

О. МОРОЗ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України  
(Вул. Метрологічна, 14b, Київ 03680; e-mail: moroz@bitp.kiev.ua)

## ЗСУВНА ТА ОБ'ЄМНА В'ЯЗКОСТІ ГАДРОННОГО ГАЗУ В НАБЛИЖЕННІ ЧАСУ РЕЛАКСАЦІЇ ТА ЙОГО ПЕРЕВІРКА

УДК 539

*Обчислено зсувну та об'ємну в'язкості гадронного газу. Вони визначають його дисипативну динаміку і впливають на еліптичний потік, який вимірюється експериментально. Внаслідок складності цього обчислення наближення часу релаксації (НЧР) було використано в попередніх роботах. Оскільки ці результати наблизились до реалістичних результатів, є необхідність знайти, наскільки точним є НЧР. Для цього обчислено в'язкості в НЧР, використовуючи перетини розсіяння, витягнуті з моделі ультра-релятивістської квантової молекулярної динаміки (УрКМД), та порівняно їх з цими самими обчисленнями, але без НЧР. Це дозволяє нам знайти оцінки похибок через застосування НЧР в обчисленнях в'язкостей, які є вірними і для інших схожих моделей. Наприклад, в інтервалі температур  $100 \text{ MeV} \lesssim T \lesssim 160 \text{ MeV}$  при нульових хімічних потенціалах зсувна в'язкість стає меншою до 1,57 разів через застосування НЧР або до 1,45 разів, якщо використовується усереднений час релаксації. Це має важливі наслідки для інтерпретації попередньо зроблених обчислень в'язкостей та для деяких інших споріднених обчислень. В рамках НЧР також знаходимо оцінку збільшення об'ємної в'язкості гадронного газу через незбереження чисел частинок.*

*Ключові слова:* наближення часу релаксації, об'ємна в'язкість, зсувна в'язкість, гадронний газ.

### 1. Вступ

Зсувна та об'ємна в'язкості необхідні для дисипативного гідродинамічного опису. Цей опис знаходить застосування до сильно взаємодіючої матерії, утвореної у зіткненнях важких іонів. Зокрема, її еліптичний потік може бути вимірним, див. огляд [1].

У цій статті зосереджуємось на обчисленні коефіцієнтів зсувної та об'ємної в'язкості гадронного газу при нульових хімічних потенціалах. Робота [2] надає ці обчислення, близькі до реалістичних, з унікальним просуненням вперед. Однак, вони зроблені в НЧР.

НЧР для рівняння Больцмана (РБ) відоме впродовж довгого часу, див., наприклад, [3]. Перева-

га використання його в тому, що воно забезпечує спрощення в обчисленнях. Однак, у всіх відомих його реалізаціях похибки від його застосування не є контрольованими. Існують деякі перевірки і аналіз НЧР [4–6], хоча цього недостатньо для оцінки похибок від застосування НЧР, якщо необхідні обчислення для гадронного газу. Тож існує необхідність перевірити це наближення. Коли оцінки похибки для нього будуть знайдені, їх можна використати в інших обчисленнях, що ґрунтуються на НЧР (безпосередньо або після модифікації, виведення або застосування певного анзацу), наприклад, в [7] або гідрокінетичних обчисленнях [8]. Можна було б очікувати, що коефіцієнти теплопровідності та дифузії, будучи, скоріше, близькими за їх властивостями до зсувної в'язкості, мають приблизно ті самі похибки при маленьких у

порівнянні з температурою хімічних потенціалах та приблизно тих самих густинах.

Виявляється, що об'ємна в'язкість сильно збільшується після введення непружних (із зміною чисел частинок) процесів. Їх врахування може мати деякі складнощі, хоча в НЧР вони можуть бути враховані відносно легко. Також можна казати про наближене збереження чисел частинок, що має конкретну математичну реалізацію для об'ємної в'язкості. Роблячи порівняння між максимальним та мінімальним збільшенням (або між випадками мінімального та максимального збережень чисел частинок) в рамках однієї і тієї ж моделі гадронного газу та наближень, можна було б знайти оцінки похибок, потрібні в [2, 7, 9].

## 2. НЧР та результати

Система РБ у локальній системі спокою в НЧР може бути записана у вигляді [3]:

$$\frac{df_k(t, \mathbf{r}, p_k^0)}{dt} = -\frac{f_k(t, \mathbf{r}, p_k^0) - f_k^{(0)}}{\tau_{\text{rel},k}(t, \mathbf{r}, p_k^0)}, \quad (1)$$

$$f_k^{(0)} \equiv f_k^{(0)}(t, \mathbf{r}, p_k^0) = \exp(-p_k^0/T(t, \mathbf{r})), \quad (2)$$

$$\tau_{\text{rel},k}^{-1}(t, \mathbf{r}, p_k^0) = \sum_l \int \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3} f_l^{(0)} v_{kl} \sigma_{kl}^{\text{tot}}(s), \quad (3)$$

$$v_{kl} \equiv \frac{\sqrt{(s - m_k^2 - m_l^2)^2 - 4m_k^2 m_l^2}}{2p_k^0 p_l^0}, \quad (4)$$

де  $f_k(t, \mathbf{r}, p_k^0)$  та  $f_k^{(0)}$  – нерівноважна та локально рівноважна функції розподілу відповідно,  $\tau_{\text{rel},k}(t, \mathbf{r}, p_k^0) \equiv \tau_{\text{rel},k}(p_k^0)$  – час релаксації, що залежить від одночастинкової енергії  $p_k^0$  типу  $k$  (див. [10]),  $v_{kl}$  – релятивістська відносна швидкість (див. [11]),  $\sigma_{kl}^{\text{tot}}(s)$  – повний  $2 \leftrightarrow 2$  перетин розсіяння (див. також коментарі нижче),  $s$  – звичайна змінна Мандельштама.

Ми також розглядаємо усереднений по імпульсу час релаксації як в [2]. Загалом це наближення не має бути краще, однак, в наших обчисленнях ми знаходимо його приблизно таким саме хорошим, як і з часом релаксації, залежним від імпульсу. В [2] використовуються транспортні перетини розсіяння, такі як і в [12]. Гадронні перетини розсіяння УрКМД [13, 14], які ми експлуатуємо<sup>1</sup>, мають

<sup>1</sup> Ми використовуємо покращені та витягнуті з УрКМД перетини розсіяння, як це описано в [9].

деяку кутову екстраполяцію від нуклонів, але ми просто не переймаємо її тут. Очікувані відхилення – на 4% або менше. З покращеними транспортними перетинами розсіяння, такими як в [4, 5], ізотропні повні перетини розсіяння отримали б додатковий множник  $2/3$  (а в'язкості отримали б множник  $3/2$ ). Це не забезпечує кращий загальний опис в'язкостей, але він є кращим при достатньо високих температурах, див. нижче.

Ми використовуємо  $\sigma_{kl}^{\text{tot}}(s)$  як  $2 \leftrightarrow n$  повні перетини розсіяння (ППР), беручи до уваги також квазіпружні та інші, окрім  $2 \leftrightarrow 2$ , процеси, як в [9]. Так що деякі перетини розсіяння підсумовуються точно в повні, а деякі підсумовуються приблизно. Це наближення є хорошим, див. [9], для перевірок. До того ж ми також використовуємо пружні плюс квазіпружні перетини розсіяння (ПКПР) [9] і знаходимо приблизно ті самі оцінки похибок, що і з ППР. Інші наближення, які ми застосовуємо (рівняння стану ідеального газу, немає ефектів середовища, класична статистика), приводять до малих поправок [2, 9] принаймні в діапазоні температур  $100 \text{ MeV} \lesssim T \lesssim 160 \text{ MeV}$  при нульових хімічних потенціалах. Якщо ці поправки не малі, то в припущенні відсутніх або слабких кореляцій з поправками від НЧР останні все ще можуть бути застосовними.

Час релаксації входить в зсувну  $\eta$  та об'ємну  $\xi$  в'язкості як (див. [10]):

$$\eta = \frac{1}{15T} \sum_k \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \frac{\tau_{\text{rel},k}(p_k^0)}{(p_k^0)^2} |\mathbf{p}|^4 f_k^{(0)}, \quad (5)$$

$$\xi = T^3 \sum_k \int \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \frac{\tau_{\text{rel},k}(p_k^0)}{(p_k^0)^2} \hat{Q}_k^2 f_k^{(0)}, \quad (6)$$

де  $\hat{Q}_k$  є безрозмірним джерелом об'ємної в'язкості, яке ми беремо в зручній формі, як в [15]. Там наближення максимального збереження чисел частинок означає, що заряди частинок є рівними дельта-функціям Кронекера,  $q_{ak} = \delta_{ak}$ . Наближення максимального незбереження є еквівалентним випадку  $q_{ak} = 0$  при нульових хімічних потенціалах. Є також умови фіту, які можуть бути задоволені, модифікуючи додатково час релаксації [16]. Ми не досліджуємо, чи забезпечує ця модифікація НЧР кращий загальний опис. Ми зацікавлені в перевірці НЧР, яке використовується в [2].

На рис. 1 та 2 наведено результати обчислень зсувної в'язкості і об'ємної в'язкості відповідно при

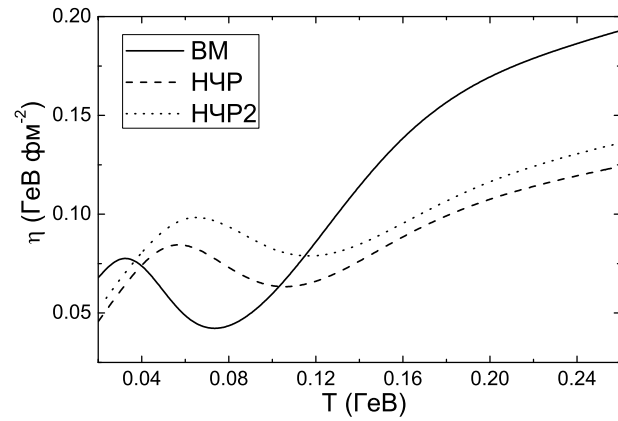
нульових хімічних потенціалах. Окрім обчислень в НЧР там також зображені обчислення, що використовують варіаційний метод із застосуванням ППР [9]. По цих результатах можна побачити відхилення через застосування НЧР. Щоб побачити, наскільки сильно залежать ці відхилення від енергетичної залежності ППР, ми також зробили ті самі розрахунки з ПКПР. Це майже не змінює відхилення, так що ми не показуємо результатів з ПКПР. Оскільки температурна залежність в'язкостей в моделі SHMC [2] і в моделі цієї статті є подібними одна до одної, знайдені оцінки похибок від застосування НЧР повинні бути приблизно ті самі для моделі SHMC.

З рис. 1 видно, що у важливому діапазоні температур<sup>2</sup> зсувна в'язкість зменшується до 1,57 раз через застосування НЧР. Якщо використовується усереднений час релаксації, ці відхилення є дещо меншими і досягають фактора 1,45, що є, скоріше, випадковим поліпшенням. При менших температурах, поблизу мінімуму зсувної в'язкості, ці відхилення є натомість дещо більшими. Також зсувна в'язкість в НЧР, що більша у 3/2 раза (див. вище), забезпечила б кращий опис за більш високих температур, але гірший опис поблизу мінімуму зсувної в'язкості. Цей мінімум для гадронного газу пов'язаний з резонансними піками в квазіпружних перетинах розсіяння піонів, що домінують при тих енергіях і температурах. Так що ця швидка зміна в енергетичній залежності перетинів розсіяння не дозволяє покращений опис в НЧР. При більш високих температурах різні енергетичні залежності перетинів розсіяння скорочують одна одну приблизно, що приводить до кращого опису з одним сталим перетином розсіяння<sup>3</sup> [9].

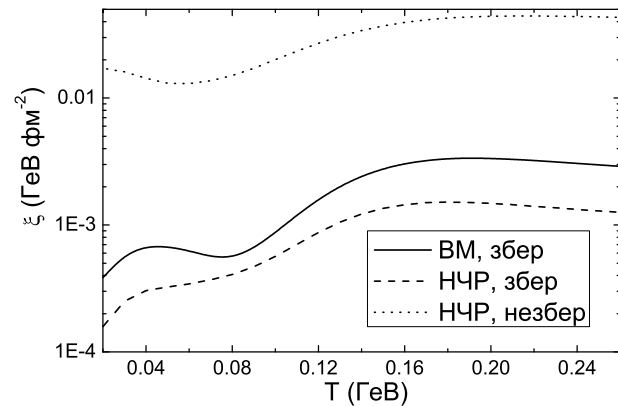
На рис. 2 продемонстровано обчислення об'ємної в'язкості в наближеннях мінімального і максимального збережень чисел частинок (див. коментарі вище). Обчислення об'ємної в'язкості з використанням варіаційного методу показані лише в наближенні максимального збереження, оскільки лише це наближення розглянуто в [9]. Оскільки

<sup>2</sup> При нульових хімічних потенціалах маємо для температури кінетичного фріз-аута  $T \approx 120$  MeV [17], а для псевдокритичної температури та температури хімічного фріз-аута маємо  $T \approx 160$  MeV [17, 18].

<sup>3</sup> В цьому наближенні відхилення через застосування НЧР є у 1,6–1,7 разів в усьому розглянутому інтервалі температур.



**Рис. 1.** Зсувна в'язкість залежно від температури. Розрахунки виконані з використанням варіаційного методу в третьому порядку (суцільна лінія), використовуючи НЧР (пунктирна лінія) і використовуючи НЧР з усередненим часом релаксації (лінія з точок)



**Рис. 2.** Об'ємна в'язкість залежно від температури. Розрахунки виконані в наближенні максимального збереження з використанням варіаційного методу в п'ятому порядку (суцільна лінія) та з використанням НЧР (пунктирна лінія). Розрахунки в наближенні максимального незбереження з використанням НЧР позначено лінією з точок

обчислення об'ємних в'язкостей, використовуючи НЧР з усередненим та неусередненим часом релаксації, відрізняються на 13% або менше, ми не показуємо результати з усередненим часом релаксації. Об'ємна в'язкість в НЧР виявляється меншою при всіх температурах в 1,4–2,4 раза<sup>4</sup>.

Також з рис. 2 можна побачити, що збільшення об'ємної в'язкості через максимальне незбере-

<sup>4</sup> Ці числа замінюються на 2,1–2,6, якщо використовується наближення одного сталого перетину розсіяння.

ження чисел частинок є великим. При температурі хімічного фрїз-аута  $T \approx 160$  MeV відношення об'ємної в'язкості в НЧР з максимальним незбереженням до об'ємної в'язкості з максимальним збереженням дорівнює 27,27. На лінії хімічного фрїз-ауту, де пружні плюс квазіпружні частоти є рівними повним частотам, ми не знаємо апріорі, яке наближення домінує в об'ємній в'язкості, тому нам треба розділити це число на два, щоб використовувати його як оцінку похибки в розрахунках з будь-яким з наближень. Також жодне з наближень не повинно бути дійсним за межами своєї зони, обмеженої лінією хімічного фрїз-аута. При менших температурах (і тих самих хімічних потенціалах) така ж оцінка похибки 13,64 може бути використана, оскільки там непружні процеси стають слабше [9, 19]. Можна було б також поєднати згасання збільшення об'ємної в'язкості з частотами зіткнень і помножити число 27,27 на  $1 - \text{rate}_{\text{elastic}}/\text{rate}_{\text{total}}$  (або використати відповідний вираз із зсувними в'язкостями або об'ємними в'язкостями, які є приблизно обернено пропорційними до частот зіткнень, з [9]; ми не презентуємо тут цей результат явно для компактності). Температури  $T \gtrsim 160$  MeV є менш цікавими, оскільки вони знаходяться вище псевдокритичної температури [18], однак аналогічна екстраполяція може бути зроблена при цих температурах. Ми наводимо ці оцінки із застереженням, оскільки розрахунки на основі методу Чепмена–Енскога і варіаційного методу [15] дають помітно більшу оцінку.

### 3. Висновки

У прямому порівнянні ми виявили, що зазвичай можна очікувати відхилення у в'язкостях через застосування НЧР до 2–3 разів з енергетичною залежністю перетинів розсіяння, як в ґадронному газі, при розглянутих температурах  $20 \text{ MeV} \leq T \leq 260 \text{ MeV}$  і нульових хімічних потенціалах.

При температурах  $T \gtrsim 100$  MeV і нульових хімічних потенціалах застосування НЧР зменшує зсувну в'язкість  $\eta$ . Фактор цього відхилення досягає 1,57 при  $T = 160$  MeV або 1,45, якщо використовується усереднений час релаксації. Оскільки температурна залежність  $\eta$  в моделі SHMC [2] і в цій роботі близькі одна до одної, знайдені оцінки похибки повинні бути приблизно такими самими там. Це підтверджує, що процеси мультиґадронно-

го утворення та деякі інші, які, як видно, не враховуються в [2], є важливими для отримання  $\eta/s$  ( $s$  – густина ентропії), яке б добре узгоджувалось з експериментальними даними [9].

Використовуючи ППР, ми виявили, що відношення об'ємної в'язкості з максимальним незбереженням до об'ємної в'язкості з максимальним збереженням дорівнює 27,27 при температурі хімічного фрїз-аута  $T \approx 160$  MeV. Це число має бути розділене на два на лінії хімічного фрїз-аута, де перевага не надається апріорі ні збереженню, ні незбереженню. За інших температур деякі екстраполяції можуть бути використані. Для цієї мети є бажаними подальші дослідження. Ми презентуємо тут оцінку з застереженням, оскільки розрахунки на основі методу Чепмена–Енскога і варіаційного методу [15] дають помітно більші оцінки. Якщо вони помітно більші, це може бути випадком найбільших відхилень внаслідок застосування НЧР.

1. J. I. Kapusta, [arXiv:0809.3746 [nucl-th]].
2. A.S. Khvorostukhin, V.D. Toneev, and D.N. Voskresensky, Nucl. Phys. A **845**, 106 (2010).
3. F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965), Chap. 13.
4. S. Plumari, A. Puglisi, F. Scardina, and V. Greco, Phys. Rev. C **86**, 054902 (2012).
5. A. Wiranata, M. Prakash, and P. Chakraborty, Central Eur. J. Phys. **10**, 1349 (2012).
6. A. Wiranata and M. Prakash, Phys. Rev. C **85**, 054908 (2012).
7. A. Tawfik and M. Wahba, Annalen Phys. **522**, 849 (2010).
8. Y.M. Sinyukov, S.V. Akkelin, and Y. Nama, Phys. Rev. Lett. **89**, 052301 (2002).
9. O.N. Moroz, arXiv:1301.6670 [hep-ph].
10. P. Chakraborty and J.I. Kapusta, Phys. Rev. C **83**, 014906 (2011).
11. S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen and Ch.G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1980), Chap. I, Sec. 2.
12. E.M. Lifschitz and L.P. Pitaevski, *Physical kinetics* (Pergamon Press, Oxford, 1981), Sec. 11.
13. S.A. Bass, M. Belkacem, M. Bleicher, M. Brandstetter, L. Bravina, C. Ernst, L. Gerland, and M. Hofmann *et al.*, Prog. Part. Nucl. Phys. **41**, 225 (1998).
14. M. Bleicher, E. Zabrodin, C. Spieles, S. A. Bass, C. Ernst, S. Soff, L. Bravina, and M. Belkacem *et al.*, J. Phys. G **25**, 1859 (1999).
15. O.N. Moroz, arXiv:1112.0277 [hep-ph].
16. A.S. Khvorostukhin, V.D. Toneev, and D.N. Voskresensky, NPA 915, **159** (2013).
17. U.W. Heinz and G. Kestin, Eur. Phys. J. ST **155**, 75 (2008).

18. S. Borsanyi *et al.* [Wuppertal-Budapest Collaboration], JHEP **1009**, 073 (2010).  
 19. M. Bleicher and J. Aichelin, Phys. Lett. B **530**, 81 (2002).

Одержано 25.10.13

*О. Мороз*

СДВИГОВАЯ И ОБЪЁМНАЯ ВЯЗКОСТИ  
 АДРОННОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ ВРЕМЕНИ  
 РЕЛАКСАЦИИ И ЕГО ПРОВЕРКА

Резюме

Вычислены сдвиговая и объемная вязкости адронного газа. Они определяют его диссипативную динамику и влияют на экспериментально измеряемый эллиптический поток. Из-за сложности этого вычисления в предыдущих работах было использовано приближение времени релаксации (ПВР). Поскольку эти результаты приблизились к реалистичным, есть необходимость найти, насколько точным является ПВР. Для этого мы вычисляем вязкости в ПВР, используя сечения рассеяния, извлеченные из модели ультрарелятивистской квантовой молекулярной динамики (УрКМД), и сравниваем их с этими же вычислениями, но без ПВР. Это позволяет нам найти оценки ошибок из-за применения ПВР в вычислениях вязкостей, которые являются верными и для других похожих моделей. Например, в интервале температур  $100 \text{ МэВ} \lesssim T \lesssim 160 \text{ МэВ}$  при нулевых химических потенциалах сдвиговая вязкость становится меньше до 1,57 раз из-за использования ПВР или до 1,45 раз, если используется усредненное время релаксации. Это имеет важные следствия для интерпретации ранее сделанных вычислений вязкостей и для некоторых родствен-

ных вычислений. В рамках ПВР мы также находим оценку увеличения объемной вязкости адронного газа из-за несохранения чисел частиц.

*О. Мороз*

SHEAR AND BULK VISCOSITIES  
 OF THE HADRON GAS WITHIN RELAXATION  
 TIME APPROXIMATION AND ITS TEST

Резюме

We concentrate on the calculation of the shear and bulk viscosities of a hadron gas. They define its dissipative dynamics and influence its experimentally measurable elliptic flow. Due to the difficulty of this calculation, the relaxation time approximation (RTA) was used in previous works. As those results have approached the realistic ones, there is a need to find out how accurate RTA is. For this sake, we calculate the viscosities in RTA, by using the cross sections extracted from the ultrarelativistic quantum molecular dynamics (UrQMD) model and compare them with the same ones calculated without RTA. This allows us to find the estimates of errors due to the application of RTA in the calculations of viscosities, which are valid also for other similar models. For instance, in the temperature region  $100 \text{ MeV} \lesssim T \lesssim 160 \text{ MeV}$  at zero chemical potentials, the shear viscosity becomes smaller up to 1.57 times or up to 1.45 times if the averaged relaxation time is used. This has important consequences for the interpretation of the previously made calculations of viscosities and some other related calculations. Within RTA, we also find estimation of the enhancement of the bulk viscosity of the hadron gas because of the nonconservation of particle numbers.