

О.П. ЛЕЛЯКОВ, А.С. КАРПЕНКО, Р.-Д.О. БАБАДЖАН

Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського
(Просп. Вернадського 4, Сімферополь, 95007; e-mail: lelyakov@crimea.edu)

**РОЗПОДІЛ ПОТЕНЦІАЛУ СКАЛЯРНОГО
ПОЛЯ ДЛЯ “РОЗМАЗАНОЇ” ЗАМКНЕНОЇ
НУЛЬ-СТРУНИ, ЯКА ПРЯМУЄ В ПЛОЩИНІ $z = 0$**

УДК 539.391+517.764.2

У роботі запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу скалярного поля для “розмазаної” нуль-струни, яка колапсує в площині $z = 0$, а також для “розмазаної” нуль-струни, яка розширюється в площині $z = 0$. Знайдені умови, за яких компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля, при стисканні поля в одновимірний об’єкт (коло змінного радіуса) асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни, що прямує за тією самою траєкторією.

Ключові слова: потенціал скалярного поля, “розмазана” нуль-струна, тензор енергії-імпульсу.

1. Вступ

За сучасними уявленнями космічні струни, які є одновимірними областями концентрації щільності енергії, могли природно виникати в результаті спонтанного порушення симетрії при фазових переходах у процесі еволюції Всесвіту [1–7]. У рамках різних моделей Теорії Великого Об’єднання вони є топологічними дефектами разом з доменними стінками і монополями. У роботі [8] було показано, що наявність таких об’єктів у Всесвіті не суперечить мікрохвильовому реліктовому випромінюванню, що спостерігається, так само не виключено, що ці об’єкти могли зберегтися до сучасної епохи і, отже, можуть спостерігатися [9, 10]. Нуль-струни реалізують границю нульового натягу в теорії струн [5, 7]. Останніми роками широко обговорюються деякі можливості застосування нуль-струн у космології. Так, наприклад, у роботі [11] було показано, що розглядаючи газ нуль-струн, як домінуюче джерело гравітації в D -вимірних просторах Фрідмана–Робертсона–Уокера з $k = 0$, можна описати механізм інфляції, характерний для

цих просторів, у низці робіт газ реліктових нуль-струн розглядається як один з можливих кандидатів на роль носія так званої “темної” матерії, існування якої у Всесвіті можна вважати встановленим фактом. І хоча об’єктом дослідження в наведених прикладах є вже не відокремлена нуль-струна, а газ нуль-струн, властивості цього газу ще залишаються неясними. На наш погляд, першим кроком до розуміння властивостей газу нуль-струн можуть стати задачі про гравітаційне поле, яке породжує нуль-струна, що прямує за різними траєкторіями.

Компоненти тензора енергії-імпульсу для нуль-струни мають такий вигляд [11]:

$$T^{mn}\sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} \delta^4(x^l - x^l(\tau, \sigma)), \quad (1)$$

де індекси m, n, l набувають значень 0, 1, 2, 3, функції $x^m = x^m(\tau, \sigma)$ визначають траєкторію руху нуль-струни, τ і σ – параметри на світовій поверхні нуль-струни, $x^m_{,\tau} = \partial x^m / \partial \tau$, $g = |g_{mn}|$, g_{mn} – метричний тензор зовнішнього простору, $\gamma = \text{const}$.

У циліндричній системі координат

$$x^0 = t, \quad x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z,$$

функції $x^m(\tau, \sigma)$, які визначають траєкторії руху замкненої нуль-струни, що розглядалися в роботі, мають такий вигляд:

$$t = \tau, \quad \rho = \mp \tau, \quad \theta = \sigma, \quad z = 0, \quad (2)$$

де знак “ $_$ ” відповідає випадку колапсу нуль-струни в площині $z = 0$ і для нього параметр $\tau \in (-\infty, 0]$, а знак “ $+$ ” відповідає випадку радіального розширення нуль-струни в площині $z = 0$ і для нього $\tau \in [0, +\infty)$.

Оскільки, для кожної із траєкторій (2) усі напрямки на гіперповерхнях $z = \text{const}$ еквівалентні, то метричні функції $g_{mn} = g_{mn}(t, \rho, z)$, тоді, використовуючи інваріантність квадратичної форми щодо інверсії θ на $-\theta$, одержуємо $g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0$. Так само можна помітити, що квадратична форма простору-часу повинна бути інваріантна щодо інверсії $z \rightarrow -z$, тоді

$$g_{mn}(t, \rho, z) = g_{mn}(t, \rho, -z). \quad (3)$$

Наслідком (3) є $g_{03} = g_{31} = 0$. Остаточо, використовуючи свободу вибору систем координат у ЗТВ, частково зафіксуємо її вимогою $g_{01} = 0$. Таким чином, квадратична форма для задачі, що розв’язується, може бути подана так

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (4)$$

де ν, μ, A, B – функції змінних t, ρ, z .

Компоненти тензора енергії-імпульсу для безмасового поля повинні задовольняти рівність

$$T_\alpha^\alpha = 0. \quad (5)$$

Для (1), (2), (4) рівність (5) набуває вигляду

$$T_0^0 + T_1^1 = \gamma \frac{e^{-(\nu+\mu)}}{\sqrt{AB}} \{e^{2\nu} - A\} \delta(z)\delta(\eta) = 0, \quad (6)$$

де

$$\eta = t \pm \rho, \quad (7)$$

знак “ $+$ ” відповідає випадку колапсу нуль-струни в площині $z = 0$, а знак “ $_$ ” – випадку радіального розширення нуль-струни в площині $z = 0$.

З рівності (6) випливає

$$e^{2\nu} \equiv A. \quad (8)$$

Аналізуючи систему рівнянь Ейнштейна, побудовану для (1), (2), (4), (8), можна визначити залежність метричних функцій, а саме:

$$\nu = \nu(\eta, z), \quad B = B(\eta, z), \quad \mu = \mu(\eta, z), \quad (9)$$

при цьому, сама система Ейнштейна зводиться до таких рівнянь:

$$\frac{B_{,\eta\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta\eta} - 2\nu_{,\eta} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} \right)^2 + 2(\mu_{,\eta})^2 = -2\chi T_{00}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{B_{,\eta}}{B} \right)_{,\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} \right)^2 + \frac{B_{,\eta}}{B} (2\nu_{,\eta} - \mu_{,\eta}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{B} + 2\nu_{,\eta z} - \nu_{,\eta} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) - \frac{1}{2} \frac{B_{,\eta}}{B} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) = 0, \quad (12)$$

$$2\nu_{,\eta z z} + 4(\nu_{,\eta z})^2 + \nu_{,\eta z} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} - 2\mu_{,\eta} \right) = 0, \quad (13)$$

$$(\nu_{,\eta z})^2 + \nu_{,\eta z} \frac{B_{,\eta z}}{B} = 0, \quad (14)$$

де $T_{00} = \gamma \frac{e^{2\nu-\mu}}{\sqrt{B}} \delta(\eta)\delta(z)$.

Доповнимо систему рівнянь Ейнштейна (10)–(14) рівняннями руху нуль-струни, які в псевдорімановому просторі-часі визначаються такою системою рівнянь:

$$x_{,\tau\tau}^m + \Gamma_{pq}^m x_{,\tau}^p x_{,\tau}^q = 0, \quad (15)$$

$$g_{mn} x_{,\tau}^m x_{,\tau}^n = 0, \quad g_{mn} x_{,\tau}^m x_{,\sigma}^n = 0, \quad (16)$$

де Γ_{pq}^m – символи Кристофеля. Розписуючи рівняння руху нуль-струни (15), (16) для (4), (8), (9), можна безпосередньо показати, що для функцій, які визначають траєкторії руху (2), усі рівняння руху нуль-струни виконуються тотожно, тобто ці траєкторії руху дійсно реалізуються і не змінюються гравітаційним полем самих нуль-струн.

Для (8), (9) квадратична форма (4) набуває вигляду

$$dS^2 = e^{2\nu} ((dt)^2 - (d\rho)^2) - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (17)$$

де $\nu = \nu(\eta, z), B = B(\eta, z), \mu = \mu(\eta, z)$.

Як впливає із системи рівнянь (10)–(14) поза струною, тобто при $\eta \neq 0, z \neq 0$, усі компоненти струнного тензора енергії-імпульсу тотожно дорівнюють нулю, а відмінні від нуля (прямують до нескінченності) безпосередньо на струні, що дає можливість досліджувати систему рівнянь Ейнштейна у двох напрямках:

1. Обмежитися аналізом “зовнішньої” задачі, тобто в області, для якої компоненти тензора енергії-імпульсу (праві частини рівнянь Ейнштейна) дорівнюють нулю.

2. Розглядати компоненти струнного тензора енергії-імпульсу, як границю деякого “розмазаного” розподілу та провести аналіз рівнянь Ейнштейна для цього “розмазаного” розподілу. Можна показати, що аналіз “зовнішньої” задачі приводить до великої кількості вакуумних розв’язків рівнянь Ейнштейна, які задовольняють симетрії задачі. Так, наприклад, легко перевірити, що функції

$$e^{2\nu} = e^{2\mu} = 1, \quad B = z^2,$$

або функції

$$e^{2\nu} = |\beta_\eta|, \quad e^{2\mu} = (\beta(\eta))^2, \quad B = (\beta(\eta) \cdot z)^2,$$

де $\beta(\eta)$ – довільна функція, є зовнішніми розв’язками системи рівнянь (10)–(14). Однак, неясними залишаються критерії, що дозволяють вибрати із цієї сукупності єдиний розв’язок, що описує гравітаційне поле нуль-струни.

При спробі розглядати компоненти струнного тензора енергії-імпульсу як границю деякого “розмазаного” розподілу, наприклад, проста заміна дельта-функцій у тензорі енергії-імпульсу відповідними дельта-функційними послідовностями, можливі неточності, пов’язані з тим, що незрозуміло як враховувати можливу появу доданків (множників), які прямують до нуля (константи) при стягуванні цього “розмазаного” розподілу в одновимірний об’єкт. Тому, простіше із самого початку розглядати деякий “добре визначений”, “розмазаний” розподіл, наприклад, дійсне безмасове скалярне поле (оскільки, ми розглядаємо скалярний нуль об’єкт), а потім стягти його в струну необхідної конфігурації, вимагаючи при цьому, щоб компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля асимптотично збіглися з компонентами нуль-струнного тензора енергії-імпульсу.

552

2. Система рівнянь

Ейнштейна для “розмазаної” задачі

Компоненти тензора енергії-імпульсу для дійсного безмасового скалярного поля мають такий вигляд [2]:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L, \quad (18)$$

де $L = g^{\omega\lambda}\varphi_{,\omega}\varphi_{,\lambda}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial x^\alpha$, φ – потенціал скалярного поля, індекси $\alpha, \beta, \omega, \lambda$ набувають значень 0, 1, 2, 3. Для того, щоб забезпечити самоузгодженість рівнянь Ейнштейна для (17), (18), будемо вимагати

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, z) \rightarrow \varphi = \varphi(\eta, z). \quad (19)$$

Розписуючи (18) для (17), (19), одержуємо

$$\begin{aligned} T_{00} &= (\varphi_{,\eta})^2 + \frac{e^{2(\nu-\mu)}}{2}(\varphi_{,z})^2, \\ T_{03} &= \pm T_{13} = \varphi_{,\eta}\varphi_{,z}, \\ T_{11} &= (\varphi_{,\eta})^2 - \frac{e^{2(\nu-\mu)}}{2}(\varphi_{,z})^2, \\ T_{01} &= \pm(\varphi_{,\eta})^2, \\ T_{33} &= \frac{1}{2}(\varphi_{,z})^2, \\ T_{22} &= -\frac{Be^{-2\mu}}{2}(\varphi_{,z})^2, \end{aligned} \quad (20)$$

де знак “+” відповідає випадку колапсу, а знак “–” – випадку розширення нуль-струни.

Система рівнянь Ейнштейна для (17), (20) може бути представлена в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{B_{,\eta\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta\eta} - 2\nu_{,\eta} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} \right)^2 + 2(\mu_{,\eta})^2 = -2\chi(\varphi_{,\eta})^2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left(\frac{B_{,z}}{B} \right)_{,z} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{,z}}{B} \right)^2 + \frac{B_{,z}}{B} (2\nu_{,z} - \mu_{,z}) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_{,\eta z}}{B} + 2\nu_{,\eta z} - \nu_{,z} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{B_{,z}}{B} \left(\frac{B_{,\eta}}{B} + 2\mu_{,\eta} \right) = -2\chi\varphi_{,\eta}\varphi_{,z}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$2\nu_{,zz} + 4(\nu_{,z})^2 + \nu_{,z} \left(\frac{B_{,z}}{B} - 2\mu_{,z} \right) = 0, \quad (24)$$

$$(\nu, z)^2 + \nu, z \frac{B, z}{B} = \frac{\chi}{2} (\varphi, z)^2. \quad (25)$$

Якщо розглядати систему рівнянь (21)–(25) для розподілу скалярного поля, вже сконцентрованому усередині “тонкого” кільця, для якого змінні η (яка визначена (7)) і z набувають значень в інтервалі

$$\eta \in [-\Delta\eta, \Delta\eta], z \in [-\Delta z, \Delta z], \quad (26)$$

де $\Delta\eta$ і Δz – малі позитивні константи, що визначають “товщину” кільця, тобто

$$\Delta\eta \ll 1, \quad \Delta z \ll 1, \quad (27)$$

і за подальшого стискання такого “тонкого” кільця в одновимірний об’єкт (нуль-струну)

$$\Delta\eta \rightarrow 0, \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (28)$$

то простір, в якому перебуває така “розмазана” нуль-струна, і для якого змінні η та z набувають значень в інтервалі $\eta \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$, умовно можна розбити на три області:

– область I , для якої

$$\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (\Delta\eta, +\infty), z \in (-\infty, +\infty), \quad (29)$$

– область II , для якої

$$\eta \in [-\Delta\eta, +\Delta\eta], z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty), \quad (30)$$

– область III , для якої

$$\eta \in [-\Delta\eta, \Delta\eta], z \in [-\Delta z, \Delta z]. \quad (31)$$

Оскільки при стягуванні скалярного поля в струну система рівнянь (21)–(25) для скалярного поля повинна асимптотично збігтися з системою для замкненої нуль-струни (10)–(14), то в області (29), (30) (область I і II)

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \varphi, z \rightarrow 0, \quad \varphi, \eta \rightarrow 0, \quad (32)$$

а в області (31) (усередині “тонкого” кільця) у загальному випадку

$$\frac{\varphi_{I,II}}{\varphi_{III}} \leq 1, \quad \frac{(\varphi, z)_{I,II}}{(\varphi, z)_{III}} \leq 1, \quad \frac{(\varphi, \eta)_{I,II}}{(\varphi, \eta)_{III}} \leq 1, \quad (33)$$

де $\varphi_{I,II}$ – значення потенціалу скалярного поля в області I і II , φ_{III} – значення потенціалу скалярного поля в області III (усередині “тонкого” кільця), знак рівності реалізується на границі областей.

Порівнюючи систему рівнянь (10)–(14) для замкненої нуль-струни із системою (21)–(25), можна зробити висновок про те, що при стягуванні скалярного поля в струну, тобто при $\Delta\eta \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (\varphi, z)^2|_{z \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} &\rightarrow 0, & (\varphi, \eta)^2|_{z \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} &\rightarrow \infty, \\ (\varphi, z \varphi, \eta)|_{z \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (34)$$

В області I , згідно з (32), за будь-якого фіксованого значення $\eta = \eta_0 \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)$ і для всіх значень $z \in (-\infty, +\infty)$ потенціал скалярного поля:

$$\varphi(\eta_0, z) \rightarrow 0, \quad (35)$$

якщо ж розглядати розподіл потенціалу скалярного поля при будь-якому фіксованому значенні $\eta = \eta_0 \in [-\Delta\eta, \Delta\eta]$ (область II і III), то у випадку, коли $z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)$ (область II), повинно бути виконано

$$\varphi(\eta_0, z) \rightarrow 0, \quad (36)$$

а при $z \in [-\Delta z, \Delta z]$ (область III)

$$\frac{\varphi(\eta_0, z)_{III}}{\varphi(\eta_0, z)_{II}} > 1. \quad (37)$$

3. Розподіл потенціалу скалярного поля для “розмазаної” нуль-струни

Для отриманих умов (35)–(37) розподіл потенціалу скалярного поля зручно подати у вигляді

$$\varphi(\eta, z) = \ln \left(\frac{1}{\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)} \right), \quad (38)$$

де функції $\alpha(\eta)$ і $\lambda(\eta)$ симетричні відносно інверсії η на $-\eta$, тобто

$$\alpha(\eta) = \alpha(-\eta), \quad \lambda(\eta) = \lambda(-\eta), \quad (39)$$

функція $\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z)$ обмежена

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z) \leq 1, \quad (40)$$

а потенціал скалярного поля (38), згідно з (40), може набувати значень від

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z) \rightarrow 1, \quad (41)$$

і до

$$\varphi \rightarrow \infty, \quad \text{при} \quad \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z) \rightarrow 0, \quad (42)$$

причому в області I , відповідно до (35), (41)

$$\alpha(\eta) \rightarrow 1, \quad \lambda(\eta) \rightarrow 0. \quad (43)$$

Оскільки, згідно з (36) потенціал скалярного поля в області II прямує до нуля, то при $\eta \in [-\Delta\eta, \Delta\eta]$ і будь-якому фіксованому значенні $z = z_0 \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)$, повинно бути виконано

$$\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z_0) \rightarrow 1. \quad (44)$$

В області III для тих самих значень $\eta \in [-\Delta\eta, \Delta\eta]$ і при $z = z_0 \in [-\Delta z, \Delta z]$

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z_0) < 1. \quad (45)$$

З (44) випливає, що для всіх $z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)$ значення функції $f(z)$ прямують до константи

$$f(z)|_{z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)} \rightarrow f_0 = \text{const}, \quad (46)$$

причому $f_0 \neq 0$, а функції $\alpha(\eta)$ і $\lambda(\eta)$ зв'язані між собою

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{f_0} (1 - \alpha(\eta)). \quad (47)$$

Підставляючи (47) в (45), одержуємо, що в області III :

$$0 < \alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta)) \frac{f(z_0)}{f_0} < 1, \quad (48)$$

тоді з рівностей (42), (48) випливає, що при $\varphi \rightarrow \infty$

$$\alpha(\eta) \rightarrow 0, \quad f(z) \rightarrow 0. \quad (49)$$

Таким чином, у виразі для потенціалу скалярного поля (38) функції $\alpha(\eta)$ і $f(z)$ обмежені та для всіх $z \in (-\infty, +\infty)$ і $\eta \in (-\infty, +\infty)$ набувають значень

$$0 < \alpha(\eta) < 1, \quad 0 < f(z) < f_0, \quad (50)$$

причому в області I , згідно з (43), функція

$$\alpha(\eta)|_{\eta \in (-\infty, -\Delta\eta) \cup (+\Delta\eta, +\infty)} \rightarrow 1, \quad (51)$$

а з (49), з урахуванням симетричності функції $\alpha(\eta)$ (рівності (39)), випливає

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) \rightarrow 0. \quad (52)$$

554

Розподіл для функції $f(z)$, при $z \in (-\infty, -\Delta z) \cup (\Delta z, +\infty)$, визначається рівністю (46), а при $z \rightarrow 0$, згідно з (49)

$$f(z)|_{z \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (53)$$

Диференціюючи (38), з урахуванням (47), одержуємо

$$\varphi_{,\eta} = -\frac{\alpha_{,\eta}(1 - f(z)/f_0)}{\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0}, \quad (54)$$

$$\varphi_{,z} = -\frac{(1 - \alpha(\eta))f_{,z}/f_0}{\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0}.$$

Використовуючи (43), (44), (46) для (54), одержуємо, що в області I і II $\varphi_{,z} \rightarrow 0$, $\varphi_{,\eta} \rightarrow 0$, що збігається з (32). В області III при $z \rightarrow 0$, з урахуванням (53), першу з рівностей (54) можна подати у вигляді

$$\varphi_{,\eta} = -\alpha_{,\eta}/\alpha(\eta), \quad (55)$$

звідки, згідно з (34), при $\Delta\eta \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$

$$|\alpha_{,\eta}/\alpha(\eta)|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Другу з рівностей (54), при $\eta \rightarrow 0$, з урахуванням (52), можна подати у вигляді:

$$\varphi_{,z} = -f_{,z}/f(z), \quad (57)$$

звідки при $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta\eta \rightarrow 0$, згідно з (34)

$$f_{,z}/f(z)|_{z \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (58)$$

З іншого боку, розглядаючи рівності (54) у деякому малому околі кола, $\eta = 0$, $z = 0$, тобто всередині області, де сконцентроване скалярне поле, і для якої, відповідно до (52), (53) $f(z)/f_0 \ll 1$, $\alpha(\eta) \ll 1$ можна записати:

$$\varphi_{,z}\varphi_{,\eta} = \frac{(\alpha_{,\eta}/\alpha(\eta)) (f_{,z}/f(z))}{\left(1 + \frac{1}{f_0} \frac{f(z)}{\alpha(\eta)}\right) \left(1 + f_0 \frac{\alpha(\eta)}{f(z)}\right)}, \quad (59)$$

тоді, згідно з (34), при $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta\eta \rightarrow 0$ повинно бути виконано

$$\left(\frac{\alpha_{,\eta}}{\alpha(\eta)}\right) \left(\frac{f_{,z}}{f(z)}\right) \Big|_{z \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (60)$$

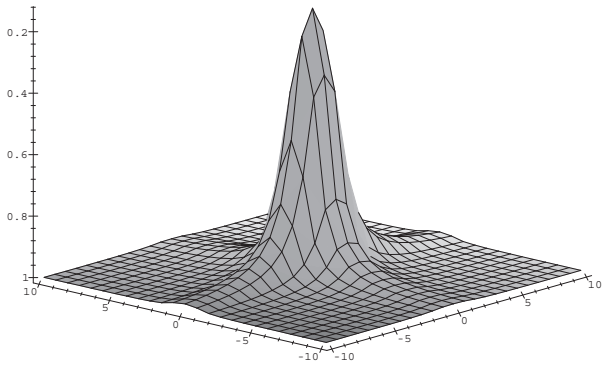


Рис. 1. Розподіли функції $\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0$ для (61), (62) при $\epsilon = 0,01$, $\xi = \zeta = 1$, $\gamma = 4$, тут $\eta \in [-10, 10]$, $z \in [-10, 10]$

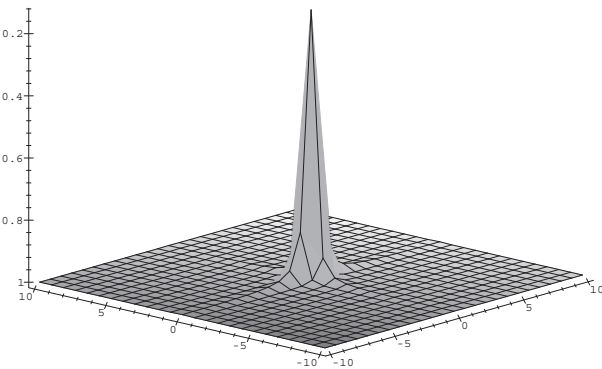


Рис. 2. Розподіли функції $\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0$ для (61), (62) при $\epsilon = 0,01$, $\xi = \zeta = 4$, $\gamma = 4$, тут $\eta \in [-10, 10]$, $z \in [-10, 10]$

Як приклад можна навести такий вибір функцій $\alpha(\eta)$ і $f(z)$, які задовольняють знайдені умови:

$$\alpha(\eta) = \exp\left(\frac{-1}{\epsilon + (\xi\eta)^2}\right), \quad (61)$$

$$f(z) = f_0 \exp\left(-\gamma \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{(\zeta z)^2}\right)\right)\right), \quad (62)$$

де константи ξ і ζ визначають розмір (“товщину”) кільця, усередині якого сконцентроване скалярне поле, за змінними η і z , відповідно, а саме, як впливає з (61), (62), при $\Delta\eta \rightarrow 0$ $\Delta z \rightarrow 0$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (63)$$

а позитивні константи ϵ і γ забезпечують виконання умов (52), (53), (56), (58), при $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta\eta \rightarrow 0$,

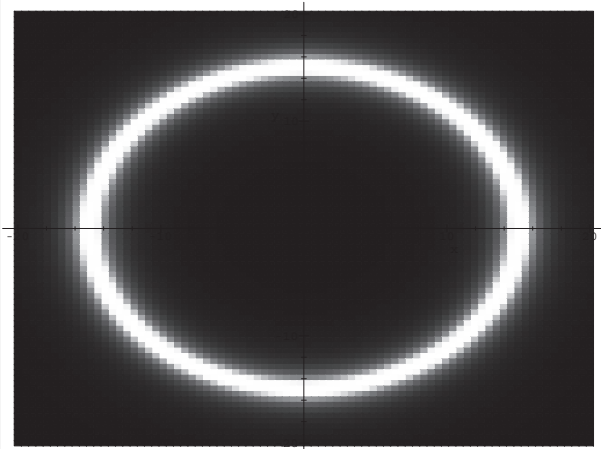


Рис. 3. Розподіл потенціалу скалярного поля для $\eta = t + \rho$, $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = \zeta = 0,6$, що задається (38), (61), (62), за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$) при фіксованому значенні $t = -15$

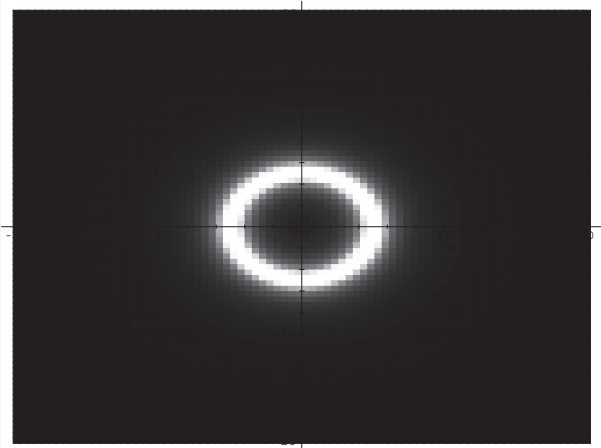


Рис. 4. Розподіл потенціалу скалярного поля для $\eta = t + \rho$, $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = \zeta = 0,6$, що задається (38), (61), (62), за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$) при фіксованому значенні $t = -5$

$z \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, а саме, при $\Delta\eta \ll 1$ $\Delta z \ll 1$

$$\epsilon \ll 1, \quad \gamma \gg 1, \quad (64)$$

а за подальшого стискання в одновимірний об’єкт (нуль-струну), тобто при $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta\eta \rightarrow 0$

$$\epsilon \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (65)$$

Використовуючи (47), (61), (62) для (38), одержуємо вираз для одного з можливих розподілів

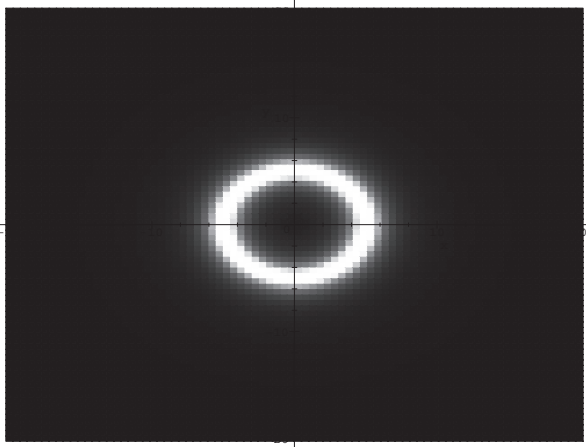


Рис. 5. Розподіл потенціалу скалярного поля для $\eta = t - \rho$, $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = \zeta = 0,6$, що задається (38), (61), (62), за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$) при фіксованому значенні $t = 5$

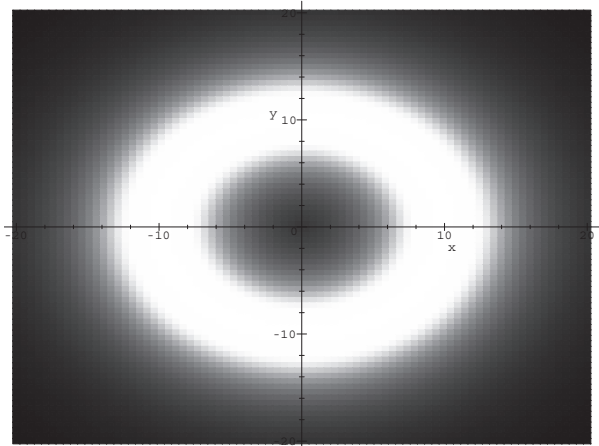


Рис. 7. Розподіл потенціалу скалярного поля для $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, що задається (38), (61), (62), при $t = -10$ для $\eta = t + \rho$ і при $t = 10$ для $\eta = t - \rho$, за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$), при фіксованому значенні $\xi = \zeta = 0,2$

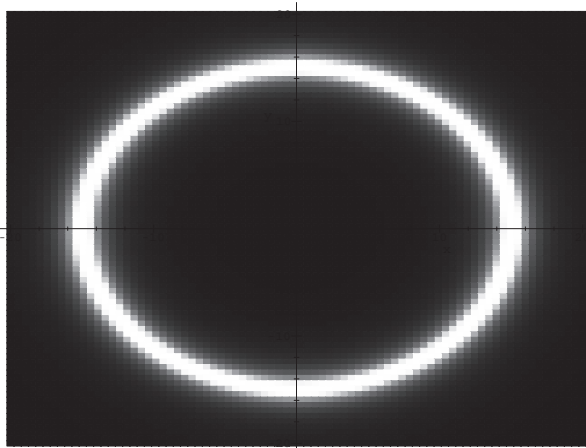


Рис. 6. Розподіл потенціалу скалярного поля для $\eta = t - \rho$, $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, $\xi = \zeta = 0,6$, що задається (38), (61), (62), за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$) при фіксованому значенні $t = 15$

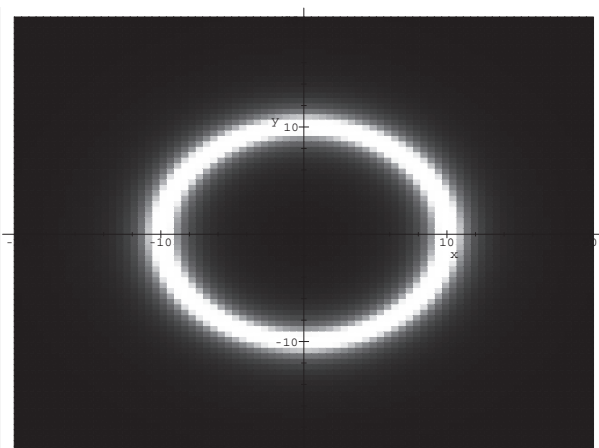


Рис. 8. Розподіл потенціалу скалярного поля для $z = 0,01$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, що задається (38), (61), (62), при $t = -10$ для $\eta = t + \rho$ і при $t = 10$ для $\eta = t - \rho$, за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$), при фіксованому значенні $\xi = \zeta = 0,6$

потенціалу дійсного безмасового скалярного поля, компоненти тензора енергії-імпульсу для якого при стисканні в одновимірний об'єкт асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни, яка прямує траєкторіями (2), (3).

На рис. 1, 2 подано розподіл функції $\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0$ в області $\eta \in [-10, 10]$, $z \in [-10, 10]$ для функцій $\alpha(\eta)$, $f(z)$, заданих рівностями (61), (62), при $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, що відповідають вибору значень констант: рис. 1 – $\xi = \zeta = 1$; рис. 2 –

$\xi = \zeta = 4$. Із даних рисунків видно, що зі збільшенням значень констант ξ , ζ , область, у якій функція $\alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(z)/f_0$ відмінна від одиниці (тобто область, в якій сконцентроване скалярне поле, і потенціал скалярного поля, суттєво відмінний від нуля), стискається, чому відповідає зменшення “товщини” кільця, в якому сконцентроване скалярне поле.

На рис. 3, 4 (для функцій $\alpha(\eta)$ і $f(z)$, заданих рівностями (61), (62), випадку $\eta = t + \rho$) представлений розподіл скалярного поля для двох фіксова-

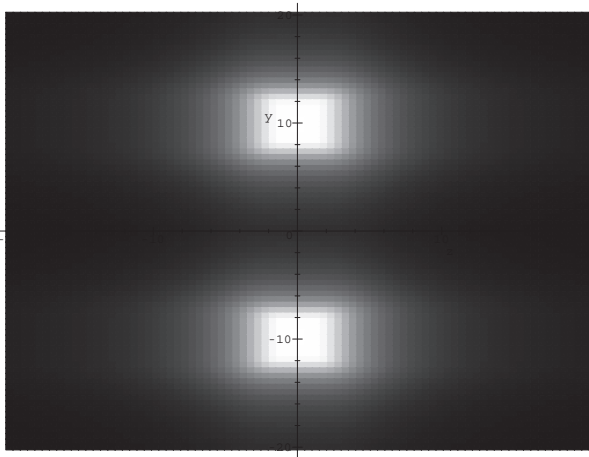


Рис. 9. Розподіл потенціалу скалярного поля для $z \in [-10, 10]$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, що задається (38), (61), (62), при $t = -10$ для $\eta = t + \rho$ і при $t = 10$ для $\eta = t - \rho$, на поверхні $\theta = \text{const}$, за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$), при фіксованому значенні $\xi = \zeta = 0,2$

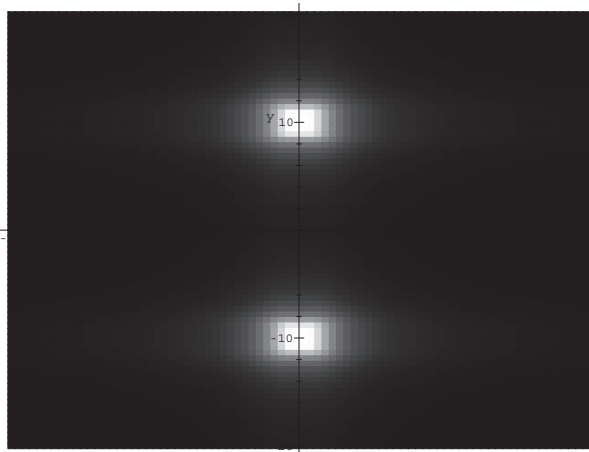


Рис. 10. Розподіл потенціалу скалярного поля для $z \in [-10, 10]$, $\epsilon = 0,01$, $\gamma = 4$, що задається (38), (61), (62), при $t = -10$ для $\eta = t + \rho$ і при $t = 10$ для $\eta = t - \rho$, на поверхні $\theta = \text{const}$, за змінною ρ ($\rho \in [0, 20]$), при фіксованому значенні $\xi = \zeta = 0,6$

них значень часу t : $t = -15$ і $t = -5$, відповідно. З наведених рисунків безпосередньо випливає, що зі збільшенням значень змінної t радіус “розмазаної” нуль-струни зменшується (нуль-струна колапсує в площині $z = 0$). Тут чорним кольором виділена область, в якій $\varphi \rightarrow 0$.

На рис. 5, 6 (для випадку $\eta = t - \rho$, $t \in [0, +\infty)$) наведений розподіл скалярного поля для двох фі-

ксованих значень часу t : $t = 5$ і $t = 15$, відповідно. З наведених рисунків випливає, що зі збільшенням значень змінної t радіус “розмазаної” нуль-струни збільшується (нуль-струна радіально розширюється в площині $z = 0$).

На рис. 7, 8 і рис. 9, 10, для функцій $\alpha(\eta)$ і $f(z)$, заданих рівностями (61), (62), наведені розподіли потенціалу скалярного поля (38) при фіксованих значеннях змінних t , z і θ , відповідно. З наведених рисунків випливає, що при збільшенні значень констант ξ і ζ , область, в якій потенціал скалярного поля суттєво відмінний від нуля, звужується, тобто зменшується “товщина” кільця, у якому сконцентровано скалярне поле.

4. Висновки

У наведеній роботі, порівнюючи системи рівнянь Ейнштейна для розподілу дійсного, безмасового скалярного поля, яке сконцентровано усередині тонкого кільця із системою рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни, яка колапсує в площині $z = 0$, а також для нуль-струни, яка розширюється в площині $z = 0$, ми одержали умови на потенціал скалярного поля, за яких, при стиранні скалярного поля в одновимірний об’єкт (коло змінного радіуса) компоненти тензора енергії-імпульсу скалярного поля асимптотично збігаються з компонентами тензора енергії-імпульсу замкненої нуль-струни. Так само запропоновано загальний вигляд розподілу потенціалу, що описує рух скалярного поля, сконцентрованого усередині тонкого кільця, у випадках, коли воно колапсує в площині $z = 0$ і розширюється в площині $z = 0$.

Наведено приклад розподілу потенціалу скалярного поля, який задовольняє знайдені умови.

1. P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
2. А.Д. Линде, *Физика элементарных частиц и космология* (Наука, Москва, 1990).
3. T. Vachaspati and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
4. A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic String and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
5. T.W.B. Kibble and M.B. Hindmarsh, arXiv: hep-th/9411342.
6. D.P. Bennet, *Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

7. A. Schild, Phys. Rev. D **16**, 1722 (1977).
8. C.T. Hill, D.N. Schramm, and J.N. Fry, Commun. Nucl. Part. Phys. **19**, 25 (1999).
9. M.V. Sazhin, O.S. Khovanskaya, M. Caraccioli, G. Longo, J.M. Alcala, R. Silvotti, and M.V. Pavlov, arXiv: astro-ph/0406516.
10. R. Schild, I.S. Masnyak, B.I. Hnatyk, and V.I. Zhdanov, arXiv: astro-ph/0406434.
11. S.N. Roshchupkin and A.A. Zheltukhin, Class. Quant. Grav. **12**, 2519 (1995).

Одержано 30.10.13

А.П. Леляков, А.С. Карпенко, Р.-Д.А. Бабаджан

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКАЛЯРНОГО
ПОЛЯ ДЛЯ “РАЗМАЗАННОЙ” НУЛЬ-СТРУНЫ,
ДВИЖУЩЕЙСЯ В ПЛОСКОСТИ $z = 0$

Резюме

В работе предложен общий вид распределения потенциала скалярного поля для “размазанной” нуль-струны, коллапсирующей в плоскости $z = 0$, а также для “размазанной” нуль-струны, радиально расширяющейся в плоскости $z = 0$. Най-

дены условия, при которых в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (окружность, радиус которой зависит от времени), компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны, движущейся по той же траектории.

O.P. Lelyakov, A.S. Karpenko, R.-D.O. Babadzhan

SCALAR-FIELD POTENTIAL
DISTRIBUTION FOR A CLOSED “THICK” NULL
STRING MOVING IN THE PLANE $z = 0$

S u m m a r y

A general form for the scalar-field potential distribution has been proposed for a closed “thick” null string either collapsing or expanding in the plane $z = 0$. Conditions, under which the energy-momentum tensor components for a scalar field that contracts into a one-dimensional object (a circle with a varying radius) asymptotically coincide with those for a closed null string moving along the same trajectory, have been found.