

І.В. ЛІНЧЕВСЬКИЙ, О.М. ПЕТРИЩЕВ

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"  
(Просп. Перемоги, 37, Київ 03056; e-mail: igorvl2009@gmail.com)

## МОДУЛЯТОР СВІТЛА НА МАГНІТООПТИЧНОМУ КРИСТАЛІ В СКЛАДІ БІМОРФНОЇ СТРУКТУРИ У РЕЖИМІ МАГНІТОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

УДК 537.632.4+535.565

*Запропоновано модель модулятора світла на основі біморфного елемента, що складається з шару магнітооптичного кристала, вироценого на магнітопасивній підкладці. Отримано рівняння магнітомеханічних коливань асиметричного по товщині біморфного елемента прямокутної форми і запропоновано алгоритм його розв'язку для вільного від закріплення гранями зразка. Показано, що такий модулятор характеризується дво-вимірною функцією розподілу кута повороту площини поляризації в площині перетину світлового пучка. На прикладі кристала вісмут ітрієвого ферит гранату на галій гадо-лінієвій основі показано, що амплітуда кута повороту площини поляризації світлового променя внаслідок ефекту Фарадея може досягати значень 3 град для основної моди коливань біморфного елемента.*

*Ключові слова:* ефект Фарадея, магнітооптичний кристал, біморфний елемент.

### 1. Вступ

При розміщенні магнітооптичного кристала (МОК) у зовнішніх постійному та змінному магнітних полях, в ньому виникають пружні деформації, зумовлені явищем магнітострикції. В умовах магнітомеханічного резонансу механічні напруження приводять до додаткових змін намагніченості зразка [1]. Внаслідок ефектів Фарадея та Коттона-Мутона ці зміни намагніченості впливають на поляризацію світла в МОК [2, 3]. Для підсилення величини модуляції намагніченості та зниження резонансної частоти коливань стискання-розтягу зразка в роботі [4] пропонується використовувати композиційну структуру. Ще більшого виграшу можна сподіватися при розміщенні МОК в складі біморфної структури. Відомо, що при коливаннях біморфних пластин механічне напруження характеризується функцією розподілу в площині біморфного елемента. Цю обставину пропонується використати при побудові магнітооптичного модулятора із просторовим розподілом кута повороту площини поляризації в межах поперечного перетину пучка світла.

Відзначимо, що біморфні структури знайшли широке застосування при побудові датчиків тиску

та акустичних випромінювачів на основі п'єзоелектрика [5]. Відомо, що поєднання двох п'єзоелементів або п'єзоелемента та металічної пластини в біморфну конструкцію приводить до появи низькочастотних згінних коливань, а виграш за чутливістю до тиску досягає декількох десятків [6].

Коливання поперечного згину в круглих біморфних пластинах досліджені найповніше. Так, у роботі [7] отримано рівняння коливань і наведено його розв'язок для п'єзокерамічних симетричних біморфних круглих пластин. Експериментально вивчалися магнітомеханічні коливання біморфних пластин прямокутної форми [8], для яких була досягнута чутливість на порядок вища, ніж для п'єзокерамічних біморфних перетворювачів.

Розрахунок коливань біморфних пластин прямокутної форми приведено для затиснутого або шарнірного закріплення, а сама конструкція біморфного елемента переважно передбачає симетричне по товщині розміщення нейтрального шару [9]. При цьому невирішеними і актуальними залишаються питання виведення рівняння коливань асиметричних біморфних пластин прямокутної форми, визначення для таких пластин координати нейтрального шару, а також розв'язок рівняння коливань в умовах вільних граней.

## 2. Модель магнітооптичного модулятора

У даній роботі розглядається магнітооптичний модулятор (рис. 1), який складається з біморфної пластини прямокутної форми з лінійними розмірами  $b \times l$ , виконаний з МОК (ферімагнетика) товщиною  $h_1$ , вирошеного на магнітопасивній підкладці (2) з товщиною  $h_2$ . Грані пластини вважаються вільними від контакту (м'який підвіс).

При розміщенні зразка в постійному (поляризуючому)  $H^0(x_k)$  та змінному  $H(x_k)e^{i\omega t}$  з заданою круговою частотою  $\omega$  магнітних полів ферімагнетик здійснює магніто механічні коливання. Ці коливання описуються двовимірною функцією розподілу напруги в площині  $x_1 0x_2$  і залежать від координати  $x_3$ . Механічні напруження у МОК викликають додаткові зміни намагніченості внаслідок ефекту Виллари [10]. Змінна складова вектора намагніченості, що збігається з віссю  $0x_3$  (вісь поширення світла), внаслідок ефекту Фарадея призводить до повороту площини поляризації світла на кут  $\phi$ . Кут повороту площини поляризації залежить від напруги в даній точці площини  $x_1 0x_2$  біморфного елемента і характеризується функцією розподілу  $\phi(x_1, x_2)$  в межах поперечного перетину пучка світла.

Для знаходження функції  $\phi(x_1, x_2)$  потрібно спочатку знайти функцію прогину  $w(x_1, x_2)$  біморфного елемента. В загальному випадку, товщини і пружні властивості шарів (1) і (2) різні, тому в подальшому будемо вважати, що нейтральний шар знаходиться в об'ємі шару (2). Виберемо праву декартову систему координат, площину  $x_1 0x_2$  якої суміσιμο з нейтральним шаром. При цьому нижня границя шару ферімагнетика буде мати координату  $x_3^0$ . Під час опису двовимірного поперечного згину скористаємося гіпотезами Кірхгофа [9] для плоских поперечних перетинів  $x_1 = \text{const}$ ,  $x_2 = \text{const}$  (рис. 1).

Амплітудні значення гармонічних пружних напружень, що змінюються з часом, у першому шарі будемо позначати символом  $\sigma_\alpha^{(1)}(x_k)$ , де  $(\alpha = 1, 2, \dots, 6)$ , у другому  $\sigma_\alpha^{(2)}(x_k)$ . При цьому

$$\sigma_\alpha^{(1)} = c_{\alpha\beta}^H \varepsilon_\beta^{(1)}(x_k) - m_{p\alpha} H_\rho^0 H_k, \quad (1)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)}(x_k) = c_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^{(2)}(x_k), \quad (2)$$

де  $c_{\alpha\beta}^H$  – елементи модулів пружності,  $\varepsilon_\beta$  – деформації,  $m_{pq\alpha} \equiv m_{pkij}$  – компоненти матриці магні-

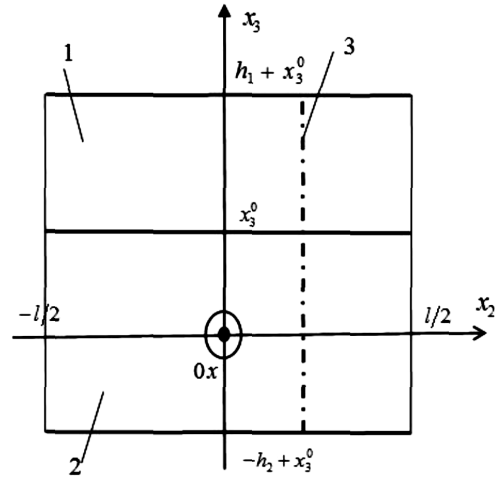


Рис. 1. Схема магнітооптичного модулятора: 1 – шар №1 (МОК), 2 – шар №2 (магнітопасивний), 3 – плоский поперечний перетин ( $x_2 = \text{const}$ ),  $x_3^0$  – координата нейтрального шару

тострикційних констант розмагніченого ферімагнетика.

Використовуючи з теорії поперечного прогину [9] співвідношення між деформаціями  $\varepsilon_\beta$  і прогинами  $w(x_1, x_2)$ , з урахуванням формулювань (1) і (2) отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= -x_3 \left( c_{11}^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + c_{12}^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - m_{\rho q 1} H_\rho^0 H_q; \\ \sigma_2^{(1)} &= -x_3 \left( c_{12}^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + c_{11}^H \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - m_{\rho q 2} H_\rho^0 H_q; \\ \sigma_1^{(2)} &= -x_3 \left( c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \\ \sigma_2^{(2)} &= -x_3 \left( c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \\ \sigma_6^{(1)} &= -x_3 (c_{11}^H - c_{12}^H) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - m_{\rho q 6} H_\rho^0 H_q; \\ \sigma_6^{(2)} &= -x_3 (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Розглянемо елементарну призму висотою  $h_1 + h_2$  зі сторонами  $dx_1$  та  $dx_2$ . Виходячи з умови динамічної рівноваги призми, знайдемо, що на бокових сторонах  $(x_1, x_1 + dx_1)$  і  $(x_2, x_2 + dx_2)$  діють сили з лінійною густиною  $q_{13}(x_1, x_2)$  і  $q_{23}(x_1, x_2)$ , відпо-

відно, причому

$$q_{13}(x_1, x_2) = -D_0 \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 w), q_{23}(x_1, x_2) = -D_0 \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 w), \quad (4)$$

де  $D_0$  – жорсткість біморфного елемента на згинання,

$$D_0 = \frac{1}{2} c_{11}^H \left\{ h_1 (h_1 + x_3^0)^2 - \frac{1}{3} [(h_1 + x_3^0)^3 - (x_3^0)^3] + h_2 [(h_1 + x_3^0)^2 - (x_3^0)^2] \right\} + \frac{1}{2} c_{11} \left\{ h_2 (x_3^0)^3 - \frac{1}{3} [(x_3^0)^2 + (h_2 - x_3^0)^3] \right\}.$$

По осі  $x_3$  діє сила інерції з поверхневою густиною  $\sigma_{ин} = -(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  – густини матеріалів першого і другого шарів. З урахуванням третього закону Ньютона і відсутності зовнішніх сил:

$$\frac{\partial q_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{23}(x_1, x_2)}{\partial x_2} - (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

З виразу (5) з урахуванням (4) отримаємо рівняння коливань біморфного елемента для випадку однорідних магнітних полів у його об'ємі:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \lambda^4 w = 0, \quad (6)$$

де  $\lambda^4 = \frac{\omega^2}{D_0} (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2)$ .

Розв'язок рівняння (6) вимагає знання координати  $x_3^0$  нейтрального шару. Для цього скористаємося тим, що рівнодіючі нормальних напруг в плоских поперечних перетинах, паралельних осі  $0x_3$  дорівнюють нулю, завдяки чому отримаємо вираз

$$\frac{1}{2} \sigma_\alpha^{(1)} (x_3^0) x_3^0 + \sigma_\alpha^{(1)} (x_3^0) h_1 + \frac{1}{2} [\sigma_\alpha^{(1)} (h_1 + x_3^0) - \sigma_\alpha^{(1)} (x_3^0)] h_1 = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{(2)} (-h_2 + x_3^0) h_2, \quad \alpha = 1, 2, 6 \quad (7)$$

Враховуючи те, що на межі поділу шарів виконується третій закон Ньютона, знаходимо

$$-x_3^0 (c_{11}^H - c_{12}^H) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - m_{pq6} H_p^0 H_q \Big|_{x_3^0} = -x_3^0 (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (8)$$

Застосовуючи, наприклад, до дотичних напруг  $\sigma_6^{(1)}$  і  $\sigma_6^{(2)}$  вирази (3) і (7) маємо

$$\left\{ \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left[ x_3^0 - \left( \frac{h_2}{x_3^0} - 1 \right) (h_2 - x_3^0) \right] + \left( h_1 + \frac{1}{2} \frac{h_2}{x_3^0} \right) (c_{11}^H - c_{12}^H) \right\} x_3^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = -h_1 m_{pq6} (H_p^0 H_q) \Big|_{x_3^0} + \frac{1}{2} h_1 \left[ m_{pq6} (H_p^0 H_q) \Big|_{h_1+x_3^0} - m_{pq6} (H_p^0 H_q) \Big|_{x_3^0} \right]. \quad (9)$$

Використавши (8) і (9), а також вважаючи, що магнітні поля однорідні по об'єму зразка, отримаємо шукану величину:

$$x_3^0 = \frac{h_2^2 (c_{11} - c_{12}) - h_1^2 (c_{11}^H - c_{12}^H)}{2(h_1 + h_2)(c_{11} - c_{12})}. \quad (10)$$

Розглянемо алгоритм розв'язку рівняння (6) при вільному від закріплення гранями біморфного елемента. Розподілені за поперечними перетинами  $x_1 = \text{const}$  і  $x_2 = \text{const}$  нормальні напруження створюють вигинаючі моменти  $M_1$  і  $M_2$ , які задаються за допомогою лінійних густин  $m_1$  і  $m_2$  (при цьому  $dM_1 = m_1 dx_2$  та  $dM_2 = m_2 dx_1$ ) і визначаються рівняннями:

$$m_1 = -D_1^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + k \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - m_1^H; \quad (11)$$

$$m_2 = -D_2^* \left( k \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - m_2^H,$$

де використовуються позначення:

$$D_1^* = \frac{1}{3} \left\{ c_{11} [(x_3^0)^3 + (h_2 - x_3^0)^3] + c_{11}^H [(h_1 - x_3^0)^3 - (x_3^0)^3] \right\},$$

$$D_2^* = \frac{1}{3} \left\{ c_{12} [(x_3^0)^3 + (h_2 - x_3^0)^3] + c_{12}^H [(h_1 - x_3^0)^3 - (x_3^0)^3] \right\}; \quad k = D_2^* / D_1^*;$$

$$m_1^H = \int_{x_3^0}^{h_1+x_3^0} x_3 m_{\rho q 1} H_\rho^0 H_q dx_3;$$

$$m_2^H = \int_{x_3^0}^{h_1+x_3^0} x_3 m_{\rho q 2} H_\rho^0 H_q dx_3.$$

При однорідності магнітного поля в об'ємі біморфного елемента випливає, що

$$m_{\alpha}^H = \frac{1}{2} [(h_1 + x_3^0)^2 - (x_3^0)^2] m_{pq\alpha} H_p^0 H_q, \quad \alpha = 1, 2.$$

Граничні умови зводяться до виразів:

$$q_{13}^* = (\pm b/2, x_2) = 0, \quad q_{23}^* = (x_1, \pm l/2) = 0, \quad (12)$$

$$m_1 = (\pm b/2, x_2) = 0, \quad m_2 = (x_1, \pm l/2) = 0, \quad (13)$$

в яких:  $q_{13}^* = q_1 + \frac{\partial m_{12}}{\partial x_2}$ ,  $q_{23}^* = q_2 + \frac{\partial m_{21}}{\partial x_1}$ ,  $m_{12} = m_{21} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - m_{12}^H$ ,

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left\{ (c_{11} - c_{12}) [(x_3^0)^3 + (h_2 - x_3^0)^3] + (c_{11}^H - c_{12}^H) [(h_1 + x_3^0)^3 - (x_3^0)^3] \right\},$$

$$m_{12}^H = m_{21}^H = m_{pq6} \int_{x_3^0}^{h_1 + x_3^0} H_p^0 H_q dx_3.$$

Загальний розв'язок рівняння (6) будемо шукати у вигляді:

$$w = w_1 + w_2, \quad (14)$$

де

$$w_1(x_1, x_2) = \cos \alpha x_1 [A \cos(x_2 \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) + B \cos(x_2 \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2})],$$

$$w_2(x_1, x_2) = \cos \beta x_2 [C \cos(x_1 \sqrt{\beta^2 + \lambda^2}) + D \cos(x_1 \sqrt{\beta^2 - \lambda^2})].$$

Підставимо вираз (14) в граничні умови (13) та отримаємо

$$m_1^H N_m = D_1^* \frac{l}{2} \left\{ [\beta_m^2 (1+k) + \lambda^2] C_m \times \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right) + [\beta_m^2 (1+k) - \lambda^2] D_m \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}\right) \right\}, \quad (15)$$

$$m_2^H M_n = D_1^* \frac{b}{2} \left\{ [\alpha_n^2 (1+k) + \lambda^2] A_n \times \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right) + [\alpha_n^2 (1+k) - \lambda^2] B_n \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}\right) \right\}, \quad (16)$$

де  $N_m = \frac{2l}{\pi(1+2m)} (-1)^m$ ,  $M_n = \frac{2b}{\pi(1+2n)} (-1)^n$ ,  $\alpha_n = \frac{\pi}{b} (1+2n)$ ,  $\beta_m = \frac{\pi}{l} (1+2m)$ .

Тоді з рівнянь (15) і (16) випливає, що

$$C_m = C_m^0 - D_m f_m, \quad A_n = A_n^0 - B_n f_n, \quad (17)$$

де

$$A_n^0 = (-1)^n \times \frac{4m_2^H}{\pi(1+2n) [\alpha_n^2 (1+k) + \lambda^2] D_1^* \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right)},$$

$$C_m^0 = (-1)^m \times \frac{4m_1^H}{\pi(1+2m) [\beta_m^2 (1+k) + \lambda^2] D_1^* \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right)},$$

$$f_m = \frac{[\beta_m^2 (1+k) - \lambda^2] \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}\right)}{[\beta_m^2 (1+k) + \lambda^2] \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right)},$$

$$f_n = \frac{[\alpha_n^2 (1+k) - \lambda^2] \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}\right)}{[\alpha_n^2 (1+k) + \lambda^2] \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right)}.$$

Таким чином, для прогину  $w(x_1, x_2)$  біморфного елемента приходимо до такої формули:

$$w(x_1, x_2) = B_n \cos \alpha_n x_1 \left[ \cos(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}) - f_n(\alpha_n) \cos(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}) \right] + D_m \left[ \cos(x_1 \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}) - f_m(\beta_m) \times \cos(x_1 \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}) \right] \cos \beta_m x_2 + w_0(x_1, x_2) \quad (18)$$

в якій

$$w_0(x_1, x_2) = A_n^0 \cos(\alpha_n x_1) \cos(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}) + C_m^0 \cos(x_1 \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}) \cos \beta_m x_2.$$

Для знаходження коефіцієнтів  $B_n$  і  $D_m$  граничні умови (12) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \psi_2(x_1, x_2) \Big|_{x_1=\pm b/2} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \psi_1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=\pm l/2} = 0, \quad (20)$$

де введені позначення:  $\psi_1(x_1, x_2) = (1 + \xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$ ,  $\psi_2(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (1 + \xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$ ,  $\xi = D_{12}/D_0$ .

Легко бачити, що умова (19) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 & (-1)^n \alpha_n \beta_m \left\{ [\alpha_n^2 + (1 + \xi)(\alpha_n^2 - \lambda^2)] \times \right. \\
 & \times \cos(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2} - f_n(\alpha_n) [\alpha_n^2 + (1 + \xi)(\alpha_n^2 + \lambda^2)]) \times \\
 & \times \cos(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}) \left. \right\} \pm D_m \left\{ \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2} [\beta_m^2 - \lambda^2 + \right. \\
 & + (1 + \xi)\beta_m^2] \sin\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}\right) - f_m \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2} \times \\
 & \times [\beta_m^2 + \lambda^2 + (1 + \xi)\beta_m^2] \sin\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right) \left. \right\} \times \\
 & \times \cos(\beta_m x_2) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \right. \\
 & \left. + (1 + \xi) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} \right] \Big|_{x_1 = \pm b/2} \quad (21)
 \end{aligned}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (21) на  $\cos(\beta_m x_2)$  і проінтегруємо по змінній  $x_2$  в межах від  $-l/2$  до  $l/2$ . Отриманий результат можна привести до вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \mp \sum_{n=0}^{\infty} B_n F_{nm} \pm \frac{l}{2} D_m F_m = \\
 & = \pm \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 a_{nm} \mp \frac{l}{2} C_m^0 c_m, \quad (22)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_{nm} &= 2(-1)^n (-1)^m \alpha_n \beta_m \frac{\alpha_n^2 + (1 + \xi)(\alpha_n^2 + \lambda^2)}{\alpha_n^2 + \lambda^2 - \beta_m^2} \times \\
 & \times \cos\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right), \\
 c_m &= \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2} [\beta_m^2 + \lambda^2 + (1 + \xi)\beta_m^2] \sin\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right), \\
 F_{nm} &= 2(-1)^n (-1)^m \beta_m \alpha_n \left\{ \frac{\alpha_n^2 + (1 + \xi)(\alpha_n^2 - \lambda^2)}{\alpha_n^2 - \lambda^2 - \beta_m^2} \times \right. \\
 & \times \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}\right) - \\
 & \left. - f_n \frac{\alpha_n^2 + (1 + \xi)(\alpha_n^2 + \lambda^2)}{\alpha_n^2 + \lambda^2 - \beta_m^2} \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right) \right\}, \\
 F_m &= \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2} [\beta_m^2 - \lambda^2 + (1 + \xi)\beta_m^2] \times \\
 & \times \sin\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}\right) - \\
 & - f_m \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2} [\beta_m^2 + \lambda^2 + (1 + \xi)\beta_m^2] \times \\
 & \times \sin\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right).
 \end{aligned}$$

Поступаючи аналогічно з граничними умовами (20), отримуємо

$$\begin{aligned}
 & \mp \frac{b}{2} B_n F_n \pm \sum_{m=0}^{\infty} D_m F_{mn} = \\
 & = \pm \frac{b}{2} A_n^0 a_n \mp \sum_{m=0}^{\infty} C_m^0 c_{mn} \quad (23)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2} [(1 + \xi)\alpha_n^2 + \alpha_n^2 + \lambda^2] \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right), \\
 c_{mn} &= 2(-1)^m (-1)^n \alpha_n \beta_m \frac{\beta_m^2 + (1 + \xi)(\beta_m^2 + \lambda^2)}{\beta_m^2 + \lambda^2 - \alpha_n^2} \times \\
 & \times \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right), \\
 F_n &= \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2} [(1 + \xi)\alpha_n^2 + \alpha_n^2 - \lambda^2] \times \\
 & \times \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}\right) - f_n \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2} [(1 + \xi)\alpha_n^2 + \\
 & + \alpha_n^2 + \lambda^2] \sin\left(\frac{l}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}\right), \\
 F_{mn} &= 2(-1)^m (-1)^n \beta_m \alpha_n \left\{ \frac{\beta_m^2 + (1 + \xi)(\beta_m^2 + \lambda^2)}{\beta_m^2 - \lambda^2 - \alpha_n^2} \times \right. \\
 & \times \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}\right) - \\
 & \left. - f_m \frac{\beta_m^2 + (1 + \xi)(\beta_m^2 + \lambda^2)}{\beta_m^2 + \lambda^2 - \alpha_n^2} \cos\left(\frac{b}{2} \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Результати рішення системи рівнянь (22), (23) підставимо в формулу (18) і тим самим отримаємо вираз для розрахунку прогину  $w(x_1, x_2)$ . Відзначимо, що розв'язки рівняння (18) містять величини, пропорційні лінійним моментам  $m_1^H$  та  $m_2^H$ , котрі, в свою чергу, визначаються параметрами змінного магнітного поля.

Деформації зсуву у ферімагнітному шарі призводять до додаткової зміни проекції змінної складової вектора намагніченості  $J_3$ , що збігається з напрямком світлового променя, й появи повороту площини поляризації внаслідок ефекту Фарадея на кут  $\phi = \int_{x_3^0}^{h_1+x_3^0} \sigma_6^{(1)} \Lambda \alpha_f dx_3$ , де  $\Lambda = \partial J_3 / \partial \sigma_6^{(1)}$  [10],  $\alpha_F$  – питомих кут повороту площини поляризації.

З урахуванням виразів (3) і (14) отримаємо функцію розподілу повороту площини поляризації  $\phi(x_1, x_2)$  від положення світлового променя на площі біморфного елемента:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{\alpha_F \Lambda \left[ (h_1 + x_3^0)^2 - (x_3^0)^2 \right] (c_{11}^H - c_{12}^H)}{2} \times \\ & \times \left\{ \alpha_n \sin \alpha_n x_1 \left[ A_n \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2} \sin(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 + \lambda^2}) + \right. \right. \\ & + B_n \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2} \sin(x_2 \sqrt{\alpha_n^2 - \lambda^2}) \left. \right] + \\ & + \beta_m \sin \beta_m x_2 \left[ C_m \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2} \sin(x_1 \sqrt{\beta_m^2 + \lambda^2}) + \right. \\ & \left. \left. + D_m \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2} \sin(x_1 \sqrt{\beta_m^2 - \lambda^2}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

### 3. Основні результати та їх обговорення

Система рівнянь (22) та (23) не має точного розв'язку. Наближений розв'язок цих рівнянь будемо проводити для основної моди ( $m = 0, n = 0$ ) на прикладі біморфного елемента розміром  $b \times l = 10 \times 10$  мм<sup>2</sup>, в якому перший шар виконано з вісмут ітрієвого ферит гранату ( $Y_{3-x}Bi_xFe_5O_{12}$ ):  $h_1 = 0,3$  мм,  $c_{11}^H = 269$  ГПа,  $c_{12} = 108$  ГПа,  $\rho_1 = 5,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m_{111} = m_{112} = 2$  Н·А<sup>-2</sup> (для  $H_1^0 = 600$  А/м [1]),  $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5}$  Т<sup>-1</sup>,  $\alpha_F = 3,2$  А<sup>-1</sup> [11]. Другий шар із галій гадолінію ( $Gd_3Ga_5O_{12}$ ):  $h_2 = 0,5$  мм,  $c_{11} = 287$  ГПа,  $c_{12} = 163$  ГПа;  $\rho_1 = 7,08 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Для пошуку наближених рішень систему рівнянь (22) та (23) представимо у вигляді:

$$\left( \mp 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n F_{nm} / l F_m \right) \pm D_m = \Delta_1 \quad (25)$$

$$\mp B_n \pm 2 \sum_{m=0}^{\infty} D_m F_{mn} / b F_n = \Delta_2, \quad (26)$$

де

$$\Delta_1 = 2 \left( \pm \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 a_{nm} \mp \frac{l}{2} C_m^0 c_m \right) / l F_m,$$

$$\Delta_2 = 2 \left( \pm \frac{b}{2} A_n^0 a_n \mp \sum_{m=0}^{\infty} C_m^0 c_{mn} \right) / b F_n.$$

З правого боку виразів (25), (26) маємо частотно залежні константи. Зазначимо, що при чисельних дослідженнях похибка при удержанні перших шести членів рядів для  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$  становить не більше

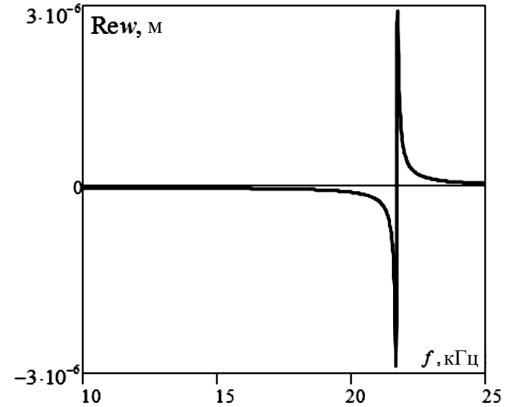


Рис. 2. Залежність функції прогину  $w$  у центрі біморфної пластини від лінійної резонансної частоти для основної моди магніто механічних коливань

одного відсотка від точного результату в околі частот магніто механічного резонансу.

На лінійній частоті резонансу  $f_p$  для основної моди ( $f_p = 21,641$  кГц) чисельні значення для  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$  суттєво відрізняються у більший бік порівняно з їх значенням для мод більш високого порядку. Наприклад, співвідношення значень для  $\Delta_1 \Big|_{\substack{n=0 \\ m=0}}$  до  $\Delta_1 \Big|_{\substack{n=0 \\ m=1}}$  становить приблизно  $10^3$  на частоті  $f_p$ . Аналогічне співвідношення спостерігається і для  $\Delta_2$ . З іншого боку, якщо біморфна пластинка має форму наближену до квадратної, то при рівних  $m$  та  $n$  можна вважати, що величини  $B_n$  та  $D_m$  мають однаковий порядок. Тому у рівнянні (25) при порівнянні на частоті  $f_p$  чисельного значення першого члену ряду  $2B_0 F_{0m} / l F_m |_{m=0}$  та наступного  $2B_1 F_{1m} / l F_m |_{m=0}$ , останнім та всіма наступними членами ряду можна знехтувати.

Таким чином, рівняння (25) набуває спрощеного вигляду:

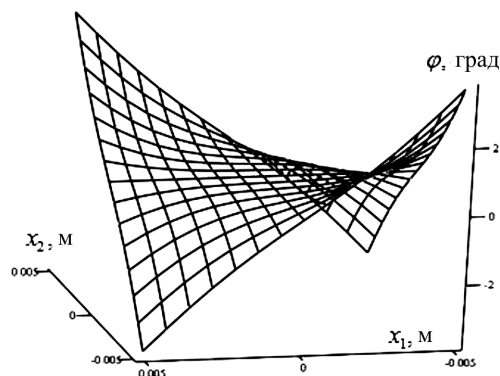
$$\mp 2B_0 F_{nm} / l F_m \pm D_0 = \Delta_1, \quad n = 0, \quad m = 0. \quad (27)$$

Аналогічно рівняння (26) можна привести до вигляду

$$\pm 2D_0 F_{mn} / b F_n \mp B_0 = \Delta_2, \quad n = 0, \quad m = 0. \quad (28)$$

Подальший розв'язок системи рівнянь (27), (28) дає можливість легко визначити коефіцієнти  $B_0, D_0$ .

На рис. 2 відповідно до виразу (18) наведено графік залежності дійсної частини функції прогину



**Рис. 3.** Залежність функції розподілу кута повороту площини поляризації  $\phi(x_1, x_2)$  від положення світлового променя по площі біморфного елемента на частоті резонансу для основної моди коливань

$w$  від лінійної частоти  $f$  у центрі біморфної пластини розміром для основної моди магніто механічних коливань. При розрахунках амплітуда компоненти вектора напруженості змінного магнітного поля становила  $H_1 = 100$  А/м. Урахування добротності  $Q$  коливної системи відбувалося шляхом заміни у всіх виразах хвильового числа  $\lambda$  на  $\lambda(1 + i/2Q)$ ,  $Q = 500$ . Значення координати нейтрального шару відповідно до виразу (10) становить  $x_3^0 = 0,083$  мм.

На рис. 3 надана розрахункова залежність функції  $\phi(x_1, x_2)$  розподілу кута повороту площини поляризації від координати положення світлового променя на площі біморфного елемента для лінійної резонансної частоти  $f_p$  ( $f_p = 21,641$  кГц).

З графіка (рис. 3) видно, що магнітооптичний модулятор світла на магнітооптичному кристалі в складі біморфної структури у режимі магніто механічних коливань при використанні вісмут ітрієвого ферит гранату на основі з галій гадолінію може забезпечити амплітуду кута повороту площини поляризації до  $3^\circ$  в межах перетину оптичного пучка.

Резонансна частота для основної моди біморфного елемента квадратної форми з розмірами  $1 \times 1$  см<sup>2</sup> становить 21,6 кГц. Отримане значення резонансної частоти на порядок нижче аналогічної величини при деформаціях стискання-розтягу для зразків у вигляді тонкого стержня [1].

Наявність ефекту Коттона-Мутона приводить до модуляції еліптичності оптичного випромінен-

ня. Внаслідок квадратичної залежності цього ефекту від поперечної компоненти намагніченості і співвідношення  $H_1 \ll H_1^0$ , змінна складова еліптичності не носить вираженого характеру і тому нами не враховувалась.

#### 4. Висновки

На основі моделі магніто механічних коливань асиметричного по товщині біморфного елемента з вільними гранями за допомогою гіпотез Кірхгофа отримано рівняння коливань зразка, знайдено положення нейтрального шару для асиметричного біморфного елемента. Застосовано наближений спосіб для знаходження розв'язку цього рівняння, який забезпечує похибку для амплітуди прогину в межах резонансних частот основної моди на рівні до  $10^{-3}$ . На основі отриманого виразу для двовимірної функції розподілу кута повороту площини поляризації світлового пучка на виході оптичного модулятора з біморфною структурою із кристала вісмут ітрієвого ферит гранату на галій гадолінієвій основі показано, що амплітуда цього кута внаслідок ефекту Фарадея може сягати значень 3 градус для основної моди коливань біморфного елемента. У подальшому модулятори з двовимірною функцією розподілу кута повороту площини поляризації можуть бути використані у датчиках кута повороту.

1. І.В. Лінчевський, О.М. Петрищев, УФЖ **56**, 496 (2011).
2. І.В. Лінчевський, Т.І. Шевченко, В.Д. Тронько, Опт. и спектр. **114**, 124 (2013).
3. І.В. Лінчевський, Опт. и спектр. **115**, 785 (2013).
4. І.В. Лінчевський, Радіофізика та електроніка **2**, 43 (2014).
5. J.G. Smits, S.I. Dalke, and T.K. Cooney, Sensors and actuators A **41** (1991).
6. В. Шаратов, М. Мусиенко, Е Шаратова, *Пьезоелектрические датчики* (Техносфера, Москва, 2006).
7. F. Sammjura, K. Smyth, and S-G. Kim, Ultrasonics, **53**, 328 (2013).
8. J.K. Lee and M.A. Marcus, Ferroelectrics **32**, 93 (1981).
9. Л.Г. Донел, Балки, пластини и оболочки (Наука, Москва, 1982).
10. Р.М. Бозорт, *Ферромагнетизм* (Иностранная Литература, Москва, 1956).
11. P. Hansen and J.-P. Krümme, Thin Solid Films **114**, 69 (1984).

Одержано 03.06.14

*И.В. Линчевский, О.Н. Петрищев*

МОДУЛЯТОР СВЕТА  
НА МАГНИТООПТИЧЕСКОМ КРИСТАЛЛЕ  
В СОСТАВЕ БИМОРФНОЙ СТРУКТУРЫ В РЕЖИМЕ  
МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Резюме

Предложена модель модулятора света на базе биморфного элемента, состоящего из слоя магнитооптического кристалла, выращенного на магнитоинертной подложке. Получено уравнение магнитоэластических колебаний асимметричного по толщине биморфного элемента прямоугольной формы и предложен алгоритм его решения для свободного от закрепления краями образца. Показано, что такой модулятор характеризуется двумерной функцией распределения угла поворота плоскости поляризации в плоскости сечения светового пучка. На примере висмут содержащего феррит иттриевого граната на галлий гадолиниевой подложке показано, что амплитуда угла поворота плоскости поляризации светового луча вследствие эффекта Фарадея может достигать значений 3 град для основной моды колебаний биморфного элемента.

*I.V. Linchevskiy, O.N. Petrishev*

LIGHT MODULATOR  
ON THE BASIS OF MAGNETO-OPTICAL  
CRYSTAL IN A BIMORPHIC STRUCTURE OPERATING  
IN THE MAGNETO-MECHANICAL VIBRATION MODE

S u m m a r y

A model of light modulator based on a bimorphic element consisting of a magneto-optical crystal layer on a magnetically passive substrate has been proposed. An equation describing magneto-mechanical vibrations in a rectangular bimorphic element with asymmetric thickness is derived, and an algorithm of its solution in the case of a specimen with free edges is proposed. The modulator is shown to be characterized by a two-dimensional distribution function for the rotation angle of the polarization plane in a light-beam cross-section. Calculations for bismuth-substituted yttrium ferrite garnet on a gadolinium-gallium substrate showed that the rotation angle of the light-beam polarization plane owing to the Faraday effect can reach 3° for the fundamental mode of bimorphic element vibrations.