

М.В. СТРИХА

Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України  
(Просп. Науки, 41, Київ 03680; e-mail: maksym\_strikha@hotmail.com)

## ЧАСТОТНІ МЕЖІ ДЛЯ ГРАФЕНОВОГО ПРОВІДНОГО КАНАЛУ, ЗУМОВЛЕНІ НАЯВНІСТЮ КВАНТОВОЇ ЄМНОСТІ ТА КІНЕТИЧНОЇ ІНДУКТИВНОСТІ

УДК 539

На основі аналізу кінетичного рівняння Больцмана для мезосистем показано, що при розгляді динамічної провідності графенового каналу слід додатково враховувати квантову ємність і кінетичну індуктивність, які є аналогами електростатичної ємності і магнітної індуктивності, але мають іншу фізичну природу. Врахування наявності квантової ємності й кінетичної індуктивності призводить до появи максимуму імпедансу. У випадку, коли графеновий канал є ідеальним резистором Ландауера, який електрон проходить без розсіяння, цей максимум відповідає терагерцовому діапазону (і отже, ефект не погіршує частотних характеристик польових графенових транзисторів, які працюють у гігагерцовому діапазоні). Однак для масивних графенових каналів, вироцених методом осаджування з парової фази, де транспорт електронів має дифузійну природу, максимум відповідає кілогерцовому або мегагерцовому діапазону (залежно від рухливості носіїв і довжини каналу).

**Ключові слова:** графеновий провідний канал, кінетичне рівняння Больцмана, квантова ємність, кінетична індуктивність.

Динамічна провідність квантових наносистем є важливою теоретичною задачею для наноелектроніки (див., наприклад, [1]; виклад основних положень і підходів цієї запропонованої С. Датта концепції розгляду явищ наноелектроніки в підході “знизу-вгору” можна знайти у серії оглядово-методологічних статей Ю.М. Кругляка і М.В. Стрихи, які друкувалися в журналі “Сенсорна електроніка і мікросистемні технології”, починаючи з №4 за 2012 рік [2] і закінчуючи № 1 за 2015 рік).

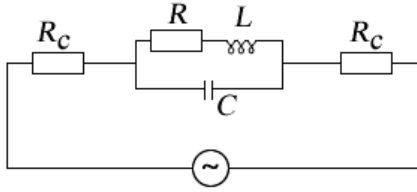
Існує велика кількість робіт, присвячених провідності металічних вуглецевих нанотрубок з використанням теорії рідини Латтінджера (див., наприклад, [3–5]). Однак ця теорія накладає жорсткі обмеження на аналізовані системи, й тому в [6] було побудовано загальну теорію з використанням формалізму мод провідності (див., наприклад, [1, 2]), застосовну для систем різної розмірності – від тривимірних мезоскопічних провідників й до одновимірних квантових дротів. У [6] було показано, що, в результаті коректного розв’язання транспортного рівняння Больцмана в мезоскопічному

провіднику, на додачу до звичайної електростатичної ємності й електромагнітної індуктивності виникають також додаткові квантова ємність і кінетична індуктивність, роль яких у окремих випадках може бути значною й визначати особливості динамічної провідності системи.

Роль зазначених ефектів для графену вивчалася, наприклад, у [7] у рамках дослідження задачі про високочастотні межі для графенового польового транзистора. У результаті застосування процедури самоузгодженої квантової симуляції показано, що частота відсічки цього транзистора близька до частоти  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ , зумовленої кінетичною індуктивністю і квантовою ємністю ідеального ландауерівського графенового резистора (такого, який електрон проходить, не розсіюючись [1, 2]) і дорівнює близько 100 ГГц для графенового каналу мікронної довжини. Проте зменшення довжини каналу до 10 нм дозволило на цей час експериментально сягнути й терагерцового діапазону частот (див. [8] і посилання в ній).

Водночас питання характерних частот для порівняно масивних графенових каналів, далеких від досконалості резистора Ландауера, можли-

© М.В. СТРИХА, 2015



Еквівалентна схема для графенового провідного каналу:  $R$  – омичний опір каналу,  $R_C$  – контактні опори,  $C$  – квантова ємність,  $L$  – кінетична індуктивність

вість створення яких відкрила дешева технологія отримання графену осаджуванням з парової фази (CVD, [9]), досі лишалися поза розглядом. Водночас такі питання є актуальними, оскільки, наприклад, саме на CVD-графені великих розмірів (800 мкм × 200 мкм) було нещодавно реалізовано еталон квантового опору [10], який, за висновками авторів, має переваги перед дотеперішніми пристроями на основі GaAs. Важливо, що при цьому автори спостерігали виразний резонанс на тлі слабкої спадної лінійної частотної залежності холлівського опору на частоті 3,3 кГц, який вони кваліфікували як артефакт невідомого походження.

Надалі ми розглянемо електричне коло, що включає графеновий резистор, до якого прикладено змінну напругу. Звернімо увагу, що в більшості задач графенової фізики під вольт-амперною характеристикою розуміють залежність струму в графеновому каналі від напруги на затворі, зміною якої забезпечується “легування” графену електронами, або ж дірками [11]. Однак у цьому випадку ми вважаємо, що затвор заземлено. Як буде показано нами далі, еквівалентну схему для такого кола, що включає графеновий канал, може бути зображено на рисунку, де  $R_C$  – контактні опори (для простоти вважаємо їх рівними праворуч і ліворуч),  $R$  – омичний опір графенового каналу,  $C$  – квантова ємність,  $L$  – кінетична індуктивність, які виникають унаслідок розв’язання кінетичного рівняння Больцмана за схемою, аналогічною до [6].

Запишемо кінетичне рівняння Больцмана для електрона, що рухається в графеновому каналі між контактами вздовж осі  $x$  (графеновий канал лежить у площині  $xy$ ), у стандартному вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_x \cdot \nabla_x f - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E}_x \cdot \nabla_{k_x} f = \hat{S}_{\text{int}} f, \quad (1)$$

де  $\hat{S}_{\text{int}}$  – інтеграл зіткнень, а електричне поле пов’язане з електростатичним потенціалом виразом

$\mathbf{E}_x = \hat{x} \partial(U/e)/\partial x$  ( $e$  – заряд електрона). З урахуванням цього перепишемо (1) як:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_x \cdot \nabla_x f - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} = \hat{S}_{\text{int}} f. \quad (2)$$

В (1), (2)  $f \equiv 1/(\exp(E_m(p, x, t)/kT) + 1)$  – нерівноважна фермівська функція розподілу для електрона, який рухається вздовж каналу зі швидкістю  $\mathbf{v}_x$  та з двовимірним імпульсом, модуль якого дорівнює  $p$ ,  $E_m(p, x, t)$  – енергія електрона, яка враховує як відомий лінійний спектр графену, так і наявність дискретних рівнів, нумерованих індексом  $m$  та зумовлених квантуванням руху по осі  $z$ :

$$E_m(p, x, t) = E_m \pm v_F p + U(x, t) - \mu(x, t), \quad (3)$$

де  $U(x, t)$  – електростатичний потенціал, зумовлений прикладеною до каналу напругою,  $\mu(x, t)$  – електрохімічний потенціал (див., наприклад, [1, 2]),  $v_F = 10^6$  м/с [11].

З урахуванням (3) у рамках наближення слабого сигналу (що означає  $\frac{\partial f}{\partial E} \approx \frac{\partial f_0}{\partial E}$ , де  $f_0$  – рівноважна фермівська функція розподілу), ми можемо переписати другий і третій доданки в лівій частині (2) як:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial f}{\partial x} &= v_x \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial(U - \mu)}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial p_x} = v_x \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

З урахуванням (4) перепишемо (2) як:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} = \hat{S}_{\text{int}} f. \quad (5)$$

Надалі домножимо (5) на  $\frac{(-e)v_x}{l}$ , де  $l$  – довжина графенового каналу між контактами, проведемо підсумовування за всіма імпульсами  $p$  і квантовими рівнями  $m$  і введемо час релаксації  $\tau$  за формулою

$$\frac{l}{\tau} = -\frac{e}{l} \sum_{m,p} v_x \hat{S}_{\text{int}} f. \quad (6)$$

У режимі квазірівноважного балістичного транспорту струм пропорційний різниці хімпотенціалів на контактах і середньому значенню числа мод

провідності в околі рівноважного значення потенціалу в енергетичній смузі порядку  $kT$  (див., наприклад, [1, 2]):

$$I = \frac{2e}{h} \langle M \rangle d\mu, \quad (7)$$

де

$$\langle M \rangle = \frac{\pi}{2} \sum_{m,p} \hbar |v_x| \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right). \quad (8)$$

Звідси струм запишемо як:

$$I = \frac{e}{l} \sum_{m, v_x > 0} v_x \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) d\mu, \quad (9)$$

а замість кінетичного рівняння (5) тепер маємо

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I}{\tau} = \frac{1}{L} \frac{\partial(\mu/e)}{\partial x}, \quad (10)$$

де в слабострумовому режимі введено кінетичну індуктивність  $L$ :

$$\frac{1}{L} = \frac{e^2}{l} \sum_{m,p} v_x^2 \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right). \quad (11)$$

Саме рівняння (10) дозволяє трактувати величину  $L$ , що в системі СІ має розмірність [Генрі], як індуктивність, що має, однак, не електромагнітну, а кінетичну природу, бо впливає з альтернативного представлення кінетичного рівняння Больцмана для мезоскопічної системи. Для випадку, коли хімпотенціал змінюється вздовж графенового каналу рівномірно, а час релаксації достатньо великий, можна переписати (10) в простому вигляді, що зв'язує струм з падінням хімпотенціалу на каналі:

$$L \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\Delta\mu}{e}. \quad (12)$$

З іншого боку, сумарний заряд графенового каналу одиничної ширини описується очевидним співвідношенням

$$Q = -el \sum_{m,p} f(m,p). \quad (13)$$

Звідси квантову ємність можна ввести через формальне співвідношення

$$C = \frac{Qe}{\Delta\mu}. \quad (14)$$

З урахуванням (13) звідси одержуємо

$$C = \frac{e^2}{l} \sum_{m,p} \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right). \quad (15)$$

Вирази (12), (14) дають підставу зобразити еквівалентну схему графенового каналу так, як це показано на рисунку, а вирази (11), (15) дають значення кінетичної індуктивності й квантової ємності.

Підставивши до (11), (15) явний вигляд (3), можемо аналогічно до [6] отримати наближені вирази для квантової ємності й кінетичної індуктивності (при цьому ми вважали усереднену термічно швидкість електронів у кожній з  $m$  підзон однаковою):

$$C \approx \frac{2e^2 M l}{\hbar v_F}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{L} \approx \frac{2e^2 M}{\hbar v_F l} \langle v_x^2 \rangle. \quad (17)$$

Тут  $M$  – загальне число підзон, яке наближено дорівнює числу півдовжин де-Бройлівської хвилі для електрона, які вкладаються в перерізі графенового каналу в площині  $yz$  (перпендикулярно до струму) [2, 6],  $\langle \dots \rangle$  означає усереднення для електронів, які рухаються вздовж осі  $x$  (у напрямі струму).

Імпеданс електричного кола, зображеного на рисунку, описується відомим виразом:

$$Z = 2R_c + \frac{R(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 R L C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} + i \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}. \quad (18)$$

Для  $\omega = 0$  рівняння (18) приводить до тривіального результату:

$$Z = 2R_c + R. \quad (19)$$

Зі зростанням частоти прикладеної змінної напруги на частоті  $\omega_r$ , де уявна частина (18) робиться рівною нулеві й опір кола максимальний, спостерігатиметься резонанс. Ця частота визначається як:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (20)$$

З урахуванням (16), (17) видно, що для  $\langle v_x^2 \rangle / v_F^2 \ll 1$  виконується наближена рівність  $\omega_r \approx \omega_0$ .

Оцінимо частоти, які передбачаються виразом (20). Для високоякісного графенового резистора Ландауера [2], де має місце балістичний режим і електрон проходить між контактами без розсіяння, з урахуванням (3) одержуємо  $\langle v_x^2 \rangle \approx v_F^2$ . Звідси з (20) з урахуванням (16), (17) маємо

$$\omega_0 \sim \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} / l = v_F / l. \quad (21)$$

Цей вираз призводить до терагерцової частоти для графенового каналу мікронної довжини, що на порядок більше, ніж передбачено чисельними симуляціями [7]. Розбіжність частот зумовлена неврахуванням у нашому простому аналізі часу релаксації, який ми просто вважали достатньо великим при переході від (10) до (12).

Однак для довгого вирощеного методом CVD графенового каналу, де рух електрона має дифузійний характер, а  $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle} \sim \mu \bar{E}_{SD}$ , де  $\mu$  – рухливість електрона, а  $\bar{E}_{SD}$  – усереднене в часі електричне поле між контактами, для поля  $\bar{E}_{SD} \sim 10^3$  В/м і для рухливості  $\mu \sim 1$  м<sup>2</sup>/В·с (що є типовим значенням для не надто досконалого CVD графену) частота матиме порядок мегагерців. Для ще менших полів і менших значень рухливості легко отримати й кілогерцові частоти (чим, можливо, пояснюється резонанс у даних [10], а також резонанс на частоті  $\sim 450$  кГц у динамічній провідності CVD графенового каналу субміліметрових розмірів [12]).

Відзначмо, що наведені вище результати є оціночними і отриманими в ряді наближень. Насамперед, струм вважався однорідним у напрямку  $y$  (наближення достатньо широкої графенової стрічки). Час релаксації в транспортному рівнянні Больцмана вважався достатньо великим, аби перейти від (10) до (12). Швидкості термалізованих електронів у різних підзонах вважалися однаковими. Крім того, знехтувано різними паразитарними ефектами, які неминуче мають місце в реальних системах.

Однак у рамках достатньо простої моделі представлення кінетичного рівняння Больцмана для мезоскопічних систем, уперше розвинутої в [6], показано, що наявність кінетичної індуктивності й квантової ємності не є перешкодою для досягнення терагерцових частот у польових графенових транзисторах із мікронною довжиною каналу (обмеження при цьому накладають процеси релаксації [7]). Натомість у масивних графенових каналах, вирощених CVD методом, квантова ємність і кінетична індуктивність приводять до частот кілогерцового-

мегагерцового діапазону. Таким чином, варіюючи довжину каналу (від сотень мікронів до міліметрів) і рухливість (у характерному для CVD графену інтервалі 0,1–1 м<sup>2</sup>/Вс), можна сподіватися отримати ефективні фільтри для відповідного частотного діапазону.

*Автор вдячний О. Назарову, який стимулював цю роботу повідомленням про свої експериментальні результати, та Ю. Кругляку, який став першим в Україні послідовником підходу до розгляду мезосистем, розвинутого С. Датта.*

1. Supriyo Datta, *Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport* (World Scientific Publishing Company, Hackensack, New Jersey, 2012), pp. 473.
2. Ю.А. Кругляк, Н.Е. Кругляк, М.В. Стріха, Сенсорна електроніка і мікросистемні технології **9**, № 4, 5–29 (2012).
3. M. Fisher, L.I. Glazman, in: *Mesoscopic Electron Transport* (Kluwer, Norwell, MA, 1997), pp. 331.
4. Y.M. Blanter, F.W.J. Hekking, and M. Buttiker, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1925 (1998).
5. K.V. Pham, *Eur. Phys. J. B* **36**, 607 (2003).
6. S. Salahuddin, M. Lundstrom, and S. Datta, *IEEE Transactions on Electron Devices*, **52**, No. 8, 1734 (2005).
7. J. Chauhan and J. Guo, *Nano Res.* **4**, 571 (2011).
8. J. Zheng, L. Wang, R. Quhe *et al.*, *Sci. Rep.* **3**, 1314 (2013).
9. A.N. Obraztsov, *Nature Nanotechnology* **4**, 212 (2009).
10. C.-C. Kalmbach, J. Schurr, F. J. Ahlers *et al.*, *Appl. Phys. Letters* **105**, 073511 (2014).
11. S. Das Sarma, Sh. Adam, E.H. Hwang, and E. Rossi, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 407 (2011).
12. A. Nazarov *et al.*, (submitted).

Одержано 24.01.15

М.В. Стріха

#### ЧАСТОТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ ГРАФЕНОВОГО ПРОВОДЯЩЕГО КАНАЛА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НАЛИЧИЕМ КВАНТОВОЙ ЕМКОСТИ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Резюме

На основе анализа кинетического уравнения Больцмана для мезосистем показано, что при рассмотрении динамической проводимости графенового канала следует дополнительно учитывать квантовую емкость и кинетическую индуктивность, которые являются аналогами электростатической емкости и магнитной индуктивности, но имеют иную физическую природу. Учет наличия квантовой емкости и кинетической индуктивности приводит к появлению максимума импеданса. В случае, когда графеновый канал является резистором Ландауера, который электрон проходит без рассеяния, этот максимум соответствует терагерцовому диапазону (следовательно, эффект не ухудшает частотных характеристик полевых графеновых транзисторов, которые работают в гигагерцовом диапазоне). Однако для

массивных графеновых каналов, выращенных методом осаждения из паровой фазы, где транспорт электронов имеет диффузионную природу, максимум соответствует килогерцовому или мегагерцовому диапазону (в зависимости от подвижности носителей и длины канала).

*M. V. Strikha*

FREQUENCY LIMITS FOR CONDUCTING  
GRAPHENE CHANNEL CAUSED BY QUANTUM  
CAPACITANCE AND KINETIC INDUCTANCE

S u m m a r y

By analyzing the Boltzmann kinetic equation for mesosystems, it is shown that the quantum capacitance and the kinetic in-

ductance, which are analogs of the electrostatic capacitance and the magnetic inductance, respectively, have to be taken into consideration while studying the dynamic conductivity of a graphene channel, despite their different physical nature. The account of the quantum conductance and the kinetic inductivity leads to the appearance of a maximum of the impedance. In the case where the graphene channel is an ideal Landauer resistor crossed by an electron without scattering, this maximum corresponds to the THz range (therefore, the effect does not worsen the frequency characteristics of graphene FETs operating in the GHz range). However, for massive graphene channels fabricated with the use of the CVD method, where the electron transport has the diffusive nature, this maximum corresponds to the kHz or MHz range depending on the carrier mobility and the channel length.