

І.С. ГАНДЖА,<sup>1</sup> Ю.В. СЕДЛЕЦЬКИЙ,<sup>1</sup> Д.С. ДУТИХ<sup>2</sup><sup>1</sup> Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03028; e-mail: gandzha@iop.kiev.ua, sedlets@iop.kiev.ua)

<sup>2</sup> Університет Савоя Монблан

(CNRS-LAMA UMR 5127, Campus Universitaire, 73376 Le Bourget-du-Lac, Франція; e-mail: Denys.Dutykh@univ-savoie.fr)

## НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ШРЕДІНґЕРА ВИЩОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ОБВІДНОЇ ПОВІЛЬНО МОДУЛЬОВАНИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ ТА ЙОГО КВАЗІСОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ

УДК 532.591

Розглянуто нелінійне рівняння Шредінґера вищого порядку, виведене раніше Ю.В. Седлецьким [УФЖ 48(1), 82 (2003)] для обвідної першої гармоніки повільно модульованих гравітаційних хвиль на поверхні безвихрової, нев'язкої та нестисливої рідини зі скінченною глибиною і плоским дном. Це рівняння враховує дисперсію третього порядку і кубічні нелінійно-дисперсійні доданки. В даній роботі воно приведено до безрозмірного вигляду, в якому фігурує лише один безрозмірний параметр  $kh$ , де  $k$  – хвильове число несучої хвилі, а  $h$  – незбурена глибина рідини. Показано, що при врахуванні доданків вищого порядку односолітонні розв'язки класичного нелінійного рівняння Шредінґера перетворюються в квазісолітонні розв'язки з повільно змінною амплітудою. Ці квазісолітонні розв'язки представляють вторинні модуляції гравітаційних хвиль.

**Ключові слова:** нелінійне рівняння Шредінґера, гравітаційні хвилі, скінченна глибина, повільні модуляції, обвідна хвиля, квазісолітон, багатомасштабні розвинення.

### 1. Вступ

Нелінійне рівняння Шредінґера (НРШ):

$$A_\tau = -a_1 A_\chi - ia_2 A_{\chi\chi} + ia_{0,0,0} A|A|^2 \quad (1.1)$$

виникає при описі нелінійних хвиль у різних розділах фізики, таких як нелінійна оптика [68], фізика плазми [8], наноелектроніка [26], феромагнетизм [24], конденсація Бозе–Ейнштейна [7], гідродинаміка [5, 29, 53, 70] тощо. Тут  $\chi$  – напрямок поширення хвилі,  $\tau$  – час,  $A(\chi, \tau)$  – комплексна обвідна першої гармоніки несучої хвилі, індекси при  $A$  позначають частинні похідні. НРШ враховує дисперсію другого порядку (доданок з  $A_{\chi\chi}$ ) і фазову автомодуляцію (доданок з  $A|A|^2$ ). Коефіцієнти  $a_1$ ,  $a_2$  і  $a_{0,0,0}$  набувають різного вигляду в залежності від фізичної природи хвиль.

У загальному контексті слабонелінійних дисперсійних хвиль це рівняння було вперше розглянуто Бенні і Ньюеллом [20]. У випадку поширення

гравітаційних хвиль на поверхні безвихрової, нев'язкої і нестисливої рідини нескінченної глибини НРШ було спочатку отримано Захаровим [4] методом гамільтонівського формалізму, а потім Юен-ом і Лейком [70] методом усередненого лагранжіана. Для скінченної сталої глибини НРШ у вигляді (1.1) було вперше отримано Хазімото і Оно [42] методом багатьох масштабів, а потім Стяссні і Шемером [62] з інтегральних рівнянь Захарова. Також необхідно згадати нещодавню роботу Томаса та ін. [65], в якій було виведено НРШ для хвиль на поверхні рідини скінченної глибини з сталою завихреністю.

За певного співвідношення між параметрами, коли

$$a_2 a_{0,0,0} < 0, \quad (1.2)$$

НРШ допускає точні розв'язки у вигляді солітонів, що існують завдяки балансу між дисперсією і нелінійністю й поширюються, не змінюючи форму і зберігаючи енергію [3]. В цьому випадку спочатку однорідна несуча хвиля є нестійкою до дов-

гохвильових модуляцій, що призводить до формування солітонів обвідної несучої хвилі. Такий вид нестійкості відомий як модуляційна нестійкість або нестійкість Бенжаміна–Фейра [72] (її було вперше виявлено в оптиці Беспаловим і Талановим [1]). У випадку поверхневих гравітаційних хвиль умова (1.2) виконується при  $kh \gtrsim 1,363$ , де  $k$  – хвильове число несучої хвилі, а  $h$  – незбурена глибина рідини. Додатково до теоретичних результатів солітони обвідної спостерігали в численних експериментах, виконаних у басейнах з водою [23, 53, 57, 58, 60, 64, 70, 71].

У точці біфуркації  $a_{0,0,0} = 0$  ( $kh \approx 1,363$ ), коли модуляційна нестійкість змінюється на стійкість, НРШ вигляду (1.1) не достатнє для опису еволюції обвідної хвильових пакетів, оскільки головний нелінійний член стає рівним нулю. У цьому випадку слід враховувати нелінійні й нелінійно-дисперсійні доданки вищого порядку. У випадку нескінченної глибини відповідне НРШ вищого порядку (НРШВП) було вперше отримано Дистом [32]. Воно включає дисперсію третього порядку ( $A_{xxx}$ ) і кубічні нелінійно-дисперсійні доданки ( $|A|^2 A_x$ ,  $A^2 A_x^*$ , зірочка позначає комплексне спряження), а також додатковий нелінійно-дисперсійний член, що описує внесок усередненого потоку, наведеного хвилею (деякі з цих доданків були введені раніше Роскесом [55], не беручи до уваги наведений хвилями потік). Це рівняння звичайно згадують як НРШ четвертого порядку, щоб підкреслити його відмінність від НРШ третього порядку. Янссен [45] вивів рівняння Диста повторно і виправив знак в одному з нелінійних дисперсійних доданків. Хоган [43], слідуючи за більш ранньою роботою Стяссні [61], одержав подібне рівняння для гравітаційно-капілярних хвиль, враховуючи вплив поверхневого натягу. Селезов та ін. [56] розширив НРШВП, отримане Хоганом, на випадок нелінійного поширення хвильового пакета на поверхні розділу двох напівнескінчених рідин без врахування наведеного хвилями потоку. Гідна згадування також робота Лукомського [9], який одержав рівняння Диста в інший спосіб. Пізніше Трулсен і Дист [66] узагальнили рівняння, отримане Дистом, на випадок більш широкого спектра хвильових чисел, врахувавши лінійну дисперсію четвертого і п'ятого порядків. Дебсарма і Дас [28] одержали ще більш загальне НРШВП, яке є на один порядок вищим за рівняння, отри-

мане Трулсеном і Дистом. Гремстад і Трулсен [37] вивели систему двох зчеплених НРШ четвертого порядку, що можуть описувати два взаємодіючих хвильових пакети з різними довжинами хвиль або напрямками поширення. Захаров і Дьяченко [30, 31, 73] зробили конформне відображення області рідини на нижню напівплощину і одержали аналог рівняння Диста в нових канонічних змінних (так зване компактне рівняння Дьяченко–Захарова [34, 35]).

Первинне рівняння Диста було записано для першої гармоніки обвідної потенціалу швидкості, а не профілю поверхні. У випадку стандартного НРШ це не є суттєвим, оскільки при цьому амплітуди перших гармонік потенціалу швидкості й профілю поверхні відрізняються лише розмірним множником. Проте, це не є вірним у випадку НРШВП, як було вказано Хоганом [44]. Враховуючи цю обставину, Трулсен та ін. [67] переписали рівняння Диста в термінах обвідної першої гармоніки профілю поверхні. При цьому вони додатково врахували лінійну дисперсію в довільному порядку.

У випадку скінченної глибини вплив наведеного усередненого потоку проявляється вже в третьому порядку, і НРШ в загальному випадку зчеплене з рівнянням для наведеного потоку [21]. Проте, Деві і Стюартсон [27] показали, що ці зв'язані рівняння еквівалентні єдиному НРШ, отриманому Хазімото і Оно [42]. З іншого боку, така еквівалентність не зберігається для рівнянь вищого порядку. Перша спроба вивести НРШВП у випадку скінченної глибини була зроблена Джонсоном [46], але лише для  $kh \approx 1,363$ , коли кубічний член НРШ обертається на нуль. Подібна спроба була також зроблена Какутані і Мічіхіро [48] (див. також більш формальне виведення, зроблене пізніше Паркесом [54]). Загальне НРШ четвертого порядку для обвідної першої гармоніки профілю поверхні було отримано Брінч–Нільсеном і Йонссоном [22]. Це НРШВП зчеплене з інтегральним рівнянням для наведеного потоку. Гремстад і Трулсен [38, 39] отримали НРШ четвертого порядку в термінах канонічних змінних, що зберігають гамільтонівську структуру задачі.

Седлецький [11, 12] використав метод багатьох масштабів і одержав єдине НРШ четвертого порядку для обвідної першої гармоніки профілю поверхні, провівши додаткове степеневе розвинення наведеного потоку. Це рівняння є прямим анало-

гом рівняння Диста, записаного в термінах першої гармоніки профілю поверхні [67], але для випадку скінченної глибини. Слюняєв [13] підтвердив результати, отримані в [12], і розширив їх до п'ятого порядку. Грімшоу і Анненков [41] розглянули НРШВП для хвильових пакетів на поверхні рідини змінної глибини.

У випадку нескінченної глибини НРШВП в формі рівняння Диста широко використовувалося при чисельному моделюванні еволюції хвиль [14, 16–18, 25, 33, 36, 51, 59]. З іншого боку, у випадку скінченної глибини таких досліджень досі не було через складність рівнянь у порівнянні з випадком нескінченної глибини. Рівняння, отримане в [11, 12], може бути використане як відправне для моделювання еволюції обвідної несучої хвилі при скінченній глибині. Дана робота має за мету переписати це рівняння в безрозмірному вигляді, що підходить для чисельного інтегрування, і дослідити еволюцію солітонів НРШ, взятих за початкову форму обвідних при врахуванні вищих членів НРШ для декількох значень глибини.

Робота містить шість розділів. У розділі 2 записані повні нелінійні рівняння гідродинаміки, що є відправними в нашому дослідженні. В розділі 3 сформульовані умови, за яких повні нелінійні рівняння можуть бути зведені до НРШВП. Потім у загальних рисах описано метод багатьох масштабів, використаний для одержання НРШВП, яке представлено в розділі 4. Після цього для переходу до безрозмірного НРШВП введені безрозмірні координата, час і амплітуда. В перетвореному рівнянні фігурує лише один безрозмірний параметр  $kh$ . Заключним кроком є перехід до системи координат, що рухається з груповою швидкістю несучої хвилі. В розділі 5 представлені результати чисельних обчислень і проведено порівняння поведінки розв'язків НРШ і НРШВП. Висновки зроблені в розділі 6.

## 2. Постановка задачі

Ми розглядаємо динаміку потенціальних двовимірних хвиль на поверхні безвихрової, нев'язкої та нестисливої рідини під впливом сили тяжіння. Вважатимемо, що хвилі поширюються вздовж горизонтальної осі  $x$ , а вертикальну вісь  $y$  спрямуємо протилежно до напрямку дії сили тяжіння. Рідину вважатимемо обмеженою твердим плоским дном

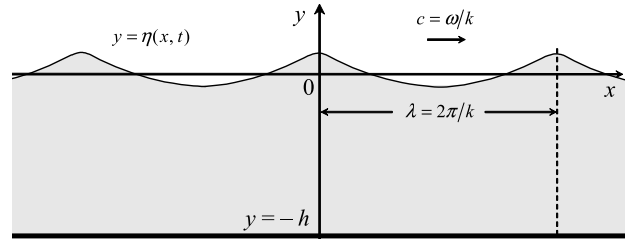


Рис. 1. Схематичне зображення фізичної площини, зайнятою ідеальною нестисливою рідиною скінченної глибини

$y = -h$  знизу і вільною поверхнею  $y = \eta(x, t)$  згори (рис. 1). Атмосферний тиск вважаємо сталим на вільній поверхні. Тоді еволюція хвиль та відповідного потоку рідини описується такою системою рівнянь [2, 15]:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -h < y < \eta(x, t); \quad (2.1)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + g\eta = 0, \quad y = \eta(x, t); \quad (2.2)$$

$$\eta_t - \Phi_y + \eta_x \Phi_x = 0, \quad y = \eta(x, t); \quad (2.3)$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h; \quad (2.4)$$

де  $\Phi(x, y, t)$  – потенціал швидкості (швидкість рівна  $\nabla\Phi$ ),  $g$  – прискорення вільного падіння,  $t$  – час. Тут (2.1) – рівняння Лапласа в області рідини, (2.2) – динамічна гранична умова (так званий інтеграл Бернуллі або інтеграл Коші–Лагранжа), (2.3) і (2.4) – кінематичні граничні умови (рідина не перетинає вільну поверхню і дно), індекси  $x, y, t$  позначають частинні похідні за відповідними змінними. Положення нульового рівня  $y = 0$  вибране так, щоб стала Бернуллі (права частина рівняння (2.2)) була рівна нулю.

Розглянемо модульований хвильовий пакет з несучими частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $k$ . В цьому випадку розв'язок рівнянь (2.1)–(2.4) можна шукати у вигляді розвинень Фур'є зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{pmatrix} \Phi(x, y, t) \\ \eta(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \Phi_n(x, y, t) \\ \eta_n(x, t) \end{pmatrix} e^{in(kx - \omega t)}, \quad (2.5)$$

$$\eta_{-n} \equiv \eta_n^*, \quad \Phi_{-n} \equiv \Phi_n^*,$$

де \* позначає комплексне спряження (несучу хвилю вважаємо симетричною), а функції  $\Phi(x, y, t)$

і  $\eta(x, t)$  є дійсними за визначенням. Підставляючи (2.5) в (2.1)–(2.4) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\exp(i(kx - \omega t))$ , можна одержати систему нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних для функцій  $\Phi_n(x, y, t)$  і  $\eta_n(x, t)$ . Лінеаризація цих рівнянь при  $n = 1$  дає дисперсійне співвідношення для гравітаційних хвиль:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (2.6)$$

### 3. Повільно модульовані квазігармонічні хвильові пакети і багатомасштабні розвинення

У загальному випадку система рівнянь для  $\Phi_n(x, y, t)$  і  $\eta_n(x, t)$  аж ніяк не простіша за вихідні рівняння. Її можна спростити, якщо шукати розв'язки в класі функцій з вузьким спектром,  $|\Delta k| \ll k$ . У цьому випадку задача має формальний малий параметр  $\mu \sim |\Delta k|/k$  (умова квазімонохроматичності), при цьому  $\Phi_n(x, y, t)$  і  $\eta_n(x, t)$  є повільними функціями від  $x$  і  $t$ . Відповідно, хвильовий рух можна розділити на повільний і швидкий, увівши різні часові й різні просторові масштаби:

$$T_n \equiv \mu^n t, \quad X_n \equiv \mu^n x. \quad (3.1)$$

Похідні за частотою і координатою представляють у вигляді таких рядів:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{\partial}{\partial X_n}, \quad (3.2)$$

де часи  $T_n$  і координати  $X_n$  вважають незалежними змінними.

За відсутності резонансів між гармоніками амплітуди коефіцієнтів Фур'є спадають з ростом їх номера (умова квазігармонічності):

$$\eta_n \sim \varepsilon^n A, \quad n \geq 1, \quad \eta_0 \sim \varepsilon^2 A, \quad \varepsilon < 1, \quad (3.3)$$

де

$$\eta_1 \equiv \frac{1}{2} \varepsilon A(x, t). \quad (3.4)$$

Параметр  $\varepsilon$  можна вважати формальним малим параметром, пов'язаним з малістю амплітуди хвилі порівняно з довжиною несучої хвилі  $\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$ . У цьому випадку невідомі функції  $\Phi_n(x, y, t)$  і

$\eta_n(x, t)$  можна розвинути в степеневі ряди за формальним параметром  $\varepsilon$ :

$$\begin{pmatrix} \Phi_n(x, y, t) \\ \eta_n(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \begin{pmatrix} \Phi_n^{(m)}(x, y, t) \\ \eta_n^{(m)}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Багатомасштабні розвинення (3.2) і (3.5) дозволяють виразити функції  $\Phi_n(x, y, t)$  і  $\eta_n(x, t)$  через комплексну амплітуду першої гармоніки  $A(x, t)$ , як це детально описано в роботі [11]. Зауважимо, що в описаному в [11] методі слід покласти  $\varepsilon \equiv \mu$ .

З практичних міркувань умову квазігармонічності можна переписати як

$$|k\eta_1| \ll 1, \quad (3.6)$$

а умову повільної модуляції (квазімонохроматичності) можна формалізувати у вигляді співвідношення

$$\left| \frac{A_x}{kA} \right| \ll 1, \quad (3.7)$$

яке стає очевидним після диференціювання функції  $A(x, t) \exp(i(kx - \omega t))$  за  $x$ . При виконанні цих двох умов, використовуючи малоамплітудні розвинення (3.2) і (3.5), початкову систему рівнянь (2.1)–(2.4) можна звести до одного еволюційного рівняння для обвідної першої гармоніки  $A(x, t)$ .

### 4. Нелінійне рівняння Шредінгера вищого порядку

#### 4.1. Рівняння, виведене Седлецьким

Седлецький [11, 12] застосував описаний вище метод багатьох масштабів для виведення НРШВІ для обвідної першої гармоніки  $A(x, t)$  (рівняння (68) в [11]):

$$\begin{aligned} & i \left( \frac{\partial A}{\partial(\varepsilon t)} + V_g \frac{\partial A}{\partial(\varepsilon x)} \right) + \\ & + \varepsilon \left( \frac{1}{2} \omega'' \frac{\partial^2 A}{\partial(\varepsilon x)^2} + \omega k^2 q_3 |A|^2 A \right) + \\ & + i \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{6} \omega''' \frac{\partial^3 A}{\partial(\varepsilon x)^3} + \omega k Q_{41} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial(\varepsilon x)} + \right. \\ & \left. + \omega k Q_{42} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial(\varepsilon x)} \right) = 0 \quad [\text{м/с}]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Порівняно зі стандартним НРШ це рівняння враховує додаткові нелінійно-дисперсійні члени по-

рядку  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Рівняння (4.1) було пізніше виведене повторно Слюняєвим [13], який підтвердив символічні обчислення, представлені в [11, 12], і розширив їх до порядку  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ . В даній роботі ми обмежимося рівнянням (4.1). Параметри цього рівняння мають такий вигляд:

$$\omega = (gk\sigma)^{1/2}, \quad \sigma \equiv \tanh(kh), \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\partial\omega}{\partial k} \equiv V_g = \frac{\omega}{2k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) = \\ &= \frac{\omega}{2k} \left( 1 + \frac{1-\sigma^2}{\sigma} kh \right), \end{aligned} \quad (4.2b)$$

$$\begin{aligned} \omega'' &= \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} = \frac{\omega}{4k^2\sigma^2} \left( (\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)k^2h^2 - \right. \\ &\left. - 2\sigma(\sigma^2 - 1)kh - \sigma^2 \right), \end{aligned} \quad (4.2c)$$

$$\begin{aligned} \omega''' &= \frac{\partial^3\omega}{\partial k^3} = -\frac{\omega}{8k^3\sigma^3} \left( (\sigma^2 - 1) \times \right. \\ &\times (15\sigma^4 - 2\sigma^2 + 3)k^3h^3 - 3\sigma(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)k^2h^2 - \\ &\left. - 3\sigma^2(\sigma^2 - 1)kh - 3\sigma^3 \right), \end{aligned} \quad (4.2d)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= -\frac{1}{16\sigma^4\nu} \left( (\sigma^2 - 1)^2(9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9)k^2h^2 + \right. \\ &\left. + 2\sigma(3\sigma^6 - 23\sigma^4 + 13\sigma^2 - 9)kh - \right. \\ &\left. - \sigma^2(7\sigma^4 - 38\sigma^2 - 9) \right), \end{aligned} \quad (4.2e)$$

$$\begin{aligned} Q_{41} &= \frac{1}{32\sigma^5\nu^2} \left( (\sigma^2 - 1)^5 \times \right. \\ &\times (3\sigma^6 - 20\sigma^4 - 21\sigma^2 + 54)k^5h^5 - \\ &- \sigma(\sigma^2 - 1)^3(11\sigma^8 - 99\sigma^6 - 61\sigma^4 + 7\sigma^2 + 270)k^4h^4 + \\ &+ 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 58\sigma^8 + 38\sigma^6 + 52\sigma^4 - \\ &- 181\sigma^2 + 270)k^3h^3 - 2\sigma^3(3\sigma^{10} + 18\sigma^8 - 146\sigma^6 - \\ &- 172\sigma^4 + 183\sigma^2 - 270)k^2h^2 - \sigma^4(\sigma^8 - 109\sigma^6 + 517\sigma^4 + \\ &\left. + 217\sigma^2 + 270)kh + \sigma^5(\sigma^6 - 40\sigma^4 + 193\sigma^2 + 54) \right) + \Delta, \end{aligned} \quad (4.2f)$$

$$\begin{aligned} Q_{42} &= \frac{1}{32\sigma^5\nu^2} \left( -(\sigma^2 - 1)^5 \times \right. \\ &\times (3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 11\sigma^2 + 9)k^5h^5 + \\ &+ \sigma(\sigma^2 - 1)^3(11\sigma^8 - 48\sigma^6 + 66\sigma^4 + 8\sigma^2 + 27)k^4h^4 - \\ &- 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 79\sigma^8 + 282\sigma^6 - \\ &- 154\sigma^4 - \sigma^2 + 9)k^3h^3 + 2\sigma^3(3\sigma^{10} - 63\sigma^8 + 314\sigma^6 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 218\sigma^4 + 19\sigma^2 + 9)k^2h^2 + \sigma^4(\sigma^8 + 20\sigma^6 - 158\sigma^4 - \\ &- 28\sigma^2 - 27)kh - \sigma^5(\sigma^6 - 7\sigma^4 + 7\sigma^2 - 9) \right) - \Delta, \end{aligned} \quad (4.2g)$$

$$\nu = (\sigma^2 - 1)^2 k^2 h^2 - 2\sigma(\sigma^2 + 1)kh + \sigma^2. \quad (4.2h)$$

Величина  $V_g$  є груповою швидкістю хвиль. Параметр  $\Delta$  задає введenu Слюняєвим [13] поправку до коефіцієнтів, виведених в [11, 12]. Ця поправка знехтовно мала при  $kh \gtrsim 1$  (див. Додаток А), тому ми ігноруємо її, покладаючи  $\Delta = 0$ .

Зміщення вільної поверхні можна виразити через  $A$  таким чином:

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon^2 \eta_0 + \varepsilon \operatorname{Re}(Ae^{i(kx-\omega t)}) + \\ &+ \varepsilon^2 2 \operatorname{Re}(\eta_2 e^{2i(kx-\omega t)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $\operatorname{Re}\{\cdot\}$  позначає дійсну частину комплексної функції. Тут  $\eta_0$  і  $\eta_2$  визначені як

$$\eta_0 = \frac{\sigma + 2(1 - \sigma^2)kh}{\nu} k|A|^2, \quad (4.4a)$$

$$\eta_2 = \frac{3 - \sigma^2}{8\sigma^3} kA^2. \quad (4.4b)$$

Відповідний потенціал швидкості можна записати як

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon\Phi_0 + \varepsilon 2 \operatorname{Re}(\Phi_1 e^{i(kx-\omega t)}) + \\ &+ \varepsilon^2 2 \operatorname{Re}(\Phi_2 e^{2i(kx-\omega t)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.5)$$

де

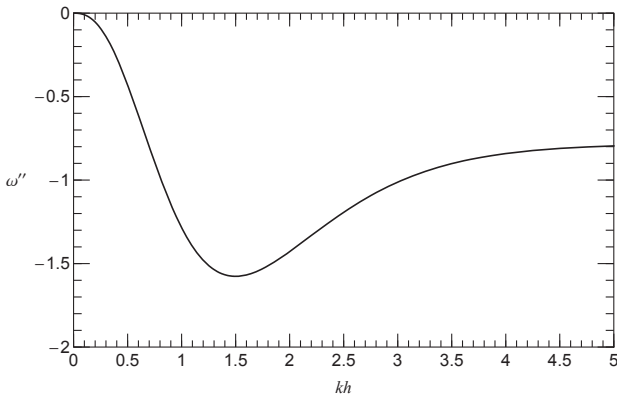
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\omega}{2k\sigma} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} \left( h\sigma + \frac{V_g}{\omega} \right) - iA \right) \frac{\cosh(k(y+h))}{\cosh(kh)} - \right. \\ &\left. - (y+h) \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\sinh(k(y+h))}{\cosh(kh)} \right), \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\Phi_2 = 3i\omega \frac{(\sigma^4 - 1)}{16\sigma^4} \frac{\cosh(2k(y+h))}{\cosh(2kh)} A^2. \quad (4.6b)$$

Доданок  $\Phi_0$  описує середній потік, наведений хвилями. Він неявно виражений у термінах своїх похідних:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = \varepsilon \frac{\omega k \gamma_1}{2\sigma\nu} |A|^2 + i\varepsilon \frac{\omega \gamma_2}{8\sigma^2\nu^2} \left( A \frac{\partial A^*}{\partial x} - A^* \frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} = -V_g \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}, \quad (4.7b)$$



**Рис. 2.** Залежність  $\omega''$  (в  $\text{м}^2/\text{с}$ ) від  $h$  при  $k = 1$  і  $g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$

де

$$\gamma_1 = (\sigma^2 - 1)^2 kh - \sigma(\sigma^2 - 5), \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & (\sigma^2 - 1)^5 k^4 h^4 + 4\sigma(\sigma^2 - 1)^2 (13\sigma^2 + 3) k^3 h^3 - \\ & - 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(3\sigma^4 + 32\sigma^2 - 3) k^2 h^2 + \\ & + 4\sigma^3(2\sigma^4 - \sigma^2 - 5) kh - 3\sigma^4(\sigma^2 - 5). \end{aligned} \quad (4.8b)$$

Функції (4.3) і (4.5) визначають наближений розв'язок початкової системи рівнянь (2.1)–(2.4) в термінах обвідної першої гармоніки  $A$ , яку можна знайти з рівняння (4.1).

#### 4.2. Безрозмірне представлення

Введемо безрозмірні час, координату і амплітуду:

$$\tau = \beta t, \quad \chi = kx, \quad u = \alpha^{-1} \varepsilon A, \quad (4.9)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри, які необхідно визначити. Зв'язок між старими і новими похідними такий:

$$\frac{\partial}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Тоді рівняння (4.1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} i\alpha(\beta u_\tau + kV_g u_\chi) + \alpha \left( \frac{1}{2} \omega'' k^2 u_{\chi\chi} + \omega k^2 q_3 |\alpha|^2 |u|^2 u \right) + \\ + i\alpha \left( -\frac{1}{6} \omega''' k^3 u_{\chi\chi\chi} + \omega k^2 Q_{41} |\alpha|^2 u_\chi |u|^2 + \right. \\ \left. + \omega k^2 Q_{42} |\alpha|^2 u^2 u_\chi^* \right) = 0 \quad [\text{м}/\text{с}]. \end{aligned}$$

Тут індекси  $\chi$  і  $\tau$  позначають частинні похідні за відповідними змінними. Враховуючи те, що  $\omega'' < 0$  при всіх  $h > 0$  (рис. 2), розділимо це рівняння на  $\omega'' k^2 \alpha$  і одержимо

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\beta}{\omega'' k^2} u_\tau + \frac{V_g}{\omega'' k} u_\chi \right) + \left( \frac{1}{2} u_{\chi\chi} + \frac{\omega}{\omega''} |\alpha|^2 q_3 |u|^2 u \right) + \\ + i \left( -\frac{1}{6} \frac{\omega''' k}{\omega''} u_{\chi\chi\chi} + \frac{\omega}{\omega''} |\alpha|^2 Q_{41} u_\chi |u|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{\omega''} |\alpha|^2 Q_{42} u^2 u_\chi^* \right) = 0. \end{aligned}$$

При виборі значень  $\alpha$  і  $\beta$  так, що

$$|\alpha|^2 = -\frac{\omega''}{\omega} > 0, \quad \beta = -\omega'' k^2 > 0, \quad (4.10)$$

рівняння (4.1) набуває безрозмірного вигляду:

$$\begin{aligned} i \left( u_\tau - \frac{V_g}{\omega'' k} u_\chi \right) - \frac{1}{2} u_{\chi\chi} + q_3 |u|^2 u + \\ + i \left( \frac{1}{6} \frac{\omega''' k}{\omega''} u_{\chi\chi\chi} + Q_{41} u_\chi |u|^2 + Q_{42} u^2 u_\chi^* \right) = 0 \end{aligned}$$

або, еквівалентно,

$$\begin{aligned} i(u_\tau + a_{10} u_\chi) - a_{20} u_{\chi\chi} + a_{0,0,0} |u|^2 u + i(-a_{30} u_{\chi\chi\chi} + \\ + a_{1,0,0} u_\chi |u|^2 + a_{0,0,1} u^2 u_\chi^*) = 0, \end{aligned} \quad (4.11a)$$

що остаточно можна записати як

$$\begin{aligned} u_\tau = -a_{10} u_\chi - i a_{20} u_{\chi\chi} + i a_{0,0,0} |u|^2 u + \\ + (a_{30} u_{\chi\chi\chi} - a_{1,0,0} u_\chi |u|^2 - a_{0,0,1} u^2 u_\chi^*), \end{aligned} \quad (4.11b)$$

де ми використали уніфіковані позначення, введені Лукомським і Ганджою [10]. Тут коефіцієнти

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{V_g}{\omega'' k} = -\frac{2}{v} (\sigma^2 + \sigma(1 - \sigma^2) kh) > 0, \\ a_2 = \frac{1}{2}, \\ a_3 \equiv -\frac{1}{6} \frac{\omega''' k}{\omega''} = \\ = \frac{1}{12\sigma v} \left( (\sigma^2 - 1)(15\sigma^4 - 2\sigma^2 + 3) k^3 h^3 - \right. \\ \left. - 3\sigma(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1) k^2 h^2 - \right. \\ \left. - 3\sigma^2(\sigma^2 - 1) kh - 3\sigma^3 \right), \\ a_{0,0,0} \equiv q_3, \quad a_{1,0,0} \equiv Q_{41}, \quad a_{0,0,1} \equiv Q_{42}, \\ v = (\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1) k^2 h^2 - 2\sigma(\sigma^2 - 1) kh - \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

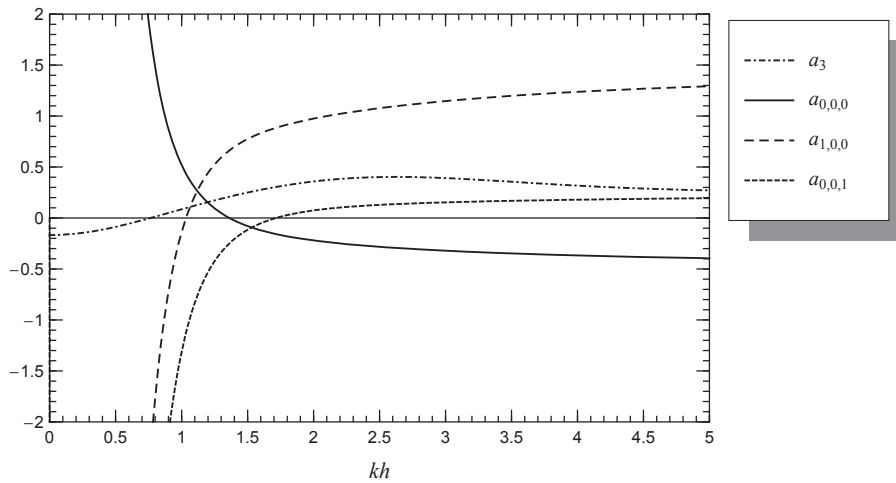


Рис. 3. Залежність нормованих коефіцієнтів НРШВП від  $kh$

є дійсними і залежать лише від одного безрозмірного параметра  $kh$ . Їх залежність від  $kh$  показана на рис. 3. Видно, що рівняння (4.1) справедливе при  $kh \gtrsim 1$ , коли коефіцієнти  $a_{0,0,0}$ ,  $a_{1,0,0}$  і  $a_{0,0,1}$  не розбігаються. При менших глибинах необхідно використовувати рівняння Кортвега–де Вріза та його узагальнення [47, 50]. З іншого боку, при великих  $kh$ , слід використовувати граничний перехід до нескінченної глибини (рівняння Диста). Справді, при  $kh \rightarrow \infty$  можна легко одержати такі асимптотики:

$$a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_{0,0,0} = -\frac{1}{2}, \quad a_{1,0,0} = \frac{3}{2}, \quad a_{0,0,1} = \frac{1}{4}. \quad (4.13)$$

Вони збігаються з відповідними коефіцієнтами рівняння Диста [67], за виключенням члена з наведеним хвилями потоком, який не можна відтворити явно з рівняння (4.11) внаслідок додаткового степеневого розвинення наведеного потоку, зроблене при виводі рівняння (4.1). Проте, цей член можна відтворити з рівнянь, з яких випливає рівняння (4.1), на стадії, коли наведений потік ще не виключений з рівняння для  $A$  [11]. Враховуючи ці обмеження, ми будемо цікавитися таким інтервалом проміжних глибин:

$$1 < kh < 5. \quad (4.14)$$

### 4.3. Рухом система координат

Рівняння (4.11) можна переписати у вигляді, який не містить доданка з  $u_\chi$ . Для цього перейдемо до

системи координат, що рухається зі швидкістю  $a_1$  (безрозмірною груповою швидкістю):

$$\xi = \chi - a_1 \tau, \quad T = \tau. \quad (4.15)$$

Зв'язок між похідними в нових і старих змінних заданий формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} &= \frac{\partial \xi}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial T} = -a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial T}, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} u_\tau &= -ia_2 u_{\xi\xi} + ia_{0,0,0} |u|^2 u + \\ &+ (a_3 u_{\xi\xi\xi} - a_{1,0,0} u_\xi |u|^2 - a_{0,0,1} u^2 u_\xi^*). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Це рівняння є нашим цільовим рівнянням для чисельного моделювання. Воно має інтеграл руху

$$I_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi, \tau)|^2 d\xi = \text{const}, \quad (4.17)$$

який виражає збереження хвильової дії. Вивід цього закону збереження даний у Додатку В. Цей інтеграл дозволяє відслідковувати чисельну похибку при обчисленнях:

$$\text{Er}(I_0) = \frac{|I_0(\tau) - I_0(0)|}{I_0(0)}. \quad (4.18)$$

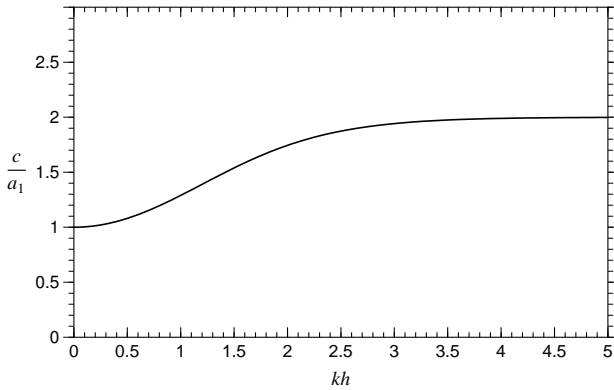


Рис. 4. Співвідношення безрозмірних фазової і групової швидкостей як функція  $kh$

Окремий інтерес має можливий зв'язок рівняння (4.16) з іншими НРШВП, одержаними в інших задачах. У Додатку Б ми розглянули одне таке рівняння (рівняння Саса–Сацуми) і показали, що рівняння (4.16) не може бути зведене до нього при будь-яких  $kh$ .

#### 4.4. Безрозмірні зміщення вільної поверхні й потенціал швидкості

Безрозмірне зміщення вільної поверхні, записане в термінах функції  $u$ , має такий вигляд:

$$\zeta \equiv k\eta = \alpha_0 |u|^2 + \alpha_1 \operatorname{Re}(u e^{i\theta}) + 2\alpha_2 \operatorname{Re}(u^2 e^{2i\theta}), \quad (4.19)$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma + 2(1 - \sigma^2)kh}{c\nu}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \alpha_2 = \frac{3 - \sigma^2}{8c\sigma^3},$$

де

$$\theta = kx - \omega t = \chi - c\tau = \xi + (a_1 - c)\tau \quad (4.20)$$

є фазою хвилі, а

$$c = \frac{1}{|\alpha|^2 k^2} = -\frac{4\sigma^2}{\nu} \quad (4.21)$$

є безрозмірною фазовою швидкістю. На рис. 4 показано відношення фазової швидкості  $c$  до групової швидкості  $a_1$  як функцію від  $kh$ . Це відношення дорівнює одиниці при  $kh \rightarrow 0$ , а при  $kh \rightarrow \infty$  воно є вдвічі більшим, у повній відповідності до класичної теорії хвиль на поверхні рідини [2]. Обвідну профілю хвилі можна знайти за формулою

$$[\zeta]_{\text{обвідна}} = \alpha_1 |u| + (\alpha_0 + 2\alpha_2) |u|^2. \quad (4.22)$$

Відповідний безрозмірний потенціал швидкості виражений як

$$\varphi \equiv -\frac{1}{\omega''} \Phi = \varphi_0 + 2 \operatorname{Re}(\varphi_1 e^{i\theta}) + 2 \operatorname{Re}(\varphi_2 e^{2i\theta}), \quad (4.23)$$

$$(\varphi_0)_\xi = \frac{\gamma_1}{2\sigma\nu} |u|^2 + \frac{i\gamma_2}{8\sigma^2\nu^2} (uu_\xi^* - u^*u_\xi),$$

$$(\varphi_0)_\tau = -a_1 (\varphi_0)_\xi,$$

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{c}}{2\sigma} \left( \left( -iu + \frac{(\sigma^2 + 1)kh + \sigma}{2\sigma} u_\xi \right) \times \frac{\cosh(z + kh)}{\cosh(kh)} - (z + kh) \frac{\sinh(z + kh)}{\cosh(kh)} u_\xi \right),$$

$$\varphi_2 = \frac{3i(\sigma^4 - 1)}{16\sigma^4} \frac{\cosh(2(z + kh))}{\cosh(2kh)} u^2,$$

де  $z \equiv ky$  – безрозмірна вертикальна координата. Умова квазігармонічності має вигляд

$$\frac{|u|}{\sqrt{c}} \ll 1, \quad (4.24)$$

а умова квазімонохроматичності така:

$$\left| \frac{u_\xi}{u} \right| \ll 1. \quad (4.25)$$

Нарешті, початкові рівняння гідродинаміки можна переписати в такому безрозмірному вигляді:

$$\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad -kh < z < \zeta(\xi, \tau); \quad (4.26)$$

$$\varphi_\tau + \frac{1}{2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_z^2) + \frac{c^2}{\sigma} \zeta = 0, \quad z = \zeta(\xi, \tau); \quad (4.27)$$

$$\zeta_\tau - \varphi_z + \zeta_\xi \varphi_\xi = 0, \quad z = \zeta(\xi, \tau); \quad (4.28)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -kh. \quad (4.29)$$



**5. Чисельне моделювання**

У цьому розділі для обчислення розв'язків НРШВП (4.16) ми використовуємо метод Фур'є з розщепленим кроком (SSF), описаний у Додатку Г. Для перевірки точності нашої чисельної схеми розпочнемо з класичного НРШ (1.1), записаного в термінах координати  $\xi$ . При  $a_{0,0,0} < 0$  ( $kh \gtrsim 1,363$ ) воно має точний односолітонний розв'язок [5]:

$$u(\xi, \tau) = \frac{u_0 \exp(i\kappa\xi - i\Omega\tau)}{\cosh(K(\xi - \xi_0 - V\tau))}, \tag{5.1}$$

$$\Omega = (K^2 - \kappa^2) a_2, \quad V = -2\kappa a_2, \quad K = |u_0| \sqrt{-\frac{a_{0,0,0}}{2a_2}},$$

$$u_0 \in \mathbb{C}, \quad \kappa, \xi_0 \in \mathbb{R}.$$

Тут  $V$  – швидкість солітона,  $u_0$  – його комплексна амплітуда,  $\kappa$  і  $\Omega$  – хвильове число і частота солітона,  $\xi_0$  задає початкове положення солітона. Амплітуда  $u_0$  і хвильове число  $\kappa$  мають бути вибраними так, щоб були виконані умови квазігармонічності й квазімонохроматичності (4.24), (4.25). Фактично, ці умови означають, що амплітуда солітона і його хвильове число мають бути малими:

$$|u_0| \ll 1, \quad \kappa \ll 1.$$

В цій роботі ми обмежуємось таким вибором параметрів:

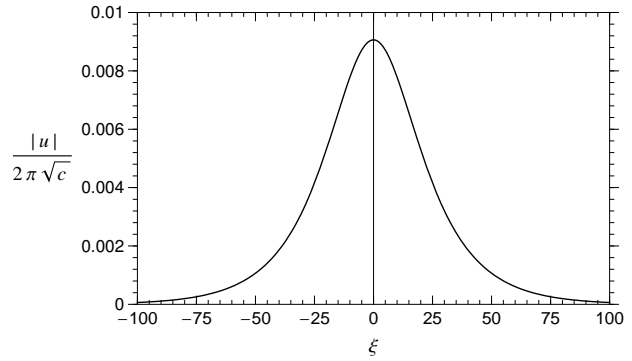
$$u_0 = 0,1, \quad \kappa = -K (\Rightarrow \Omega = 0), \quad \xi_0 = 0. \tag{5.2}$$

На рис. 5 і 6 продемонстровано, що ці параметри цілком задовольняють умови (4.24) і (4.25). Відзначимо, що при  $\kappa < 0$  швидкість  $V > 0$ . У цьому випадку солітони поширюються зліва направо зі швидкістю, що перевищує групову швидкість несучої хвилі.

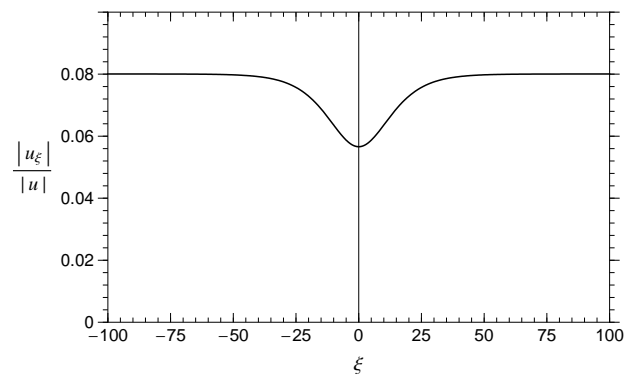
На рис. 7 показано солітон, обчислений при  $kh = 3$  з використанням аналітичної формули (5.1) для початкового моменту  $\tau = 0$  і моменту  $\tau = 10000$ . Той самий солітон був узятий у ролі початкової умови для моделювання методом SSF. Видно, що відхилення від точного розв'язку знехтовно мале. Це підтверджує чисельна похибка, оцінена за формулою (4.18):

$$S^{(2)}|_{\tau=10000} : \text{Er}(I_0) = 1,3 \cdot 10^{-10}\%,$$

$$\Delta_{\text{rms}}(u_{\text{точний}}, u_{\text{модел.}}) = 1,0 \cdot 10^{-4}\%,$$



**Рис. 5.** Перевірка умови квазігармонічності (4.24) при  $kh = 3$



**Рис. 6.** Перевірка умови квазімонохроматичності (4.25) при  $kh = 3$

$$S^{(4)}|_{\tau=10000} : \text{Er}(I_0) = 2,3 \cdot 10^{-10}\%,$$

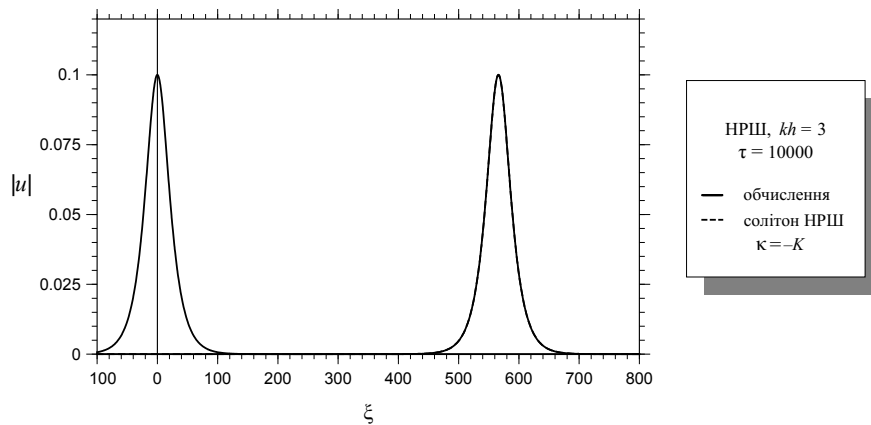
$$\Delta_{\text{rms}}(u_{\text{точний}}, u_{\text{модел.}}) = 3,5 \cdot 10^{-9}\%,$$

де  $S^{(2)}$  і  $S^{(4)}$  визначають вибраний при обчисленнях порядок методу SSF (див. Додаток Г), а

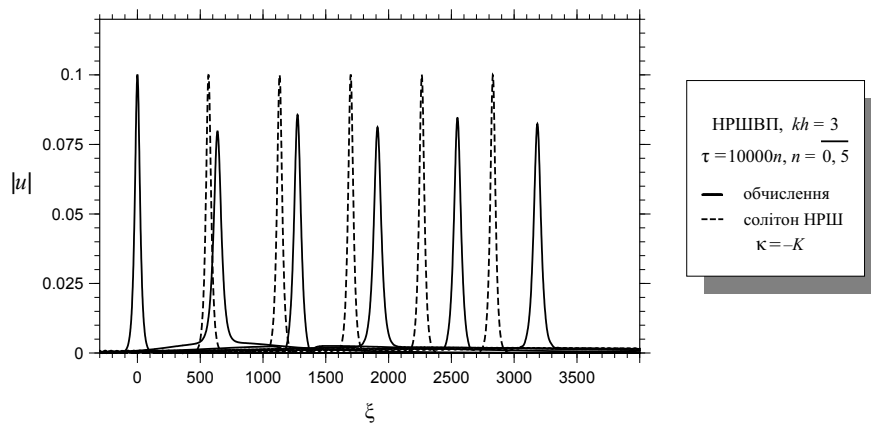
$$\Delta_{\text{rms}}(u, g)(\tau) = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (|u(\xi, \tau)| - |g(\xi, \tau)|)^2 d\xi}{I_0}}$$

є відносним середнім квадратичним відхиленням двох функцій. Таким чином, наша чисельна схема відтворює точний односолітонний розв'язок НРШ з високою точністю.

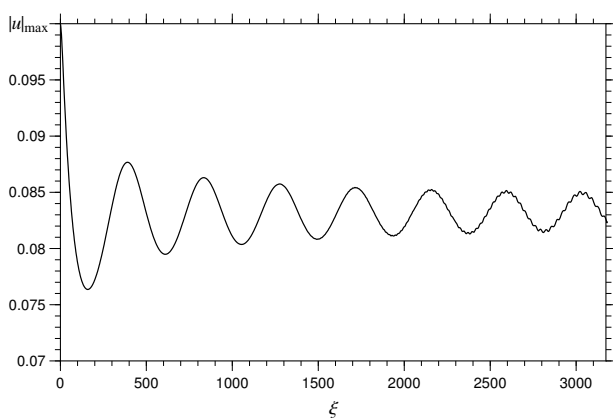
На рис. 8 зображено еволюцію того самого односолітонного хвильового профілю, взятого за початковий у НРШВП (4.16). Порівняно з випадком НРШ амплітуда хвилі менша, ширина імпульсу більша, і швидкість хвилі вища. Амплітуда хвилі не залишається сталою, демонструючи повільні коливання, які можна інтерпретувати як вторинні



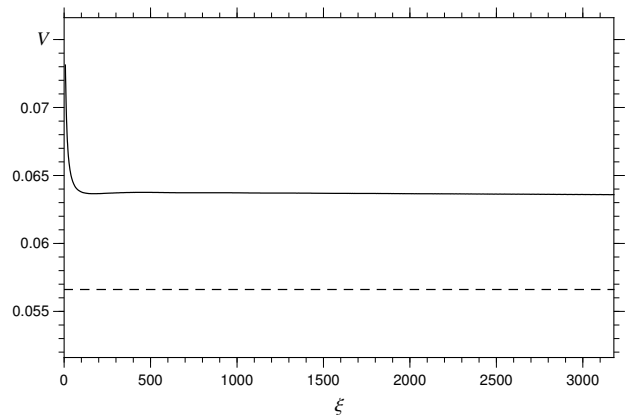
**Рис. 7.** Еволюція односолітонного розв'язку (5.1) НРШ (1.1) при  $kh = 3$ . Параметри SSF:  $\Delta\tau = 1$ ,  $\Delta\xi = 2$ ,  $\xi \in [-1000, 1000]$ ;  $V \approx 0,0566$



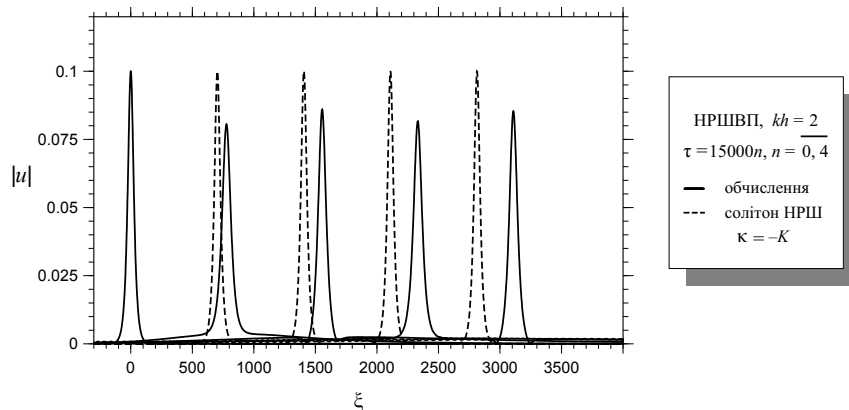
**Рис. 8.** Еволюція односолітонного хвильового профілю (5.1), взятого за початковий у НРШВП (4.16) при  $kh = 3$ . Параметри SSF:  $\Delta\tau = 0,5$ ,  $\Delta\xi = 2$ ,  $\xi \in [-4000, 4000]$ . Чисельна точність:  $S^{(2)}|_{\tau=50000} : \text{Er}(I_0) = 0,050\%$



**Рис. 9.** Коливання амплітуди квазісолітонного розв'язку залежно від відстані при  $kh = 3$



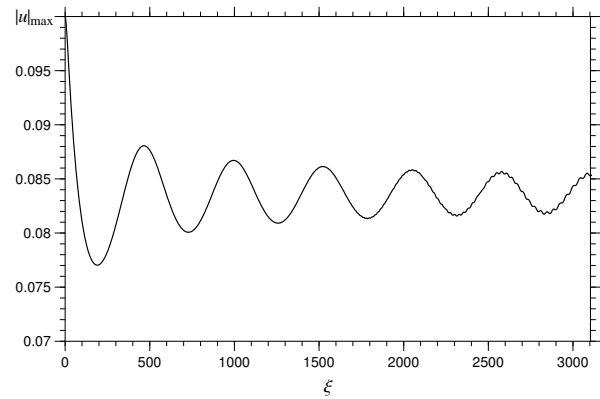
**Рис. 10.** Залежність середньої швидкості хвилі від відстані при  $kh = 3$ : суцільна крива – квазісолітон, пунктирна лінія – солітон НРШ ( $V \approx 0,0566$ )



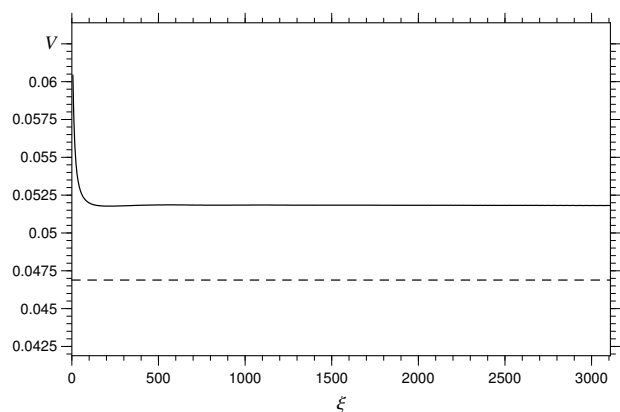
**Рис. 11.** Еволюція односолітонного хвильового профілю (5.1), взятого за початковий у НРШВП (4.16) при  $kh = 2$ . Параметри SSF:  $\Delta\tau = 0,5$ ,  $\Delta\xi = 2$ ,  $\xi \in [-4000, 4000)$ . Чисельна точність:  $S^{(2)}|_{\tau=60000} : \text{Er}(I_0) = 0,028\%$

модуляції несучої хвилі. Амплітуда цих коливань зменшується з часом (рис. 9). Такий розв'язок не підпадає під визначення солітона, оскільки не зберігає амплітуду і форму сталими під час еволюції. З іншого боку, він поширюється з майже сталою швидкістю (рис. 10) і демонструє унікальну властивість солітонів існувати протягом тривалих періодів часу без руйнування. З огляду на цю унікальну властивість, ми називаємо такі розв'язки квазісолітонами. Термін “квазісолітон” був введений раніше Захаровим і Кузнецовим [6], але в дещо іншому контексті; потім Карпмен та ін. [49] і Слюняєв [14] використовували цей термін у тому самому контексті, як і в даній роботі.

Така поведінка солітонів НРШ у випадку НРШВП була вперше описана Акиласом [18] у контексті асимптотичного і чисельного моделювання рівняння Диста для випадку нескінченної глибини. Зростання швидкості солітона відповідає добре відомому явищу зсуву несучої частоти вниз, яке спостерігав експериментально Су [64] на глибокій воді. Ло і Мей [51] виявили цей частотний зсув при моделюванні рівняння Диста. Ще раніше Дист [32] зазначав, що це явище виникає завдяки наведеному хвилею потоку, проекція якого на напрямок поширення хвилі викликає локальний доплерівський зсув. У нашій роботі вперше показано, що це відоме явище можна спостерігати також у випадку скінченних глибин. Цей результат є головним практичним досягненням даної роботи. На рис. 11, 12 і 13 продемонстровано, що такий самий квазісолітонний розв'язок і часто-



**Рис. 12.** Коливання амплітуди квазісолітонного розв'язку залежно від відстані при  $kh = 2$



**Рис. 13.** Залежність середньої швидкості хвилі від відстані при  $kh = 2$ : суцільна крива – квазісолітон, пунктирна лінія – солітон НРШ ( $V \approx 0,0469$ )

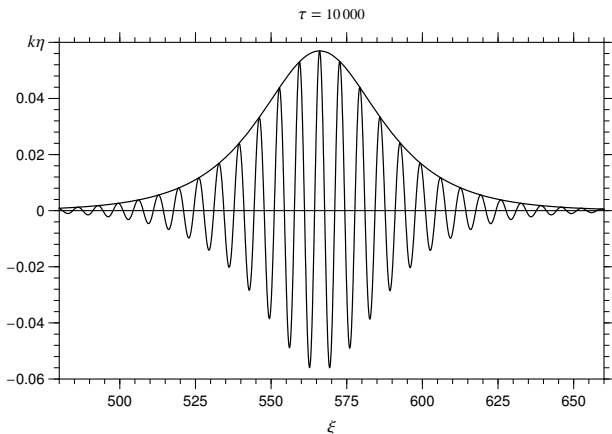


Рис. 14. Профіль вільної поверхні з обвідною у вигляді квазісолітона при  $kh = 3$

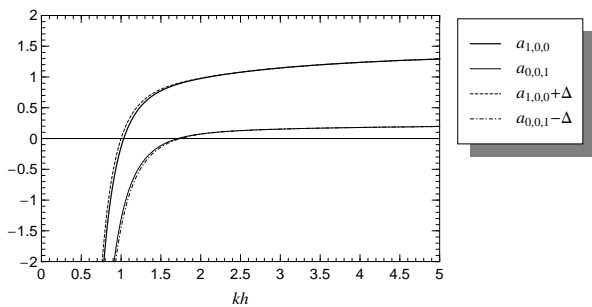


Рис. 15. Вплив поправки  $\Delta$  на коефіцієнти  $a_{1,0,0}$  і  $a_{0,0,1}$

тний зсув існують і у випадку меншої глибини,  $kh = 2$ .

Нарешті, на рис. 14 показаний профіль вільної поверхні, обчислений за формулою (4.19) при  $kh = 3$ . Безрозмірне максимальне підняття вільної поверхні дорівнює приблизно 0,046. Значення  $kh = 3$  відповідає довжинам хвиль, удвічі більшим за глибину:  $\lambda \approx 2h$ . Типова глибина шельфу біля північно-західного узбережжя Чорного моря змінюється від 10 до 100 м. Отже, довжина хвилі, що відповідає  $kh = 3$ , знаходиться в межах діапазону від 20 до 200 м, що є цілком типовим для хвиль, спостережуваних у Чорному морі. Для  $h = 30$  м маємо  $\lambda \approx 60$  м і  $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ . Відповідне максимальне підняття вільної поверхні, показаної на рис. 14, дорівнює приблизно 0,5 м, а характерна ширина обвідної хвильового пакета сягає величини 2 км. Таким чином, квазісолітонні розв'язки, отримані в цій роботі, можуть описувати брижі, що поширюються на відносно спокійному тлі по поверх-

ні моря з порівняно невеликою, але одночасно немалою, глибиною. Типова висота таких бриж від впадини до гребеня становить приблизно 1 м.

## 6. Висновки

НРШВП, виведене раніше Ю. В. Седлецьким [11] для обвідної першої гармоніки повільно модульованих гравітаційних хвиль на поверхні безвихрової, нев'язкої і нестисливої рідини зі скінченною глибиною і плоским дном, було переписано в безрозмірному вигляді, зручному для чисельного моделювання. При врахуванні доданків, що містяться в НРШВП, односолітонні розв'язки НРШ стають квазісолітонами з повільно змінною амплітудою. Ці квазісолітони представляють вторинні модуляції гравітаційних хвиль. Вони поширюються з майже сталою швидкістю і демонструють унікальну властивість солітонів існувати протягом тривалих періодів часу без руйнування. Виявилось, що їх швидкість вища за швидкість солітонів НРШ, узятих за початкову умову в обчисленнях. Це явище спостерігали раніше як в експерименті, так і в чисельному моделюванні у випадку великої глибини [18, 64]. Воно пов'язане зі зсувом частоти вниз, що виникає через наведений хвилями потік [32, 51]. Квазісолітонні розв'язки, отримані в даній роботі, описують брижі, що поширюються на відносно спокійному тлі по поверхні моря з порівняно невеликою, але одночасно немалою, глибиною.

Автори вдячні С.С. Рожкову за обговорення проблеми, що мотивувало нас розпочати це дослідження. Д.С. Дутих вдячний за гостинність Інституту аналізу при Університеті Йоганна Кеплера в Лінці, де він виконував цю роботу.

## ДОДАТОК А

### До поправки, введеної Слюняєвим

Слюняєв [13] повторно одержав НРШВП (4.1) і ввів поправку

$$\Delta = -\frac{1}{16\sigma^3\nu} \left( (\sigma^2 - 1)^4 (3\sigma^2 + 1) k^3 h^3 - \sigma(\sigma^2 - 1)^2 (5\sigma^4 - 18\sigma^2 - 3) k^2 h^2 + \sigma^2 (\sigma^2 - 1)^2 (\sigma^2 - 9) kh + \sigma^3 (\sigma^2 - 1) (\sigma^2 - 5) \right) \quad (\text{A1})$$

до коефіцієнтів  $Q_{41} = a_{1,0,0}$  і  $Q_{42} = a_{0,0,1}$ , одержаних раніше в [11]. Насправді, з рис. 15 видно, що поправкою  $\Delta$  можна впевнено знехтувати без істотної зміни точності в області  $kh \gtrsim 1$ .

**ДОДАТОК Б**

**Зв'язок з рівнянням Саса–Сацуми**

Враховуючи те, що  $(|u|^2)_\xi = u_\xi u^* + uu_\xi^*$ , рівняння (4.16) можна переписати в іншій формі:

$$u_\tau = -ia_2 u_{\xi\xi} + ia_{0,0,0} |u|^2 u + (a_3 u_{\xi\xi\xi} - \tilde{a}_{1,0,0} |u|^2 u_\xi - a_{0,0,1} u (|u|^2)_\xi), \quad (B1)$$

$$\tilde{a}_{1,0,0} = a_{1,0,0} - a_{0,0,1}.$$

Якщо

$$3(-a_3)a_{0,0,0} = \frac{1}{2}\tilde{a}_{1,0,0}, \quad (B2)$$

рівняння (B1) може бути зведене до рівняння Саса–Сацуми [40], що має нескінченне число інтегралів руху і допускає деякі додаткові точні багатосолітонні розв'язки [19], на відміну від НРШВП з довільними коефіцієнтами. Проте, як чітко показано на рис. 16, вищезгадане співвідношення між параметрами не задовольняється ні за яких  $kh$ . Тому рівняння Саса–Сацуми не може бути отримане з рівняння (4.16).

**ДОДАТОК В**

**Збереження хвильової дії**

Помножимо рівняння (B1) на  $u^*$ , а спряжене рівняння – на  $u$ ,

$$u_\tau = -ia_2 u_{\xi\xi} + ia_{0,0,0} |u|^2 u + (a_3 u_{\xi\xi\xi} - \tilde{a}_{1,0,0} |u|^2 u_\xi - a_{0,0,1} u (|u|^2)_\xi), \quad | \times u^*,$$

$$u_\tau^* = ia_2 u_{\xi\xi}^* - ia_{0,0,0} |u|^2 u^* + (a_3 u_{\xi\xi\xi}^* - \tilde{a}_{1,0,0} |u|^2 u_\xi^* - a_{0,0,1} u^* (|u|^2)_\xi), \quad | \times u,$$

і додамо ці два рівняння:

$$(u^* u_\tau + uu_\tau^*) = -ia_2 (u^* u_{\xi\xi} - uu_{\xi\xi}^*) + a_3 (u^* u_{\xi\xi\xi} + uu_{\xi\xi\xi}^*) - \tilde{a}_{1,0,0} (|u|^2 u^* u_\xi + |u|^2 uu_\xi^*) - 2a_{0,0,1} |u|^2 (|u|^2)_\xi.$$

Після деяких алгебраїчних перетворень одержимо

$$(|u|^2)_\tau = -ia_2 \left( (u^* u_\xi)_\xi - (uu_\xi^*)_\xi \right) + a_3 \left( (u^* u_{\xi\xi})_\xi - (u_\xi u_\xi^*)_\xi + (uu_{\xi\xi}^*)_\xi \right) - \frac{1}{2} (\tilde{a}_{1,0,0} + 2a_{0,0,1}) (|u|^4)_\xi.$$

В останньому доданку було враховане співвідношення

$$|u|^2 (|u|^2)_\xi = uu^* (uu^*)_\xi = \frac{1}{2} (uu^* uu^*)_\xi = \frac{1}{2} (|u|^4)_\xi.$$

Інтегруючи це рівняння за  $\xi$  від  $-\infty$  до  $\infty$ , враховуючи те, що функція  $u$  разом з її похідними спадають до нуля на  $\pm\infty$ , одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u|^2)_\tau d\xi = 0 \Leftrightarrow I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 d\xi = \text{const}. \quad (B1)$$

**ДОДАТОК Г**

**Метод Фур'є з розщепленим кроком**

**1. Лінійне рівняння**

Розглянемо лінійну частину НРШВП (4.16):

$$u_\tau = -ia_2 u_{\xi\xi} + a_3 u_{\xi\xi\xi}, \quad u = u(\xi, \tau). \quad (Г1)$$

Застосуємо перетворення Фур'є до функції  $u(\xi, \tau)$ :

$$\hat{u}(\kappa, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, \tau) \exp(-i\kappa\xi) d\xi \equiv \mathcal{F}_\kappa[u(\xi, \tau)]. \quad (Г2)$$

Обернене перетворення Фур'є має вигляд

$$u(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\kappa, \tau) \exp(i\kappa\xi) d\kappa \equiv \mathcal{F}_\xi^{-1}[\hat{u}(\kappa, \tau)]. \quad (Г3)$$

Перетворення Фур'є для похідних функції  $u(\xi, \tau)$  задане виразами

$$(\widehat{u_\xi}) = i\kappa \hat{u}, \quad (\widehat{u_{\xi\xi}}) = -\kappa^2 \hat{u}, \quad \dots, \quad (\widehat{u_{\xi^n}}) = (i\kappa)^n \hat{u}. \quad (Г4)$$

Звідси, лінійне рівняння (Г1) в просторі Фур'є має вигляд

$$\hat{u}_\tau = (-ia_2 (i\kappa)^2 + a_3 (i\kappa)^3) \hat{u}, \quad \hat{u}(0) \equiv \hat{u}_0. \quad (Г5)$$

Це звичайне диференціальне рівняння може бути легко проінтегроване,

$$\hat{u} = \hat{u}_0 \exp((ia_2 \kappa^2 - ia_3 \kappa^3) \tau), \quad (Г6)$$

звідки можна одержати такий розв'язок для  $u(\xi, \tau)$ :

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0 \exp((ia_2 \kappa^2 - ia_3 \kappa^3) \tau) \exp(i\kappa\xi) d\kappa. \quad (Г7)$$

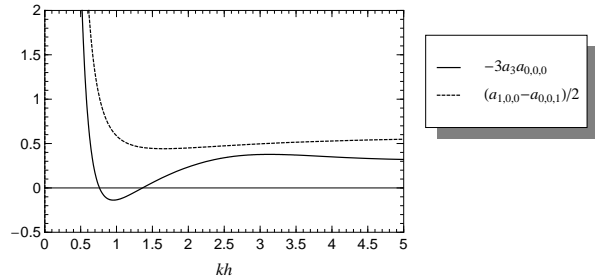
**2. Нелінійне рівняння**

Нелінійне рівняння (4.16) може бути розщеплене на лінійну і нелінійну частини:

$$u_\tau = -ia_2 u_{\xi\xi} + ia_{0,0,0} |u|^2 u + (a_3 u_{\xi\xi\xi} - a_{1,0,0} u_\xi |u|^2 - a_{0,0,1} u^2 u_\xi^*) \equiv (\mathcal{L} + \mathcal{N}) u,$$

де

$$\mathcal{L} \equiv -ia_2 \partial_{\xi\xi} + a_3 \partial_{\xi\xi\xi}, \quad (Г8)$$



**Рис. 16.** Залежність лівої і правої частин рівняння (B2) від  $kh$

$$\mathcal{N} \equiv ia_{0,0,0}|u|^2 - a_{1,0,0}u_\xi u^* - a_{0,0,1}uu_\xi^* \quad (\Gamma 9)$$

є відповідно лінійним і нелінійним операторами. Далі проведемо напівдискретизацію в часі,

$$\begin{aligned} \frac{u(\xi, \tau + \Delta\tau) - u(\xi, \tau)}{\Delta\tau} \Big|_{\Delta\tau \rightarrow 0} &= (\mathcal{L} + \mathcal{N})u(\xi, \tau) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(\xi, \tau + \Delta\tau) &\approx u(\xi, \tau) + \Delta\tau(\mathcal{L} + \mathcal{N})u(\xi, \tau) \approx \\ \approx e^{\Delta\tau(\mathcal{L} + \mathcal{N})}u(\xi, \tau), \end{aligned}$$

і використаємо формулу Стренга другого порядку для некомутативних операторів [63]:

$$\begin{aligned} e^{\Delta\tau(\mathcal{L} + \mathcal{N})} &\equiv S^{(2)}(\Delta\tau) = \\ &= \exp\left(\frac{\Delta\tau}{2}\mathcal{N}\right) \exp(\Delta\tau\mathcal{L}) \exp\left(\frac{\Delta\tau}{2}\mathcal{N}\right), \quad (\Gamma 10) \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\frac{\Delta\tau}{2}\mathcal{L}\right) \exp(\Delta\tau\mathcal{N}) \exp\left(\frac{\Delta\tau}{2}\mathcal{L}\right). \quad (\Gamma 11)$$

В наших обчисленнях розщеплення (Г11) показало себе більш точним, ніж (Г10). Лінійну частину можна проінтегрувати точно, використовуючи співвідношення (Г7):

$$\begin{aligned} e^{\Delta\tau\mathcal{L}}u(\xi, \tau) &= \\ &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[ e^{\Delta\tau(-ia_2(i\kappa)^2 + a_3(i\kappa)^3)} \mathcal{F}_\kappa[u(\xi, \tau)] \right], \quad (\Gamma 12) \end{aligned}$$

а нелінійну частину коректувати на кожному кроці за формулою

$$\begin{aligned} e^{\Delta\tau\mathcal{N}}u(\xi, \tau) &= \\ &= e^{\Delta\tau(a_{0,0,0}|u|^2 - a_{1,0,0}u_\xi u^* - a_{0,0,1}uu_\xi^*)}u(\xi, \tau). \quad (\Gamma 13) \end{aligned}$$

Слідуючи за Йошидою [69], можна ввести більш точне розщеплення четвертого порядку:

$$S^{(4)}(\Delta\tau) = S^{(2)}(p_1\Delta\tau) S^{(2)}(p_0\Delta\tau) S^{(2)}(p_1\Delta\tau), \quad (\Gamma 14)$$

$$p_0 = -\frac{2^{1/3}}{2-2^{1/3}} \approx -1,70, \quad p_1 = \frac{1}{2-2^{1/3}} \approx 1,35.$$

За більш детальним описом методу SSF читач може звернутися до роботи [52].

1. В.И. Беспалов, В.И. Таланов, Письма ЖЭТФ **3**(12), 471 (1966).
2. I.C. Ганджа, УФЖ Огляди **8**(1), 3 (2013).
3. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (Мир, Москва, 1988).
4. В.Е. Захаров, Прикл. мех. и техн. физ. **2**, 86 (1968).
5. В.Е. Захаров, А.В. Шабат, ЖЭТФ **61**(1), 118 (1971).
6. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, ЖЭТФ **113**(5), 1892 (1998).
7. В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, УФН **182**(6), 569 (2012).
8. Э. Инфельд, Дж. Роуланс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос* (Физматлит, Москва, 2006).
9. В.П. Лукомский, ЖЭТФ **108**(2), 567 (1995).
10. В.П. Лукомский, I.C. Ганджа, УФЖ **54**(1-2), 217 (2009).
11. Ю.В. Седлецкий, УФЖ **48**(1), 82 (2003).

12. Ю.В. Седлецкий, ЖЭТФ **124**(1), 200 (2003).
13. А.В. Слоняев, ЖЭТФ **128**(5), 1061 (2005).
14. А.В. Слоняев, ЖЭТФ **136**(4), 785 (2009).
15. Дж.Дж. Стокер, *Волны на воде. Математическая теория и приложения* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1959).
16. M.J. Ablowitz, J. Hammack, D. Henderson, and C.M. Schober, PRL **84**(5), 887 (2000).
17. M.J. Ablowitz, J. Hammack, D. Henderson, and C.M. Schober, Physica D **152–153**, 416 (2001).
18. T.R. Akylas, J. Fluid Mech. **198**, 387 (1989).
19. U. Bandelow and N. Akhmediev, PRE **86**, 026606 (2012).
20. D.J. Benney and A.C. Newell, J. Math. Phys. **46**, 133 (1967).
21. D.J. Benney and G.J. Roskes, Stud. Appl. Math. **48**(4), 377 (1969).
22. U. Brinch-Nielsen and I.G. Jonsson, Wave Motion **8**, 455 (1986).
23. A. Chabchoub, N.P. Hoffmann, and N. Akhmediev, PRL **106**, 204502 (2011).
24. M. Chen, J.M. Nash, and C.E. Patton, J. Appl. Phys. **73**, 3906 (1993).
25. D. Clamond, M. Francius, J. Grue, and C. Kharif, Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 536 (2006).
26. S.H. Crutcher, A. Osei, and A. Biswas, Optics & Laser Technology **44**, 1156 (2012).
27. A. Davey and K. Stewartson, Proc. R. Soc. Lond. A **338**, 101 (1974).
28. S. Debsarma and K.P. Das, Phys. Fluids **17**, 104101 (2005).
29. F. Dias and C. Kharif, Annu. Rev. Fluid Mech. **31**, 301 (1999).
30. A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, Письма ЖЭТФ **93**(12), 782 (2011).
31. A.I. Dyachenko and V.E. Zakharov, Eur. J. Mech. B/Fluids **32**, 17 (2012).
32. K.B. Dysthe, Proc. R. Soc. Lond. A **369**, 105 (1979).
33. F. Fedele and D. Dutykh, Письма ЖЭТФ **94**(12), 921 (2011).
34. F. Fedele and D. Dutykh, Письма ЖЭТФ **95**(12), 703 (2012).
35. F. Fedele and D. Dutykh, J. Fluid Mech. **712**, 646 (2012).
36. F. Fedele and D. Dutykh, ArXiv:1110.3605 (2012).
37. O. Gramstad and K. Trulsen, Phys. Fluids **23**, 062102 (2011).
38. O. Gramstad and K. Trulsen, J. Fluid Mech. **670**, 404 (2011).
39. O. Gramstad, J. Fluid Mech. **740**, 254 (2014).
40. C. Gilson, J. Hietarinta, J. Nimmo, and Y. Ohta, PRE **68**, 016614 (2003).
41. R.H.J. Grimshaw and S.Y. Annenkov, Stud. Appl. Math. **126**, 409 (2011).
42. H. Hasimoto and H. Ono, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 805 (1972).
43. S.J. Hogan, Proc. R. Soc. Lond. A **402**, 359 (1985).

44. S.J. Hogan, *Phys. Fluids* **29**, 3479 (1986).
45. P.A.E.M. Janssen, *J. Fluid Mech.* **126**, 1 (1983).
46. R.S. Johnson, *Proc. R. Soc. Lond. A* **357**, 131 (1977).
47. R.S. Johnson, *J. Fluid Mech.* **455**, 63 (2002).
48. T. Kakutani and K. Michihiro, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 4129 (1983).
49. V.I. Karpman, J.J. Rasmussen, and A.G. Shagalov, *PRE* **64**, 026614 (2001).
50. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
51. E. Lo and C.C. Mei, *J. Fluid Mech.* **150**, 395 (1985).
52. G.M. Muslu and H.A. Erbay, *Math. Comput. Simul.* **67**, 581 (2005).
53. M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F.T. Arecchi, *Phys. Reports* **528**(2), 47 (2013).
54. E.J. Parkes, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 2025 (1987).
55. G.J. Roskes, *Phys. Fluids* **20**, 1576 (1977).
56. I. Selezov, O. Avramenko, C. Kharif, and K. Trulsen, *C. R. Mecanique* **331**, 197 (2003).
57. L. Shemer, A. Sergeeva, and A. Slunyaev, *Phys. Fluids* **22**, 016601 (2010).
58. L. Shemer and L. Alperovich, *Phys. Fluids* **25**, 051701 (2013).
59. A. Slunyaev, E. Pelinovsky, A. Sergeeva, A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, *PRE* **88**, 012909 (2013).
60. A. Slunyaev, G.F. Clauss, M. Klein, and M. Onorato, *Phys. Fluids* **25**, 067105 (2013).
61. M. Stiasnie, *Wave Motion* **6**, 431 (1984).
62. M. Stiasnie and L. Shemer, *J. Fluid Mech.* **143**, 47 (1984).
63. G. Strang, *SIAM J. Numer. Anal.* **5**(3), 506 (1968).
64. M.-Y. Su, *Phys. Fluids* **25**(12), 2167 (1982).
65. R. Thomas, C. Kharif, and M. Manna, *Phys. Fluids* **24**, 127102 (2012).
66. K. Trulsen and K.B. Dysthe, *Wave Motion* **24**, 281 (1996).
67. K. Trulsen, I. Kliakhandler, K.B. Dysthe, and M.G. Velarde, *Phys. Fluids* **12**(10), 2432 (2000).
68. S.K. Turitsyn, B.G. Bale, and M.P. Fedoruk, *Phys. Reports* **521**, 135 (2012).
69. H. Yoshida, *Phys. Lett. A* **150**, 262 (1990).
70. H.C. Yuen and B.M. Lake, *Phys. Fluids* **18**(8), 956 (1975).
71. H. Yuen and B. Lake, *Adv. Appl. Mech.* **22**, 229 (1982).
72. V.E. Zakharov and L.A. Ostrovsky, *Physica D* **238**, 540 (2009).
73. V.E. Zakharov and A.I. Dyachenko, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **29**, 127 (2010).

Одержано 30.10.14

*И.С. Гандэжа, Ю.В. Седлецкий, Д.С. Дутык*

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ  
ШРЕДИНГЕРА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА  
ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ МЕДЛЕННО  
МОДУЛИРОВАННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ  
ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ  
ГЛУБИНЫ И ЕГО КВАЗИСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Резюме

Рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера высшего порядка, выведенное раньше Ю.В. Седлецким [УФЖ **48**(1), 82 (2003)] для огибающей первой гармоники медленно модулированных гравитационных волн на поверхности безвихревой, невязкой и несжимаемой жидкости с конечной глубиной и плоским дном. Это уравнение учитывает дисперсию третьего порядка и кубические нелинейно-дисперсионные слагаемые. В данной работе оно приведено к безразмерной форме, в которой фигурирует лишь один безразмерный параметр  $kh$ , где  $k$  – волновое число несущей волны, а  $h$  – невозмущенная глубина жидкости. Показано, что при учете слагаемых высшего порядка односолитонные решения классического нелинейного уравнения Шредингера преобразуются в квазисолитонные решения с медленно меняющейся амплитудой. Эти квазисолитонные решения представляют вторичные модуляции гравитационных волн.

*I.S. Gandzha, Yu.V. Sedletsy, D.S. Dutykh*

HIGH-ORDER NONLINEAR  
SCHRÖDINGER EQUATION FOR THE ENVELOPE  
OF SLOWLY MODULATED GRAVITY WAVES  
ON THE SURFACE OF FINITE-DEPTH FLUID  
AND ITS QUASI-SOLITON SOLUTIONS

Summary

We consider the high-order nonlinear Schrödinger equation derived earlier by Sedletsy [Ukr. J. Phys. **48**(1), 82 (2003)] for the first-harmonic envelope of slowly modulated gravity waves on the surface of finite-depth irrotational, inviscid, and incompressible fluid with flat bottom. This equation takes into account the third-order dispersion and cubic nonlinear dispersive terms. We rewrite this equation in dimensionless form featuring only one dimensionless parameter  $kh$ , where  $k$  is the carrier wavenumber and  $h$  is the undisturbed fluid depth. We show that one-soliton solutions of the classical nonlinear Schrödinger equation are transformed into quasi-soliton solutions with slowly varying amplitude when the high-order terms are taken into consideration. These quasi-soliton solutions represent the secondary modulations of gravity waves.