^+$, то саме його необхідно модифікувати задля задовільнення при довільних значеннях β . Явні вирази для відповідних критичних індексів демонструють, що співвідношення

$$\alpha'_c + \beta + \beta^+ \delta \geq 2, \quad (77)$$

яке є аналогом (56), дійсно завжди виконується в М1 і М2. Тут воно записано із використанням критичного індексу α'_c , оскільки він є найприйнятнішим з точки зору задовільнення скейлінгу та водночас, на відміну від α'_m , фізично обґрунтованим. Однак, принаймні в М1 та М2, співвідношення (77) також виконується за використання α'_s , в той час, як для традиційного означення α' ця нерівність не справджується. Крім того, з умови $\beta \leq \beta^+$ випливає той факт, що у випадку виконання для певної фізичної системи нерівності (56), співвідношення (77) виконується автоматично, але не навпаки. Унікальна властивість М2, яка дозволила виявити необхідність модифікації скейлінгового закону Гріффітса, полягає в тому, що в цій моделі режим, за якого $\beta = \beta^- < \beta^+$, генерується лише при накладанні на модельні параметри умов, що є несумісними з виконанням останнього. В М1, наприклад, співвідношення $\beta^- < \beta^+$ є автоматичним наслідком загальної вимоги скінченності об'ємної долі адронної фази в ТКТ. В СММ, спінових та магнітних системах це співвідношення взагалі є наслідком того, що у високотемпературній фазі значення величини, стрибок якої описується критичним індексом β (густина ядерної речовини чи спонтанна намагніченість), збігається з критичним. Дійсно, для цих систем $\rho^+ = \rho_{сер} = \frac{1}{b}$ [24], де b позначає об'єм одного нуклона та $M^+ = M_{сер} = 0$. Тому, відповідно до означення (30), індекс β^+ у цих випадках формально дорівнює нескінченності, оскільки $0 < |t| < 1$ на кривій ФП.

5. Висновки

Надзвичайно широке застосування гіпотези подібності критичної поведінки різних фізичних систем приводить до необхідності детального вивчення питання про віднесення цих систем в той чи інший клас універсальності. Традиційні скейлінгові закони (55)–(57) [2, 3] виконуються для досить широкого кола фізичних систем і моделей, що належать до фішерівських класів універсальності. Проте, існують приклади коли це не так.

З метою дати відповідь на питання про природу такого порушення ми провели вичерпний аналіз моделі

КГМ з поверхневим натягом. Було розглянуто її різновиди, що генерують фазові діаграми з ТКТ та КТ. Для надання моделі найбільшої загальності ми ввели три нові параметри, а саме ξ^T , що визначає форму кривої ФП в $\mu - T$ координатах, χ – введено внаслідок виконання на цій кривій рівняння Клапейрона–Клаузіса та ω , за допомогою якого описується поведінка густини ентропії рідкої фази. Введення цих індексів дозволило повністю описати критичні показники різноманітних фізичних систем та моделей.

Критичні показники α , α' , β , γ' та δ моделі КГМ з поверхневим натягом було знайдено, як функції модельних параметрів. Незважаючи на значну подібність М1 та М2, їхні критичні індекси, за винятком α' , дуже відрізняються. Це пояснюється відмінностями у механізмі генерації критичних точок цих моделей. Проте, було встановлено існування в них режимів, за яких співвідношення між всіма критичними індексами цих моделей є ідентичними. Крім того, було продемонстровано, що розв'язки СММ [34] включені в М1, як частинний випадок. Дану обставину слід розглядати, як беззаперечний доказ загальності моделі КГМ з поверхневим натягом. Знайдені вирази для критичних індексів дозволили безпосередньо перевірити виконання скейлінгових законів у формі (55)–(57). Було встановлено, що в обох версіях моделі КГМ з поверхневим натягом у загальному випадку має місце порушення скейлінгових співвідношень Фішера (55) та Гріффітса (56), до яких входить індекс α' , в той час, як закон Лібермана (57) виконується завжди. Для подальшого вивчення цієї проблеми ми перевірили гіпотезу Фішера [3] та знайшли критичну експоненту α'_s . Аналіз скейлінгових законів з цим індексом для моделей М1 та М2 дозволив з'ясувати умови, коли вона виявляється плідною. Було виявлено, що у загальному випадку ця гіпотеза спрацьовує лише для моделей, у яких тип фаз, існуючих по різних боки від кривої ФП, є різним. Проаналізувавши причини, які роблять фішерівське означення α'_s невдалим, ми ввели нову критичну експоненту α'_c , що є більш вдалою з точки зору задоволення скейлінгових співвідношень Фішера (55) та Гріффітса (56). Крім того, з метою надання даному аналізу вичерпності, введено також означення індексу α'_m . Необхідно зазначити, що хоча останній і набуває найбільших з усіх можливих для індексу α' значень, він не є фізично обґрунтованим. Тобто його введення викликано суто методичними причинами. Тому, враховуючи чіткий фізичний зміст теплоємності C_{tot} , ми наполягаємо, що саме введений нами критичний індекс α'_c є найбільш вдалим та фізично обґрунтованим. Несподі-

ваним результатом стало те, що жодне з означень α'_s , α'_c та α'_m не дозволяє задовольнити одразу всі скейлінгові співвідношення (55)–(57) у загальному випадку. Ця обставина красномовно свідчить про існування моделей, в даному випадку М2, для яких ці співвідношення мають вигляд, відмінний від (55)–(57). Зазначимо, цей висновок підсилюється тим, що всупереч [10, 11], накладання додаткової умови $\alpha = \alpha'$ не приводить до вирішення скейлінгової проблеми ні в М1, ні в М2. Сподіваємось, що подальші експериментальні дослідження, проведені узгодженим чином, дозволять остаточно прояснити це питання. Необхідно зазначити, що для забезпечення прецизійності результатів, виміри необхідно проводити для однієї речовини.

Хоча, отримані результати і вимагають подальшого вивчення, на основі їх вже нині можна стверджувати про існування нефішерівських класів універсальності, для яких деякі зі скейлінгових законів можуть відрізнитись від їх традиційної форми (55)–(57). На основі аналізу моделей М1 та М2 доведено існування одного з таких співвідношень (77).

Автори щиро дякують І.М. Мішустіну та Л.М. Сатарову за плідні обговорення результатів та Т.В. Іванчук за значну допомогу в підготовці манускрипту до публікації.

1. E.A. Guggenheim, J. Chem. Phys. **13**, 253 (1945).
2. M.E. Fisher, J. Math. Phys. **5**, 944 (1964).
3. M.E. Fisher and B.U. Felderhof, Ann. Phys. **58**, 217 (1970).
4. K. Huang, *Statistical Mechanics*, (Wiley, New York, 1987).
5. H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
6. P.R. Roach, Phys. Rev. **170**, 213 (1968); P.R. Roach and D.H. Douglass, Phys. Rev. Lett. **19**, 287 (1967).
7. Yu.I. Shimansky, E.T. Shimanskaya, Inter. J. Thermophys. **17**, 3, 651 (1996).
8. Ю.І. Шиманський, О.Т. Шиманська, А.В. Олійникова, Наукові Записки НАУ КМА, Фізика, **5**, 6 (1998).
9. M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Phys. Rev. E **65**, 066127 (2002).
10. E.D. Soldatova, Cond. Mat. Phys. **2**, 603 (1999).
11. E.D. Soldatova, O.M. Galdina Cond. Mat. Phys. **8**, 793 (2005).
12. F. Karsch, AIP Conf.Proc. **602**, 323 (2001).
13. R. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D **29**, 338 (1984).

14. F. Wilczek, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 3911 (1992); F. Wilczek and K. Rajagopal, *Nucl. Phys. B* **399**, 395 (1993).
15. E.V. Shuryak, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 48 (2009).
16. M. Stephanov, *Pos LAT2006:024*, (2006).
17. P.N. Meisinger and M.C. Ogilvie, *Phys. Lett. B* **379**, 163 (1996); P.N. Meisinger, T.R. Miller, and M.C. Ogilvie, *Phys. Rev. D* **65**, 034009 (2002); A. Mocsy, F. Sannino, and K. Tuominen, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 182302 (2004);
18. E. Megias, E. Ruis Arriola, and L.L. Salcedo, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 065005; C. Ratti, M.A. Thaler, and W. Weise, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 014019; C. Sasaki, B. Friman, and K. Redlich, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 074013.
19. K. Fukushima, *Phys. Lett. B* **591**, 277 (2004).
20. B.-J. Schaefer, J.M. Pawlowzki, and J. Wambach, *Phys. Rev. D* **76**, 074023 (2007); T.K. Herbst, J.M. Pawlowski, and B.-J. Schaefer, *Phys. Lett. B* **696**, 58 (2011) and references therein.
21. M.I. Gorenstein, V.K. Petrov, and G.M. Zinoviev, *Phys. Lett. B* **106**, 327 (1981).
22. I. Zakout and C. Greiner, arXiv:1002.3119 [nucl-th].
23. K.A. Bugaev, *Phys. Rev. C* **76**, 014903 (2007).
24. J.P. Bondorf, A.Z. Botvina, A.Z. Iljinov, I.N. Mishustin, and K. Sneppen, *Phys. Rep.* **257**, 133 (1995).
25. M.E. Fisher, *Physics* **3**, 255 (1967).
26. K.A. Bugaev, *Phys. Atom. Nucl.* **71**, 1615 (2008).
27. K.A. Bugaev, V.K. Petrov, and G.M. Zinoviev, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **9**, 397 (2012).
28. R. Hagedorn, *Nuovo Cimento Suppl.* **3**, 147 (1965).
29. K.A. Bugaev, L. Phair, and J.B. Elliott, *Phys. Rev. E* **72**, 047106 (2005); K.A. Bugaev and J.B. Elliott, *Ukr. J. Phys.* **52**, 301 (2007).
30. J. Hosek, *Czech. J. Phys.* **41**, 1037 (1991).
31. J. Hosek, *Czech. J. Phys.* **43**, 309 (1993).
32. K.A. Bugaev and G.M. Zinoviev, *Nucl. Phys. A* **848**, 443 (2010).
33. K.A. Bugaev, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **8**, 907 (2011).
34. P.T. Reuter and K.A. Bugaev, *Phys. Lett. B* **517**, 233 (2001).
35. A.I. Ivanytskyi, *Nucl. Phys. A* **880**, 12 (2012).
36. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **63**, 214503 (2001).
37. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **65** 144520 (2002).
38. G. Baker, D. Meiron, and B. Nickel, *Phys. Rev. B* **17**, 1365 (1978).
39. K. Kanaya and S. Kaya, *Phys. Rev. D* **51**, 2404 (1995).
40. S. Ejiri *et al.*, *Phys. Rev. D* **80**, 09450 (2009).
41. O. Kaczmarek *et al.*, *Phys. Rev. D* **83**, 014504 (2011).

42. D.A. Lavis and G.M. Bell, *Statistical Mechanics of Lattice Systems*, Vol. 1 (Springer, Heidelberg, 1999).
43. F. Karsch, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **186**, 479 (2010).
44. J. Engels and F. Karsch, 1105.0584 [hep-lat].
45. R.B. Griffiths, *J. Chem. Phys.* **43**, 1958 (1965).
46. D.A. Liberman, *J. Chem. Phys.* **44**, 419 (1966).

Одержано 16.07.12

О ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕФИШЕРОВСКИХ КЛАССОВ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ

А.І. Іванцукій, К.А. Бугаєв,

Резюме

Критические экспоненты α , α' , β , γ' и δ модели кварк-глюонных мешков с поверхностным натяжением найдены как функции наиболее общих модельных параметров. Рассмотрены две разновидности модели, которые генерируют фазовую диаграмму сильно взаимодействующей материи с критической или с трикритической точкой соответственно. Анализ соотношений между критическими индексами (скейлинговых законов) демонстрирует, что в общем случае скейлинг может быть нарушен. Проанализирован вопрос о возможном восстановлении скейлинговых законов с помощью фишерского определения индекса α' и его обобщений α'_c , α'_m . Показано, что скейлинговое соотношение Фишера можно восстановить с помощью обобщений α'_c и α'_m , в то время как ни одно определение α' не способно восстановить скейлинговое соотношение Гриффитса в традиционной форме. Также явно показано, что дополнительное условия $\alpha = \alpha'$ не достаточно для восстановления скейлингового соотношения Гриффитса в традиционном виде. Предложено обобщение этого скейлингового соотношения, которое справедливо для всех известных моделей. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможном существовании нефисеровских классов универсальности, для которых традиционные скейлинговые соотношения могут быть нарушены, в то время, как для них выполняются обобщенные скейлинговые законы.

ON THE POSSIBLE EXISTENCE OF NON-FISHER UNIVERSALITY CLASSES

A.I. Ivanytskyi, K.A. Bugaev

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03680, Ukraine;
e-mail: a_iv_@ukr.net, bugaev@th.physik.uni-frankfurt.de)

Summary

The critical exponents α , α' , β , γ' , and δ of the model of quark-gluon bags with surface tension are found as functions of the most general model parameters. Two versions of the model that generate the phase diagram of the strongly interacting matter with critical or tricritical endpoint, respectively, are considered. The

analysis of the relations between the critical exponents (scaling laws) shows that the scaling can be violated in a general case. The question whether it is possible to restore the scaling laws with the help of the Fisher definition of the α'_s exponent and its generalizations α'_c and α'_m is studied. It is shown that the Fisher scaling relation can be recovered with the help of the generalizations α'_c and α'_m , whereas any definition of the α' exponent cannot help one to recover the Griffiths scaling relation in its traditional form. It is explicitly demonstrated that the additional condition $\alpha = \alpha'$

is not sufficient to restore the Griffiths scaling relation in the traditional form. It is also explicitly demonstrated that the additional condition $\alpha = \alpha'$ is not sufficient to restore the Griffiths scaling relation in the traditional form. A generalization of this scaling relation which is valid for all known models is suggested. The obtained results allow us to conclude on the possible existence of the non-Fisher universality classes, for which the traditional scaling relations can be violated, whereas the generalized scaling laws can be established.