Н.О. ЧУДАК,[1] К.К. МЕРКОТАН,[1] Д.А. ПТАШИНСЬКИЙ,[1] О.С. ПОТІЄНКО,[1] М.А. ДЕЛІЄРГІЄВ,[2] А.В. ТІХОНОВ,[3] Г.О. СОХРАННИЙ,[4] О.В. ЖАРОВА,[5] О.Д. БЕРЕЗОВСЬКИЙ,[1] В.В. ВОЙТЕНКО,[1] Ю.В. ВОЛКОТРУБ,[1] І.В. ШАРФ,[1] В.Д. РУСОВ[1]

[1] Кафедра теоретичної та експериментальної ядерної фізики,
Одеський національний політехнічний університет
(Просп. Шевченка, 1, Одеса 65000; e-mail: sharph@ukr.net)

[2] Institute of Modern Physics, Department of High Energy Nuclear Physics
(509 Nanchang Rd., 730000 Lanzhou, China)

[3] Université de Genéve, Département de Physique Nucléaire et Corpusculaire
(CH-1211 Geneva 4, Switzerland)

[4] Jožef Stefan Institute, Department of Experimental Particle Physics
(39 Jamova Str., SI-1000 Ljubljana, Slovenia)

[5] Кафедра вищої математики та моделювання систем,
Одеський національний політехнічний університет
(Просп. Шевченка, 1, Одеса 65000)

УДК 518.5+531.2

ВНУТРІШНІ СТАНИ АДРОНІВ У РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ СИСТЕМАХ ВІДЛІКУ

Розглянуто задачу про перетворення внутрішнього стану частинки, яка є зв'язаним станом декількох частинок, з системи спокою складеної частинки в систему відліку відносно якої вона є релятивістською. При цьому вважається, що в системі спокою складеної частинки її внутрішній стан можна розглядати в нерелятивістському наближенні. Показано, що цей внутрішній стан не змінюється при переході з однієї системи відліку до іншої. Тобто сферично симетрична частинка в системі спокою залишається такою і в будь-якій іншій системі відліку і не піддається лоренцевому скороченню в напрямку руху довільної системи відліку відносно системи спокою. Обговорено можливе застосування результатів роботи для опису процесів розсіяння адронів як зв'язаних станів кварків.

Ключові слова: адрони, система відліку, зв'язані стани кварків, розсіяння адронів, перетворення стану.

1. Вступ

У нашій попередній роботі [1] було показано, що процеси непружного розсіяння адронів можуть бути описаними за допомогою методу Лапласа. Втім розрахунки в [1] проводилися лише для модельних скалярних теорій, що дозволило відтворити результати експерименту лише на рівні якісного, а не кількісного збігання [2, 3]. З іншого боку, таке якісне збігання дає надію на те, що суттєві особливості поведінки величин, що спостерігаються в експерименті, можна описати в межах теорії збурень навіть у випадку сильної взаємодії. Тому виникає задача застосувати метод Лапласа в межах теорії збурень КХД [4]. При цьому стикаємось з відомою проблемою, яка полягає в тому, що на діаграмах маємо кваркові і глюонні лінії у той час як в початковому і кінцевому станах маємо зв'язані стани кварків – адрони. Це приводить до того, що на відміну від "звичайної" теорії розсіяння для кварків взаємодія не "вмикається" і не "вимикається". Внаслідок цього ані стан, ані гамільтоніан системи частинок, що розсіюються, не наближаються асимптотично до відповідних величин для вільних кварків. Тому маємо дві проблеми, пов'язані відповідно із станом і з гамільтоніаном. Перша з них полягає в тому, яким чином задати початковий і кінцевий стани розсіяння з урахуванням взаємодії між кварками. Друга – в тому, що розглядаючи амплітуду розсіяння в межах діаграмної техніки, суттєво пов'язаної із "вмиканням" і "вимиканням" взаємодії, отримаємо закон збереження енергії-імпульсу, який накладатиметься на чотириімпульси кварків, а не адронів, як це є в експерименті. В цій роботі ми розглядаємо саме проблему станів. Розв'язок проблеми "правильного" вигляду закону збереження енергії-імпульсу розглядається в іншій роботі [5, 6], результати якої суттєво спираються на висновки, отримані далі в цій статті.

Зазвичай, адрони в процесах розсіяння описуються в межах партонної моделі [7]. Однак релятивістський опис внутрішнього стану адрона, якщо тільки ми не збираємось обмежуватись інклюзивним описом, потребує задання великої кількості багатопартонних функцій розподілу, що суттєво ускладнює задачу [8, 9]. Спростити розв'язок цієї проблеми можна за допомогою таких міркувань. Якщо ми говоримо, що вільний адрон в початковому або кінцевому стані розсіяння складається з певної кількості певних конституентних кварків, то це означає, що внаслідок взаємодії цих кварків, нові конституентні кварки народжуватись не можуть. Це дає змогу припустити, що принаймні деякі ефекти пружного та непружного розсіяння адронів можуть бути описані, якщо розглядати внутрішній стан вільного адрона в системі спокою цього адрона в нерелятивістському наближенні, що не заперечує того, що деякі специфічні ефекти, як зазначається, наприклад, в [10] можуть потребувати суто релятивістського опису. Підкреслимо, що мова йде саме про вільний адрон до чи після розсіяння. Взаємодія між кварками різних адронів у процесі розсіяння безумовно повинна описуватись релятивістськи, але такий опис не є предметом цієї роботи і розглянуто в [5, 6]. Проте початковий і кінцевий стани процесу розсіяння містять по декілька адронів, тому, взагалі кажучи, ми не можемо вибрати систему відліку таким чином, щоб вона була системою спокою для всіх цих адронів, або принаймні так, щоб всі адрони в цій системі відліку були нерелятивістськими.

Тому виникає проблема перетворення нерелятивістських внутрішнього стану і гамільтоніана при переході з системи спокою частинки в систему відліку, в якій ця частинка є релятивістською. Сутність цієї задачі можна пояснити на такому простому прикладі. Припустимо, що в нас є найпростіша квантова нерелятивістська система – атом водню, яка знаходиться в сферично-симетричному основному стані. Відносно цієї системи немає сумнівів в можливості описати її властивості в нерелятивістському наближенні, якщо атом водню розглядається в його системі спокою. Припустимо також, що є інерційний спостерігач, який рухається відносно цього атома водню із релятивістською швидкістю. Ми хочемо з'ясувати який результат отримає цей спостерігач, якщо він буде вимірювати координати, або імпульси частинок, з яких складається ця система. Тобто, якою амплітудою ймовірності можна описати результати його вимірювання і як вона пов'язана із амплітудою ймовірності в системі спокою атома водню, або інакше – системою центра мас частинок, які його складають?

Якщо б атом водню можна було б розглядати з точки зору класичної, а не квантової механіки, то ми могли б діяти таким чином. Спочатку розв'язати в його системі спокою звичайну задачу двох тіл, що взаємодіють посередництвом заданої потенціальної енергії. Потім ми могли б у системі відліку, відносно якої він рухається із релятивістською швидкістю, не розглядати релятивістську задачу про взаємопов'язану динаміку трьох взаємодіючих об'єктів: ядра, електрона і електромагнітного поля, динамічні характеристики кожного з яких вже не є заданими і повинні знаходитись в процесі розв'язку задачі, а застосувати перетворення Лоренца до результатів розв'язку в системі спокою. Таким чином, вдалося б уникнути необхідності релятивістського польового опису взаємодії між ядром і електроном. Нашою метою в цій роботі є зреалізувати подібний підхід, але вже у випадку не класичної, а квантової механіки, тобто скористатися в системі центра мас двочастинкової системи рівнянням Шредінгера із певною потенціальною енергією і уникнути квантово-польового

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2016. Т. 61, № 12

опису з народженням і знищенням віртуальних частинок в системі, що рухається відносно системи центра мас із релятивістською швидкістю шляхом перетворення стану, знайденого в системі центра мас.

Враховуючи, що нас цікавлять адрони, далі ми будемо як приклад розглядати не атом водню, а мезон як двочастинкову систему кварка і антикварка, а потім розглянемо застосування отриманих результатів для більш складних трикваркових систем – баріонів і припускаючи, що внутрішні стани цих частинок, подібно до атома водню, можуть бути описані в нерелятивістському наближенні в їх системах спокою. Приклад з атомом водню ми навели для того, щоб підкреслити ту обставину, що ми не обговорюємо в цій роботі можливість застосування нерелятивістського наближення в системі спокою зв'язаної частинки, як це непотрібно було б робити у випадку з атомом водню. Ми розглядаємо питання в такій постановці: якщо дано, що внутрішній стан складеної частинки в її системі спокою є нерелятивістським, то треба знайти, яким буде цей стан в системі відліку, що рухається відносно цієї системи спокою із релятивістською швидкістю.

Ця задача є дещо нетиповою. Ця нетиповість полягає в тому, що зазвичай маємо справу із тим, що відносно різних систем відліку вимірюються величини, пов'язані із однією й тією самою подією. У випадку із амплітудою ймовірності багаточастинкової системи маємо іншу ситуацію. Дійсно, якщо маємо двох різних інерційних спостерігачів, яких назвемо "без штриха" і "зі штрихом", то амплітуда ймовірності, наприклад, двочастинкової системи, відносно спостерігача "без штриха" (позначимо її $\Psi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$), описує результат вимірювання координат частинок, одночасного відносно системи "без штриха" і здійсненого в момент часу t за годинником цієї системи. Аналогічно, амплітуда ймовірності $\Psi'(t', \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)$ відносно спостерігача "зі штрихом" описує результат вимірювання координат, одночасний відносно цього спостерігача, в момент часу t' за його годинником. Але вимірювання, одночасні відносно одного спостерігача, не будуть такими відносно іншого і навпаки. В цьому полягає суттєва відмінність задачі, що розглядається, у порівнянні із класичною задачею про лоренцеве скорочення, де вимірювання координат кінців стрижня повинне бути одночасним у системі відліку, відносно якої стрижень рухається, але може бути неодночасним у системі спокою стрижню. Завдяки цьому довжина стрижня може бути розрахована по координатах одних і тих самих подій, але в різних системах відліку. В нашому ж випадку пара подій, що полягає в тому, що один з спостерігачів виявляє частинки в малих околах деяких точок і аналогічна пара подій для іншого спостерігача становлять суттєво різні пари подій, бо перші дві події повинні бути одночасними відносно одного спостерігача, а інші – відносно другого. Тому ці два спостерігача не зможуть скористатися одним і тим самим вимірюванням, виражаючи його результати кожний за допомогою змінних своєї системи відліку. Кожен з них повинен зреалізувати своє, одночасне відносно себе, вимірювання, незалежне одне від одного. Внаслідок цього між значеннями $t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ з одного боку, і $t', \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ – з іншого, не може бути встановлено ніякого зв'язку, бо такий зв'язок може бути лише між координатами однієї й тієї ж події, виміряними відносно різних систем відліку. Тобто між аргументами амплітуд ймовірності (тут і далі слово "аргумент" розуміється в сенсі змінної, від якої залежить функція, а не аргумент її значення як комплексного числа) в обох системах відліку немає ніякого зв'язку на зразок перетворень Лоренца. Тому втрачають силу висновки про скорочення довжин, або подовження проміжків часу, які є наслідками перетворень Лоренца.

Висновок про те, що аргументи, від яких залежить багаточастинкові амплітуди ймовірності, в різних системах відліку не можуть бути пов'язані ані перетворенням Лоренца, ані будь-яким іншим чином суттєво відрізняє підхід, застосований в цій роботі від підходів в інших відомих нам роботах на цю тему, бо в цих роботах явно або не явно вважається, що аргументи багаточастинкових амплітуд ймовірності в різних системах відліку можна пов'язати перетвореннями Лоренца. Зокрема зазначена проблема з одночасністю вже розглядалася в літературі [11]. Однак в цій роботі пропонується визначити "інваріантну відносно перетворень Лоренца одночасність" як одночасність в системі центра мас. В найбільш відомій роботі на цю тему [12] аналог двочастинкової амплітуди ймовірності вводиться як матричний елемент добутку двох одночастинкових операторів народження в представленні Гейзенберга. Аргументи цих двох операторних функцій розглядаються як чотиривектори відносно перетворень Лоренца, що породжує відому проблему відносних часів. Подальше проектування функції Бете–Солпітера на певну просторовоподібну гіперповерхню в просторі Мінковського, яке використовується в методі квазіпотенціалу [13] має за мету уникнути проблеми відносних часів шляхом введення інваріантної часоподібної змінної, тобто знов передбачає, що аргументи амплітуди ймовірності можна пов'язати між собою перетвореннями Лоренца. Теж саме стосується робіт, в яких розглядається динаміка світлового фронту, наприклад, [14–16]. В основоположній роботі [17] цього напряму відмова від одночасного опису розглядалась як основна мета. Однак в цій роботі мова йшла про побудову виразів для генераторів групи Пуанкаре. В той самий час розгляд фронтової форми динаміки з точки зору простору станів [14, 15], на якому діють ці генератори знов призводить до "light-cone wave functions", аргументи яких знову ж таки вважаються пов'язаними перетвореннями Лоренца.

Звернемо увагу на те, що наведені вище міркування щодо неможливості пов'язати між собою аргументи багаточастинкової амплітуди ймовірності ніяк не пов'язані із нашим наміром застосувати нерелятивістське наближення в одній із систем відліку. В релятивістській ситуації, коли стан описується стовпчиком Фока [18, 19], розглянута проблема з одночасністю виміру виникне для всіх компонент цього стовпця починаючи з другої. Тому з тих самих міркувань, що були викладені вище, ми знов дістанемо висновку що аргументи, від яких залежать компоненти фоківських стовпців, що описують один і той самий стан релятивістської квантової системи в різних системах відліку не можуть бути ніяким чином пов'язані між собою.

Принциповий метод розв'язку задачі про перетворення фоківського стану при переході з однієї інерційної системи до іншої дає постулат квантування полів, прийнятий в [18]. Згідно із цим постулатом генераторами представлення групи Лоренца на просторі Фока є компоненти оператору моменту імпульсу відповідної релятивістської системи. Більш детально для нашої ситуації це означає таке.

Як відомо, перехід від однієї інерційної системи до іншої можна представити як добуток двох обертів і буста. У випадку обертів вочевидь не виникає зазначеної проблеми з одночасністю і, відповідно, не виникає проблеми із перетворенням стану. Тому далі розглядатимемо лише випадок буста. Враховуючи те, що нам достатньо розглядати буст лише уздовж однієї з координатних осей, розглянемо випадок буста уздовж осі OZ. Бистрота цього буста позначатимемо Y. Згідно з постулатом квантування [18], генератором перетворення стану в цьому випадку є оператор компоненти моменту імпульсу $\hat{M}_{03}$. Тобто стан $|\Psi'\rangle$ (нерелятивістська амплітуда ймовірності, або релятивістський фоківський стовпець) відносно системи відліку "зі штрихом" пов'язаний із відповідним станом $|\Psi\rangle$ відносно системи відліку "без штриха" співвідношенням:

$$\begin{aligned} &|\Psi'\rangle = \hat{U}(Y)|\Psi\rangle, \\ &\hat{U}(Y) = \exp(i\hat{M}_{03}Y). \end{aligned} \tag{1}$$

Генератор $\hat{M}_{03}$ є операторно-значним функціоналом від операторів народження та знищення, що діють на просторі Фока. Якщо польові оператори і фоківський стан $|\Psi\rangle$ розглядати в представленні Гейзенберга, то внаслідок теореми Нетер генератор $\hat{M}_{03}$ не залежить від часу. Тому, якщо перейти тепер до будь-якого іншого представлення, в якому стан і генератор вже міститимуть залежність від часу, то отримаємо, що значення часу, яке входить в вираз для стану і в вираз для генератора буде одне й те саме. Окрім того, $\hat{M}_{03}$ є інтегралом по координатах від відповідної густини. Таким чином, дія цього оператора в (1) не призведе до появи нових незалежних змінних. Тому, внаслідок того, що ми ніяким чином не виражаємо змінні, від яких залежать компоненти стовпця $|\Psi\rangle$ отримаємо, що компоненти стовпця $|\Psi'\rangle$ залежать від тих же змінних. Отже, дія оператора $\hat{U}(Y)$ приводить лише до зміни форми залежностей. Таким чином, не маючи змоги встановлювати зв'язок між значеннями амплітуди ймовірності, які відповідають одній й тій самій події, під час розгляду задачі про її перетворення при переході з однієї інерційної системи відліку до іншої, ми можемо встановлювати зв'язок між цими значеннями при одних і тих самих значеннях аргументів, подібно до того, як це робиться при розгляді внутрішніх симетрій. Тобто, якщо ми розглянемо (1), наприклад, в координатному представленні, то в лівій частині рівності час і координати відносяться до деяких подій, одночасних відносно вихідної системи відліку. Тоді в правій частині рівності розглядаються інші події, але такі, які мають ті самі просторові і часові координати, що й в лівій частині, але вже відносно нової системи відліку і одночасні відносно цієї системи відліку.

Виходячи з сказаного, двочастинкову амплітуду ймовірності в системі координат "зі штрихом" будемо позначати $\Psi'(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

У релятивістській ситуації, окрім зазначених вище труднощів із заданням фоківського стану, маємо ще проблему, яка полягає в тому, що для систем із взаємодією оператор $\hat{M}_{03}$ не буде квадратичним по операторах народження та знищення, тому функціональний інтеграл, що описує його дію на просторі Фока [19] не буде гаусівським. Тобто, навіть якщо ми могли б задати фоківський стан, задача його перетворення (1) була б дуже складною. Це є ще одним аргументом на користь того, щоб спробувати спростити ситуацію за рахунок нерелятивістського наближення.

Але тоді ми повинні побудувати відповідне нерелятивістське наближення для генератора $\hat{M}_{03}$. Якщо таке наближення побудувати в системі центра мас зв'язаної системи, то в довільній іншій системі відліку оператор $\hat{M'}_{03}$ можна виразити через $\hat{M}_{03}$ та інші компоненти моменту імпульсу, які теж можна задати в нерелятивістському наближенні, за допомогою тензорного закону перетворення. Власне формулювання таких наближень і становить зміст наступної частини роботи.

Перед тим як перейти до розв'язку описаної задачі, звернемо увагу на наступну можливість її спрощення. Розглянемо адрон у системі його спокою. В цій системі стан системи повинен бути власним станом для повного імпульсу $\hat{\mathbf{P}}$ всіх частинок, які її складають, і відповідати при цьому власному значенню, рівному нулю. Ще до переходу до нерелятивістського наближення розвиток фоківського стану $|\Psi\rangle$ із часом в системи частинок, що утворюють адрон, може бути записаний у вигляді:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t)|\Psi(t=0)\rangle, \tag{2}$$

де $\hat{H}$ – релятивістський гамільтоніан системи полів, кванти яких утворюють адрон. В системі відліку, яка отримується з вихідної перетворенням буста, згідно з [18] матимемо:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y)(\exp(-i\hat{H}t)|\Psi(t=0)\rangle). \tag{3}$$

Тут через $\hat{U}(Y)$ позначений унітарний [18] оператор перетворення стану внаслідок буста з бистротою Y, визначений співвідношенням (1). Враховуючи те, що йдеться про стан, власний для повного імпульсу системи, і такий, що відповідає нульовому власному значенню, співвідношення (3) можна переписати у вигляді:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y) \times \\ \times (\exp(-i(\hat{H}t - (\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R})))|\Psi(t=0)\rangle), \tag{4}$$

де $\mathbf{R}$ – сукупність довільних трьох координат, конкретний вибір яких не має значення, внаслідок того, що оператор (4) діє на власну функцію оператора $\hat{\mathbf{P}}$, яка відповідає його нульовому власному значенню. Але тепер ми можемо сукупність чотирьох чисел t і $\mathbf{R}$ розглядати як компоненти чотиривектора відносно перетворень Лоренца. Також сукупність операторів $\hat{H}$ і $\hat{\mathbf{P}}$ розглядати як операторний чотиривектор. Цим можна скористатися таким чином.

Перепишемо вираз (4) у вигляді:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y)\hat{u}(x)\hat{U}^{-1}(Y)\hat{U}(Y)|\Psi(t=0)\rangle, \tag{5}$$

де введені позначення

$$\begin{aligned} & x \equiv (t, R_x, R_y, R_z), \\ & \hat{u}(x) \equiv \exp(-i(\hat{H}t - (\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}))). \end{aligned} \tag{6}$$

Вираз $\hat{U}(Y)\hat{u}(x)\hat{U}^{-1}(Y)$ формально збігається з таким, що виникає при перетворенні операторних польових функцій [18]. Тому позначаючи матрицю буста уздовж осі OZ через $\Lambda^{(0)}(Y)$, отримаємо

$$\hat{U}(Y)\hat{u}(x)\hat{U}^{-1}(Y) = \hat{u}(\Lambda^{(0)}(Y)x). \tag{7}$$

Тоді замість (5), можемо записати:

$$|\Psi'(t)\rangle = \exp(-it(\mathrm{ch}(Y)\hat{H} - \mathrm{sh}(Y)\hat{P}_z)) \times \\ \times \exp(iR_z(\mathrm{sh}(Y)\hat{H} - \mathrm{ch}(Y)\hat{P}_z)) \times \\ \times \exp(i(R_x\hat{P}_x + R_y\hat{P}_y))\hat{U}(Y)|\Psi(t=0)\rangle. \tag{8}$$

До цих пір у ролі $\hat{H}$ і $\hat{\mathbf{P}}$ розглядалися релятивістські оператори енергії і імпульса. Але вони віднесені до вихідної системи відліку, в якій ми згідно із задачею, що розглядається, можемо застосувати нерелятивістське наближення. В цьому наближенні ці оператори можна замінити, відповідно, нерелятивістським внутрішнім гамільтоніаном системи кварків, що утворюють адрон і нерелятивістським оператором імпульсу цієї системи. Величина $|\Psi(t=0)\rangle$ в такому нерелятивістському наближенні може бути замінена координатною частиною амплітуди ймовірності власного для енергії стану двочастинкової системи кварка та антикварка. Окрім цього, якщо розглянути граничний випадок малої бистроти Y, то бачимо, що у ролі довільних координат вектора $\mathbf{R}$ потрібно вибирати координати центра мас:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{9}$$

Як буде показано далі в цій роботі, якщо в ролі $|\Psi(t = 0)\rangle$ взяти власний для енергії стан двочастинкової зв'язаної системи, що відповідає найменшому власному значенню, то такий стан не змінюється в результаті дії оператора $\hat{U}(Y)$:

$$\hat{U}(Y)|\Psi(t = 0)\rangle = |\Psi(t = 0)\rangle. \tag{10}$$

Окрім того, враховуючи те, що $\hat{H}$ – гамільтоніан системи зв'язаних частинок в їх системі центра мас, а $|\Psi(t = 0)\rangle$ – його власний стан, що відповідає його найменшому власному значенню, маємо:

$$\hat{H}|\Psi(t = 0)\rangle = m_\mu|\Psi(t = 0)\rangle \tag{11}$$

З урахуванням цього і наведених вище міркувань з (8), отримаємо в новій системі відліку "правильну" залежність від часу і координат центра мас відносно цієї системи відліку:

$$|\Psi'(t)\rangle = \exp\Big(-i\Big(\sqrt{m_\mu^2 + \mathbf{P}^2}t - \\ - (\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{P})\Big)\Big)|\Psi(t = 0)\rangle, \tag{12}$$

де $\mathbf{P}$ – імпульс зв'язаної частинки в системі відліку, що розглядається, а $\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ виражається співвідношенням (9). Звернемо увагу, що така "правильна" залежність при переході від системи центра мас до іншої інерційної системи з'явилася не за рахунок перетворення координат і часу як це відбувається в звичайній плоскій хвилі, а виключно за рахунок перетворення форми функції (7) від тих самих змінних як це обговорювалося раніше після формули (1). Переходячи з системи центра мас до різних інших інерційних систем відліку в кожній з них будемо отримувати залежність (12) і при цьому, як це обговорювалося раніше, $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ в кожній системі відліку – координати частинок, виміряні одночасно відносно цієї системи відліку. Таким чином, в різних інерційних системах відліку отримаємо однакову залежність стану від своїх змінних, як того вимагає принцип відносності.

Таким чином, спрощення, про яке йшлося, і яке досягнуте шляхом (4)–(8) полягає в тому, що нам не потрібно описувати перетворення всієї амплітуди ймовірності власного для енергії стану при переході з системи центра мас кварка та антикварка до іншої системи відліку, а можна обмежитися лише перетворенням координатної частини цієї амплітуди ймовірності.

Отже, подальший розгляд стосується двох питань: як побудувати нерелятивістське наближення для генератора $\hat{M}_{03}$ і як подіяти оператором $\exp(i\hat{M}_{03}Y)$ на координатну частину внутрішнього стану адрона в його системі спокою.

Завершуючи вступ, ми хотіли б чітко наголосити на тих наближеннях, які ми використовуємо в цій роботі. Зазначимо, що ми ніякою мірою не розглядаємо релятивістську теорію зв'язаних станів. Ми розглядаємо задачу, в межах якої дано, що в системі відліку центра мас внутрішній стан зв'язаної частинки є нерелятивістський і відомий, а потрібно знайти, яким буде цей стан у системі відліку, яка рухається відносно системи центра мас із релятивістською швидкістю. При цьому розраховуємо, що в межах такого наближення можна буде далі описати основні властивості релятивістського пружного і непружного розсіяння адронів [5, 6]. В системі спокою адрона його внутрішній стан описується двочастинковою амплітудою ймовірності, що є розв'язком рівняння Шредінгера, а маса адрона є найменшим власним значенням відповідного нерелятиістського гамільтоніана [5, 6]. Також нерелятивістське наближення використовується для компоненти $\hat{M}_{0,3}$ тензора моменту імпульсу в системі спокою зв'язаної частинки.

2. Наближення генераторів перетворення Лоренца диференціальними операторами

Згідно з [18] представлення $\hat{M}_{0,3}$ диференціальними операторами має вигляд:

$$\hat{M}_{0,3} = i\left(t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{13}$$

При цьому зауважимо, що представлення генераторів диференціальними операторами можливо отримати розглядаючи деяку функцію від координат та часу, та роблячи відповідну заміну незалежних змінних у цій функції. Але, як зазначалося в попередньому розділі, в нашому випадку заміна незалежних змінних неможлива. Тому співвідношення (13) можна розуміти лише як границю, до якої наближається "правильний" релятивістський оператор $\hat{M}_{0,3}$ при переході до нерелятивістського наближення. Тоді виникає питання, до якої границі повинен наближатися цей оператор у випадку багаточастинкової системи. Враховуючи те, що просторові компоненти моменту імпульсу представляються сумою відповідних одночастинкових операторів, можна зробити припущення, що й компоненти, в яких один з індексів дорівнює нулю, також є адитивними. Тоді, для двочастинкової системи матимемо:

$$\hat{M}_{0,3} = i\left(t\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right) + (z_1 + z_2)\frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (14)$$

Як вже зазначалося, величина $|\Psi(t = 0)\rangle$, що входить в (8), при переході до нерелятивістського наближення, може бути замінена, в нашому випадку, на координатну частину власного для енергії стану, яку позначимо $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Ця функція не залежить від часу і є власною функцією оператора повного імпульсу системи, що відповідає нульовому власному значенню. Якщо врахувати, що оператор (14) може бути записаний у вигляді

$$\hat{M}_{0,3} = -t\hat{P}_z + (z_1 + z_2)i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (15)$$

дістаємо висновку, що функція $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ є також власною функцією й оператора $\hat{M}_{0,3}$, що відповідає нульовому власному значенню.

Це можна пояснити ще й такими міркуваннями. Внаслідок того, що вихідною системою відліку є система центра мас кварка та антикварка маємо:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (16)$$

Якщо у виразі

$$i\left(t\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right) + (z_1 + z_2)\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (17)$$

від $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ перейти до нових змінних

$$\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_- = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (18)$$

то оператор в (17) буде залежати лише від z_+, а функція, на яку він діє – лише від z_-.

Таким чином, з наведених міркувань можна зробити висновок, що

$$\exp(i\hat{M}_{0,3}Y)\psi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \psi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (19)$$

Тобто внутрішній стан мезона при переході в нову систему відліку не змінюється.

В усіх попередніх міркуваннях у ролі генератора $\hat{M}_{0,3}$ ми розглядали відповідну компоненту тензора орбітального моменту імпульсу. Зауважимо, що для вільного біспінорного поля з явного вигляду спінового внеску в тензор моменту імпульсу [18] видно, що ці внески обертаються на нуль для компонент тензора, в яких хоча б один з індексів дорівнює нулю. Оператор взаємодії біспінорного поля із калібрувальним полем не містить похідних від компонент біспінорного поля і тому не дає внеску в тензор спінового моменту імпульсу. Тому в "правильному" релятивістському операторі $\hat{M}_{0,3}$ спіновий внесок дорівнює нулю. Це означає, що при переході до нерелятивістської границі ми також можемо розглядати лише орбітальний внесок в $\hat{M}_{0,3}$.

Звідси можна зробити висновок, що всі наведені міркування можна застосувати не тільки до мезонів, а й до баріонів, бо наявність в них ненульового спіну нічого не змінює. Для баріона приймаючи припущення про адитивність всіх компонент моменту імпульсу, замість (14) матимемо:

$$\hat{M}_{0,3} = i\left(t\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}\right) + \right.$$
$$\left. + (z_1 + z_2 + z_3)\frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (20)$$

Цей оператор знов виражається через оператор z – компоненти повного імпульсу системи. Тому діючи цим оператором на власну функцію оператора повного імпульсу, що відповідає нульовому власному значенню, отримаємо нуль.

Наведені в цьому розділі міркування мають дві суттєві недоліки. По-перше, "правильний" релятивістський оператор $\hat{M}_{0,3}$ реалізується не диференціальними операторами, а заданий в представленні вторинного квантування. Тому й його нерелятивістську границю доречніше шукати саме в цьому представленні. Окрім цього, ми суттєво використали припущення (14) та (20). В представленні вторинного квантування, внаслідок того, що вираз для операторів не залежить від того, чи на одночастинковому, чи на багаточастинковому просторі задані ці оператори, такі припущення виявляються непотрібними. Тому наведені в цьому розділі міркування можна розглядати лише як допоміжні. Втім в наступному розділі покажемо, що розглядаючи задачу в представленні вторинного квантування можна отримати той самий результат.

3. Наближення генераторів перетворення Лоренца в представленні вторинного квантування

Будемо позначати $\hat{q}^{+}(f,\nu,c,\mathbf{r})$ – нерелятивістський оператор народження кварка в координатному представленні вторинного квантування. При цьому індекси f,ν,c задають відповідно ароматовий, спіновий та кольоровий стан кварка, який народжується у власному для радіуса-вектора стані, що відповідає власному значенню $\mathbf{r}$. Оператор народження антикварка в тому ж стані позначатимемо $\hat{\bar{q}}^{+}(f,\nu,c,\mathbf{r})$, а відповідні оператори знищення $\hat{q}^{-}(f,\nu,c,\mathbf{r})$ і $\hat{\bar{q}}^{-}(f,\nu,c,\mathbf{r})$.

У таких позначеннях координатну частину внутрішнього стану мезона як системи кварка та антикварка можна представити у вигляді:

$$|\mu\rangle=\int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1\psi(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)s(\nu_1,\nu_2)c(c_1,c_2)a(f_1,f_2)\times \times\hat{q}^{+}(f_1,\nu_1,c_1,\mathbf{r}_1)\hat{\bar{q}}^{+}(f_2,\nu_2,c_2,\mathbf{r}_2)|0\rangle. \quad (21)$$

У цьому співвідношенні ми позначили як $s(\nu_1,\nu_2)k(c_1,c_2)a(f_1,f_2)$ відповідно спінову, кольорову та ароматову частини амплітуди ймовірності, у той час як функція $\psi(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)$ описує координатну залежність амплітуди ймовірності в системі центра мас кварка та антикварка. Оскільки ми розглядаємо координатну частину стану, власного для енергії, у ролі $\psi(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)$ потрібно розглядати власну функцію нерелятивістського гамільтоніана системи кварка та антикварка. Окрім того, як зазвичай передбачається складання за індексами, які повторюються. Також використане звичайне позначення вакуумного стану $|0\rangle$.

Враховуючи те, що залежність всіх величин від внутрішніх індексів для нас в цьому розділі буде несуттєвою, позначатимемо далі сукупність індексів $\{\nu,c,f\}$ однією буквою ξ, а залежність амплітуди ймовірності від внутрішніх індексів як:

$$F(\xi_1,\xi_2)\equiv s(\nu_1,\nu_2)k(c_1,c_2)a(f_1,f_2). \quad (22)$$

Тобто замість (21) можемо записати

$$|\mu\rangle=F(\xi_1,\xi_2)\int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1\psi(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)\times \times\hat{q}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2)|0\rangle. \quad (23)$$

Як відомо, оператор $\hat{M}_{0,3}$ в теорії поля представляється у вигляді:

$$\hat{M}_{0,3}=\int d\mathbf{r}(x_3\hat{T}_{0,0}(\mathbf{r})-x_0\hat{T}_{3,0}(\mathbf{r})), \quad (24)$$

де $\hat{T}_{0,0}(\mathbf{r})$ і $\hat{T}_{3,0}(\mathbf{r})$ – оператори відповідних компонент тензора енергії-імпульсу, $x_0\equiv t$ – часова компонента координатного чотиривектора, а $x_3\equiv \equiv(-z)$ – його коваріантна компонента уздовж осі OZ. Співвідношення (24) вочевидь можна переписати у вигляді:

$$\hat{M}_{0,3}=-t\hat{P}_z+\int d\mathbf{r}(x_3\hat{T}_{0,0}(\mathbf{r})), \quad (25)$$

де $\hat{P}_z$ – оператор z-компоненти повного імпульсу системи.

Зауважимо, що співвідношення (24) та (25) є точними і не потребують ніяких припущень і наближень. При цьому залежність від t в (25) збігається з (15), у той час як само (15) є наслідком припущень (14) та (20). Таким чином, можемо зробити висновок, що (25) доводить правильність цих припущень.

Стан (23) є власним станом для повного імпульсу системи, що відповідає нульовому власному значенню, тому дія першого доданка з (25) на цей стан є тривіальною і дає нуль. Тому далі розглянемо другий доданок з (25). Введемо для нього позначення

$$\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0})=\int x_3\hat{T}_{0,0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (26)$$

Для того щоб подіяти цим оператором на стан двочастинкової системи (23), ми повинні побудувати нерелятивістське наближення для густини енергії $T_{0,0}(\mathbf{r})$. Для розв'язку цієї задачі найбільш придатним є саме представлення вторинного квантування, бо в цьому представленні гамільтоніан представляється інтегралом від деякої операторно-значної функції, яку можна прийняти за нерелятивістську границю густини енергії.

Нерелятивістський гамільтоніан системи кварк–антикварк в представленні вторинного квантування може бути записаний у вигляді:

$$\hat{H}=\hat{H}^{(0)}+\hat{H}^{(V)},$$

$$\hat{H}^{(0)}=\int d\mathbf{r}\left(\hat{\bar{q}}^{+}(\xi,\mathbf{r})\left(-\frac{1}{2m}\Delta\right)\hat{q}^{-}(\xi,\mathbf{r})\right)+ +\int d\mathbf{r}\left(\hat{q}^{+}(\xi,\mathbf{r})\left(-\frac{1}{2m}\Delta\right)\hat{\bar{q}}^{-}(\xi,\mathbf{r})\right),$$

$$\hat{H}^{(V)}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 V(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times \times\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\hat{\bar{q}}^{-}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\hat{q}^{-}(\xi_1,\mathbf{r}_1), \quad (27)$$

де $V(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$ – потенціальна енергія взаємодії кварка та антикварка, а m – маса кварка та антикварка, яка наближено вважається незалежною від аромату, бо зв'язаний стан існує за рахунок сильної взаємодії і іншими типами взаємодії ми нехтуємо.

Як відомо, при розгляді представлення двочастинкового гамільтоніана диференційними операторами, шляхом введення координат Якобі:

$$\mathbf{R}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2), \mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \tag{28}$$

його вдається представити у вигляді суми двох комутуючих операторів – гамільтоніана центра мас, який залежить тільки від $\mathbf{R}$ та внутрішнього гамільтоніана, що залежить лише від $\mathbf{r}$. Подібного представлення ми хочемо досягти й у випадку, коли гамільтоніан записаний через оператори народження та знищення. З цією метою зручно переписати одночастинкову частину гамільтоніана $\hat{H}^{(0)}$ у вигляді двочастинкового оператора. Щоб це зробити врахуємо, що внаслідок того, що ми розглядаємо нерелятивістське наближення, всі оператори можна розглядати на підпросторі простору Фока з фіксованою кількістю і складом частинок. В нашому випадку, ми розглядаємо підпростір станів, які містять один кварк та один антикварк. Базисні стани цього підпростору можна записати у вигляді:

$$|\xi_1,\xi_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\rangle=\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2)|0\rangle. \tag{29}$$

Якщо на довільну лінійну комбінацію станів (29) подіяти оператором

$$\hat{E}=\int d\mathbf{r}\hat{\bar{q}}^{+}(\xi,\mathbf{r})\hat{q}^{-}(\xi,\mathbf{r}), \tag{30}$$

то можна переконатися, що на підпросторі станів, які містять один кварк і один антикварк, оператор (30) відіграє роль одиничного. Аналогічну властивість має на тому ж підпросторі оператор

$$\hat{E}'=\int d\mathbf{r}\hat{q}^{+}(\xi,\mathbf{r})\hat{\bar{q}}^{-}(\xi,\mathbf{r}). \tag{31}$$

Якщо перший доданок в одночастинковій частині $\hat{H}^{(0)}$ гамільтоніана (27) помножити на одиничний оператор (31), а другий доданок – на (30), то отримаємо вираз одночастинкової частини в ефективно двочастинковому вигляді

$$\hat{H}^{(0)}=\left(-\frac{1}{2m}\right)\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\times$$
$$\times\Big(\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\,\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\,\Delta_1\hat{\bar{q}}^{-}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\,\hat{q}^{-}(\xi_1,\mathbf{r}_1)+$$
$$+\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\,\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\,\Delta_2\hat{\bar{q}}^{-}(\xi_2,\mathbf{r}_2)\,\hat{q}^{-}(\xi_1,\mathbf{r}_1)\Big). \tag{32}$$

Замінимо тепер одночастинкову частину гамільтоніана (27) на (32) і в отриманому після цього виразі перейдемо до змінних (28). Введемо також позначення

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_1(\mathbf{R},\mathbf{r})=\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{r},\quad \mathbf{r}_2(\mathbf{R},\mathbf{r})=\mathbf{R}+\frac{1}{2}\mathbf{r},\\
&\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{r}_1(\mathbf{R},\mathbf{r}))=\hat{\bar{q}}^{+}(1),\\
&\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{r}_2(\mathbf{R},\mathbf{r}))=\hat{q}^{+}(2),\\
&\hat{\bar{q}}^{-}(\xi_2,\mathbf{r}_2(\mathbf{R},\mathbf{r}))=\hat{\bar{q}}^{-}(2),\\
&\hat{q}^{-}(\xi_1,\mathbf{r}_1(\mathbf{R},\mathbf{r}))=\hat{q}^{-}(1).\\
&\hat{H}=\hat{H}^{(\mathbf{R})}+\hat{H}^{(\mathbf{r},V)},\\
&\hat{H}^{(\mathbf{R})}=\left(-\frac{1}{4m}\right)\int d\mathbf{R}d\mathbf{r}\times\\
&\times\hat{\bar{q}}^{+}(1)\,\hat{q}^{+}(2)\,\Delta_{\mathbf{R}}\hat{\bar{q}}^{-}(2)\,\hat{q}^{-}(1),\\
&\hat{H}^{(\mathbf{r},V)}=\int d\mathbf{R}d\mathbf{r}\times\\
&\times\hat{\bar{q}}^{+}(1)\,\hat{q}^{+}(2)\left(-\frac{1}{m}\Delta_{\mathbf{r}}+V(\mathbf{r})\right)\hat{\bar{q}}^{-}(2)\,\hat{q}^{-}(1).
\end{aligned} \tag{33}$$

Оператор $\hat{H}^{(\mathbf{R})}$ будемо називати гамільтоніаном центра мас, а оператор $\hat{H}^{(\mathbf{r},V)}$ – внутрішнім гамільтоніаном системи. При цьому гамільтоніан $\hat{H}$ може бути записаний у вигляді

$$\hat{H}=\int\hat{T}_{00}(\mathbf{R})d\mathbf{R}, \tag{34}$$

де оператор густини енергії $\hat{T}_{00}(\mathbf{R})$ може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_{00}(\mathbf{R})=T_{00}^{(\mathbf{R})}(\mathbf{R})+T_{00}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{R})+T_{00}^{(V)}(\mathbf{R}),\\
&T_{00}^{(\mathbf{R})}(\mathbf{R})=\left(-\frac{1}{4m}\right)\int d\mathbf{r}\times\\
&\times\hat{\bar{q}}^{+}(1)\,\hat{q}^{+}(2)\,\Delta_{\mathbf{R}}\hat{\bar{q}}^{-}(2)\,\hat{q}^{-}(1),\\
&T_{00}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{R})=\left(-\frac{1}{m}\right)\int d\mathbf{r}\times\\
&\times\hat{\bar{q}}^{+}(1)\,\hat{q}^{+}(2)\,\Delta_{\mathbf{r}}\hat{\bar{q}}^{-}(2)\,\hat{q}^{-}(1),\\
&T_{00}^{(V)}(\mathbf{R})=\int d\mathbf{r}\times\\
&\times\hat{\bar{q}}^{+}(1)\,\hat{q}^{+}(2)\,V(\mathbf{r})\,\hat{\bar{q}}^{-}(2)\,\hat{q}^{-}(1).
\end{aligned} \tag{35}$$

Співвідношення (34)–(35) визначають нерелятивістське наближення для оператора $\hat{T}_{00}(\mathbf{r})$, яке можна застосувати для побудови нерелятивістського наближення для генератора (26):

$$\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0}) = \hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})} + \hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})} + \hat{M}_{0,3}^{(V)},$$
$$\hat{M}_{0,3}^{(a)} = \int d\mathbf{R}(R_3 T_{0,0}^{(a)}(\mathbf{R})), \tag{36}$$

а індекс a набуває три можливі значення $a = \mathbf{R}, \mathbf{r}, V$.

Маючи нерелятивістське наближення для генератора (24) ми можемо подіяти зв'язаним із ним оператором (1) на нерелятивістське наближення для стану (23) і отримати таким чином амплітуду ймовірності цього стану в новій системі відліку. Для того щоб спростити дію операторної експоненти (1) на (23) врахуємо, що стан (23) є власним станом для внутрішнього гамільтоніана $\hat{H}^{(\mathbf{r},V)}$. Нас цікавить основний стан системи зв'язаних кварків, який в системі їх центра мас відповідає власному значенню, рівному масі адрона. Але для основного стану це власне значення є невиродженим. Тому, якщо ми доведемо, що генератор (24) комутує з внутрішнім гамільтоніаном, то це буде означати, що стан (23) є власним також і для генератора (24) і для оператора (1). Тому наша подальша мета – довести, що оператори $\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0})$ і $\hat{H}^{(\mathbf{r},V)}$ комутують. Для цього зручно перейти в імпульсне представлення, щоб виконати диференціювання операторних функцій від координат, які входять в оператори Лапласа у виразі для гамільтоніана (33). Для переходу в імпульсне представлення запишемо оператори (33), а також потенціальну енергію у вигляді:

$$\hat{\bar{q}}^{+}(1) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}_1 \hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1, \mathbf{p}_1)\exp(i(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{r}_1)),$$
$$\hat{\bar{q}}^{+}(2) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}_2 \hat{\bar{q}}^{+}(\xi_2, \mathbf{p}_2)\exp(i(\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{r}_2)),$$
$$\hat{\bar{q}}^{-}(2) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}_3 \hat{\bar{q}}^{+}(\xi_2, \mathbf{p}_3)\exp(i(\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{r}_2)), \tag{37}$$
$$\hat{\bar{q}}^{-}(1) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}_4 \hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1, \mathbf{p}_4)\exp(i(\mathbf{p}_4\cdot\mathbf{r}_1)),$$
$$V(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{k} V(\mathbf{k})\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})).$$

Тут $\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1, \mathbf{p}_1), \hat{q}^{+}(\xi_2, \mathbf{p}_2), \hat{\bar{q}}^{-}(\xi_2, \mathbf{p}_3), \hat{q}^{-}(\xi_1, \mathbf{p}_4)$ – оператори народження та знищення кварків в станах, власних для імпульсу. Окрім того, $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ позначають функції від $\mathbf{r}_1(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ і $\mathbf{r}_2(\mathbf{R}, \mathbf{r})$, що визначаються співвідношенням (33). Аргументи функцій $\mathbf{r}_1(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ і $\mathbf{r}_2(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ в (37) не виписані для скорочення запису.

Якщо підставити ці вирази в (35), і виконуючи потрібні інтегрування (деталі обчислень наведені в [20]), отримаємо вираз для внутрішнього гамільтоніана $\hat{H}(\mathbf{r})$:

$$\hat{H}^{(\mathbf{r})} = \int T_{00}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{R})d\mathbf{R} = \int d\mathbf{P}d\mathbf{p}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}\left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p}\right)\hat{q}^{+}\left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p}\right)\hat{q}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p}\right),$$
$$\hat{H}^{(V)} = \int T_{00}^{(V)}(\mathbf{R})d\mathbf{R} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{P}d\mathbf{p}d\mathbf{k}\times$$
$$\times V(\mathbf{k})\hat{\bar{q}}^{+}\left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p}\right)\times \tag{38}$$
$$\times\hat{q}^{+}\left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p} + \mathbf{k}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p} - \mathbf{k}\right).$$

Внутрішній гамільтоніан системи виражається через ці оператори таким чином:

$$\hat{H}^{(\mathbf{r},V)} = \hat{H}^{(\mathbf{r})} + \hat{H}^{(V)}. \tag{39}$$

Розглянемо тепер вираз генератора (36) в імпульсному представленні. Для $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})}$ маємо (тут введені позначення для нових змінних інтегрування $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_{12}, \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{P}_{34}$):

$$\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{P}_{12}d\mathbf{P}_{34}d\mathbf{p}\left(\frac{(\mathbf{P}_{34})^2}{4m}\right)\times$$
$$\times\bar{q}^{+}\left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12} - \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{+}\left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12} + \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{34} + \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{34} - \mathbf{p}\right)\times$$
$$\times\int R_3\exp(i(\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{34})\mathbf{R})d\mathbf{R}. \tag{40}$$

Змінну інтегрування $\mathbf{P}_{12}$ перепозначимо як $\mathbf{P}$, а замість $\mathbf{P}_{34}$ введемо нову змінну інтегрування $\boldsymbol{\varepsilon}$ за допомогою співвідношення

$$\mathbf{P}_{34} = \mathbf{P} - \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{41}$$

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2016. Т. 61, № 12

Після цих перетворень:

$$\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})} = -i \int d\mathbf{P} d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{p} \left(\frac{\partial \delta \left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \varepsilon_3} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right)^2}{4m} \right) \bar{q}^{+} \left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times \hat{q}^{+} \left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times \hat{\bar{q}}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) + \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times \hat{q}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) - \mathbf{p} \right). \tag{42}$$

Тут похідна від δ-функції Дірака розуміється в звичайному для узагальнених функцій сенсі інтегрування по частинах [21].

Аналогічно

$$\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})} = -i \int d\mathbf{P} d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{p} \left(\frac{\partial \delta \left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \varepsilon_3} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} \right) \bar{q}^{+} \left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times\ \hat{q}^{+} \left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times\ \hat{\bar{q}}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) + \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times\ \hat{q}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) - \mathbf{p} \right).$$
$$\hat{M}_{0,3}^{(V)} = \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3/2}} \int d\mathbf{P} d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{p} d\mathbf{k} \frac{\partial \delta \left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \varepsilon_3} \times \tag{43}$$
$$\times\ V\left(\mathbf{k}\right) \hat{\bar{q}}^{+} \left(\xi_1, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{P} - \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times\ \hat{q}^{+} \left(\xi_2, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{P} + \mathbf{p} \right) \times$$
$$\times\ \hat{\bar{q}}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) + \mathbf{p} + \mathbf{k} \right) \times$$
$$\times\ \hat{q}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\boldsymbol{\varepsilon}\right) - \mathbf{p} - \mathbf{k} \right).$$

Маючи вирази для генератора $\hat{M}_{0,3}$ і внутрішнього гамільтоніана, можемо розрахувати їх комутатор. Враховуючи те, що кожен з цих операторів складається з декількох доданків розглянемо комутатори між цими доданками. Для розрахунку комутаторів добутки операторів в одному та іншому порядку перед тим, як знаходити їх різницю зручно привести до нормальної форми за допомогою теореми Віка.

Раніше ми вже скористалися тим, що всі оператори розглядаються на підпросторі простору Фока, стани якого містять один кварк і один антикварк. Тому оператори, які в нормальній формі містять два, або більше кваркових оператори (народження або знищення), чи антикваркових оператори будуть мати на тому підпросторі простору Фока, який ми розглядаємо, матричні елементи рівні нулю для всіх базисних елементів цього підпростору. Тому такі оператори ми будемо відкидати. Враховуючи те, що кожен з операторів, які ми розглядаємо, містить по одному кварковому та одному антикварковому оператору, їх добуток буде містити по два кваркових оператора та два антикваркових оператора. Тобто цей добуток буде містити "зайві" оператори. Застосовуючи до цього добутку теорему Віка, отримуємо, що ненульові матричні елементи на просторі, що розглядається матимуть тільки ті доданки, в яких "зайві" оператори спарені між собою.

Розглянемо добуток $\hat{H}^{(\mathbf{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})}$. Після приведення до нормальної форми і відкидання доданків, що мають нульові матричні елементи, а також врахування δ-функцій, що виникають за рахунок спарювань, цей добуток можна записати у вигляді (більш детальні обчислення наведені в [20]):

$$\hat{H}^{(\mathbf{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})} = -i \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\varepsilon} \left(\frac{\partial \delta \left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \varepsilon_3} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\left(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\right)^2}{4m} \right) \left(\frac{\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}\right)^2}{4m} \right) \times$$
$$\times \hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1, \mathbf{p}_1) \hat{q}^{+}(\xi_2, \mathbf{p}_2) \times$$
$$\times \hat{\bar{q}}^{-} \left(\xi_2, \mathbf{p}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \hat{q}^{-} \left(\xi_1, \mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \right). \tag{44}$$

У випадку множення тих самих операторів в зворотному порядку після аналогічних перетворень маємо:

$$\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})}\hat{H}^{(\mathbf{r})} = -i \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 d\boldsymbol{\varepsilon} \times$$
$$\times \left(\frac{\left(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4\right)^2}{4m} \right) \left(\frac{\left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}\right)^2}{4m} \right) \left(\frac{\partial \delta \left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial \varepsilon_3} \right) \times$$
$$\times \delta \left(\left(\mathbf{p}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \right) - \mathbf{p}_3 \right) \delta \left(\left(\mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \right) - \mathbf{p}_4 \right) \times$$
$$\times \bar{q}^{+}\left(\xi_1, \mathbf{p}_1\right) \hat{q}^{+}\left(\xi_2, \mathbf{p}_2\right) \hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2, \mathbf{p}_3\right) \hat{q}^{-}\left(\xi_1, \mathbf{p}_4\right). \tag{45}$$

Якщо тепер в цьому виразі виконати інтегрування по компонентах $\mathbf{p}_3$ і $\mathbf{p}_4$, то отримаємо результат, який збігається з (44). Аналогічно можна показати [20], що оператор $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{R})}$ комутує з іншими доданками внутрішнього гамільтоніана, і тому він комутує з усім внутрішнім гамільтоніаном зв'язаної системи кварків.

Перейдемо тепер до розрахунку комутаторів оператора $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ з доданками внутрішнього гамільтоніана. За допомогою перетворень, аналогічних розглянутим вище, добуток $\hat{H}^{(\mathbf{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ приводиться до вигляду:

$$\hat{H}^{(\mathbf{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})} = -i\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 d\boldsymbol{\varepsilon}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\delta\left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial\varepsilon_3}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\right)^2}{4m}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\right)^2}{4m}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}\left(\xi_1,\mathbf{p}_1\right)\hat{q}^{+}\left(\xi_2,\mathbf{p}_2\right)\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_1,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (46)$$

До такого самого результату приводить приведення до нормальної форми добутку тих самих операторів в оберненому порядку. Таким чином $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ і $\hat{H}^{(\mathbf{r})}$ – комутують між собою.

Розрахунок добутку $\hat{H}^{(V)}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ приводить до результату

$$\hat{H}^{(V)}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})} = \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{k}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\delta\left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial\varepsilon_3}\right)V\left(\mathbf{k}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1+2\mathbf{k}\right)^2}{4m}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{p}_1)\,\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{p}_2)\,\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2+\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_1,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (47)$$

Розрахунок добутку цих самих операторів в оберненому порядку $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}\hat{H}^{(V)}$ дає результат, який не збігається з (47), тобто оператори $\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ і $\hat{H}^{(V)}$ не комутують між собою:

$$\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}\hat{H}^{(V)} = \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{k}\times$$
$$\times V\left(\mathbf{k}\right)\left(\frac{\partial\delta\left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial\varepsilon_3}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\right)^2}{4m}\right)\times$$
$$\times\bar{q}^{+}\left(\xi_1,\mathbf{p}_1\right)\hat{q}^{+}\left(\xi_2,\mathbf{p}_2\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2+\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (48)$$

Але:

$$\hat{M}_{0,3}^{(V)}\hat{H}^{(\mathbf{r})} = \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{k}\times$$
$$\times\frac{\partial\delta\left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial\varepsilon_3}V\left(\mathbf{k}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1+2\mathbf{k}\right)^2}{4m}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}\left(\xi_1,\mathbf{p}_1\right)\hat{q}^{+}\left(\xi_2,\mathbf{p}_2\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2+\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_1,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (49)$$

і

$$\hat{H}^{(\mathbf{r})}\hat{M}_{0,3}^{(V)} = \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{k}\times$$
$$\times\frac{\partial\delta\left(2\boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\partial\varepsilon_3}V\left(\mathbf{k}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\right)^2}{m}\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}\left(\xi_1,\mathbf{p}_1\right)\hat{q}^{+}\left(\xi_2,\mathbf{p}_2\right)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2+\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_1,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (50)$$

Враховуючи те, що вирази $\hat{H}^{(V)}\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}$ (47) і $\hat{M}_{0,3}^{(V)}\hat{H}^{(\mathbf{r})}$ (49) входять в загальний вираз для комутатора $[\hat{H}^{(\mathbf{r},V)},\hat{M}_{0,3}]$ з протилежними знаками і що те саме можна сказати про (48) і (50), дістаємо висновку:

$$[\hat{H}^{(\mathbf{r})},\hat{M}_{0,3}^{(V)}]+[\hat{H}^{(V)},\hat{M}_{0,3}^{(\mathbf{r})}]=0. \quad (51)$$

Нарешті розрахунки добутків $\hat{M}_{0,3}^{(V)}\hat{H}^{(V)}$ і $\hat{H}^{(V)}\hat{M}_{0,3}^{(V)}$ приводять до одного й того самого результату:

$$\hat{M}_{0,3}^{(V)}\hat{H}^{(V)} = \hat{H}^{(V)}\hat{M}_{0,3}^{(V)} =$$
$$= \frac{-i}{\left(2\pi\right)^{3}}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{p}' d\mathbf{k}'\frac{\partial\delta(2\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_3}V(\mathbf{k})V(\mathbf{k}')\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{+}(\xi_1,\mathbf{p}_1)\hat{q}^{+}(\xi_2,\mathbf{p}_2)\times$$
$$\times\hat{\bar{q}}^{-}\left(\xi_2,\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_2+\mathbf{k}'+\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\hat{q}^{-}\left(\xi_1,\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_1-\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\right). \quad (52)$$

Таким чином, якщо розбити комутатор $[\hat{H}^{(\mathbf{r},V)}, \hat{M}_{0,3}]$ на доданки, що відповідають доданкам внутрішнього гамільтоніана і генератора, то сума всіх цих доданків дорівнює нулю, тобто

$$[\hat{M}_{0,3}, \hat{H}^{(\mathbf{r},V)}] = 0. \tag{53}$$

Отже, як зазначалося вище, внаслідок того, що стан (23) є власним станом для внутрішнього гамільтоніана, який відповідає невиродженому власному значенню, наслідком (53) є те, що цей стан повинен бути власним і для генератора буста:

$$\hat{M}_{0,3}\,|\mu\rangle = m_{0,3}\,|\mu\rangle, \tag{54}$$

де $m_{0,3}$ відповідне стану $|\mu\rangle$ власне значення генератора $\hat{M}_{0,3}$.

Для того, щоб визначити власне значення $m_{0,3}$ скористаємось властивостями симетрії власного стану $|\mu\rangle$. Зокрема цей стан повинен переходити сам у себе при довільній інверсії координатних осей. Окрім того, якщо вважати потенціал взаємодії між кварком та антикварком сферично симетричним, то й основний стан цієї системи повинен бути сферично-симетричним, тобто таким, що переходить сам в себе при довільному оберті. Якщо позначити унітарний оператор, який представляє інверсію або оберт на підпросторі простору Фока, який ми розглядаємо через $\hat{U}^{(I,R)}$, то маємо

$$\hat{U}^{(I,R)}\,|\mu\rangle = |\mu\rangle. \tag{55}$$

З урахуванням цього, (54) можемо переписати

$$\hat{M}_{0,3}\hat{U}^{(I,R)}\,|\mu\rangle = m_{0,3}\hat{U}^{(I,R)}\,|\mu\rangle, \tag{56}$$

або

$$\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1}\hat{M}_{0,3}\hat{U}^{(I,R)}\,|\mu\rangle = m_{0,3}\,|\mu\rangle. \tag{57}$$

Оператор $\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1}\hat{M}_{0,3}\hat{U}^{(I,R)}$ пов'язаний з $\hat{M}_{0,3}$ тензорним законом перетворення. Це означає, що якщо вибрати інверсію або оберт, який змінює напрям осі OZ на протилежний, то матимемо:

$$\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1}\hat{M}_{0,3}\hat{U}^{(I,R)} = -\hat{M}_{0,3}. \tag{58}$$

Але тоді, підставляючи (58) в (57) з урахуванням (54) отримуємо, що

$$m_{0,3} = 0. \tag{59}$$

Таким чином, якщо позначити через $|\mu'\rangle$ стан системи двох зв'язаних частинок відносно системи відліку, яка отримується з системи центра мас цих частинок за допомогою буста уздовж осі OZ з бистротою Y, то матимемо

$$|\mu'\rangle = \exp(i\hat{M}_{0,3}Y)\,|\mu\rangle. \tag{60}$$

Але з урахуванням (54) і (59) бачимо, що з усього ряду, який представляє операторну експоненту $\exp(i\hat{M}_{0,3}Y)$ після дії на стан $|\mu\rangle$, відмінний від нуля результат дасть лише доданок, що містить одиничний оператор. Отже маємо

$$|\mu'\rangle = |\mu\rangle. \tag{61}$$

Цей результат збігається з отриманим раніше в представленні диференціальними операторами результатом (19). Отже можемо зробити висновок, що внутрішній стан нерелятивістської системи зв'язаних частинок не змінюється, у випадку переходу за допомогою буста до системи відліку, відносно якої ця зв'язана система має релятивістську енергію-імпульс. Зазначимо, що цей висновок вже з'являвся в літературі [22], але без будь-яких обґрунтувань.

4. Розгляд задачі про перетворення стану з загальних теоретико-групових міркувань

У попередніх розділах ми розглянули два різних представлення генератора буста $\hat{M}_{0,3}$ і отримали схожі результати. Тому виникає питання наскільки ці результати можливо узагальнити. Цього узагальнення можна досягти розглядаючи задачу за допомогою загальних теоретико-групових міркувань. Розглянемо генератори групи Пуанкаре. Маємо чотири генератори просторово-часових зсувів $\hat{P}_a, a = 0,1,2,3$, та шість лоренцевих генераторів $\hat{M}_{a,b} = -\hat{M}_{b,a}$. Комутаційні співвідношення між цими генераторами залежать тільки від закону групового множення і ті особливості перетворення станів квантових систем взаємодіючих частинок, про які говорилося вище, на ці комутаційні співвідношення не впливають. Також ці комутаційні співвідношення не залежать від представлення генераторів, тому ми їх можемо розглядати без явного вигляду цих генераторів. Як відомо з [23], оператор $g^{a,b}\hat{P}_a\hat{P}_b$ комутує з усіма генераторами групи Пуанкаре і зокрема з цікавлячим нас генератором $\hat{M}_{0,3}$. Враховуючи те, що згідно з постулатом квантування полів [18] генератор $\hat{P}_0$ повинен збігатися з повним гамільтоніаном системи, а оператори $\hat{P}_b, b = 1, 2, 3$ – з операторами компонент імпульсу, бачимо, що оператор $g^{a,b}\hat{P}_a\hat{P}_b$ тоді збігається з квадратом внутрішнього гамільтоніана системи, бо всі власні значення цього оператора дорівнюють квадратам власних значень внутрішньої енергії системи частинок, що розглядаються.

Отже генератор буста комутує з квадратом внутрішнього гамільтоніана незалежно від представлення цих операторів і незалежно від можливості застосувати нерелятивістське наближення в системі центра мас частинок, що розглядаються. Якщо таке наближення можливе, як у випадку, який нас цікавить, то тоді власний стан, який відповідає найменшому власному значенню квадрата внутрішнього гамільтоніана є таким, що відповідає невиродженому власному значенню. Тоді внаслідок комутативності операторів $g^{a,b}\hat{P}_a\hat{P}_b$ і $\hat{M}_{0,3}$ отримуємо, що цей стан є власним і для $\hat{M}_{0,3}$, звідки, як ми бачили, випливає, що цей стан не змінюється при бусті. Отже, як бачимо, найбільш суттєвою обставиною є невиродженість основного стану зв'язаної системи.

Тому можна сказати, що з комутаційних співвідношень між генераторами групи Пуанкаре випливає, що, якщо внутрішній стан системи взаємодіючих частинок (тобто власний стан квадрата внутрішнього гамільтоніана системи) є невиродженим, то він не змінюватиметься при бусті.

5. Обговорення результатів і висновки

Як відомо, основний стан системи з центральною взаємодією є сферично-симетричним. З отриманого результату випливає, що при переході до нової системи він не зміниться. Тобто він залишиться сферично-симетричним, і не піддасться лоренцевому скороченню. Як вже зазначалося вище, висновок, подібний до нашого було зроблено в літературі досить давно [22]. Але вказана робота присвячена іншим питанням, тому, мабуть, обґрунтування цього твердження не було метою автора.

Автори усвідомлюють, що висновок про відсутність скорочення протирічить підходу, який використовується в більшості робіт, наприклад, [24], або [25], а також [26] використовується представлення про те, що форма адрона змінюється при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої, або в геометричних моделях, як, наприклад, [27], які базуються на тому, що адрон внаслідок лоренцева скорочення можна представляти у вигляді "чорного диску".

З приводу зазначеного протиріччя ми хотіли б зазначити таке. По-перше, наш результат не протирічить теорії відносності. Щоб показати це, ми в додатку до роботи [28] розглянули задачу про залежність відстані між двома класичними (в сенсі не квантовими) релятивістськими частинками, що рухаються по заданих законах в їх системі центра мас. Залежність від часу відстані між тими ж частинками, але виміряна в іншій інерційній системі відліку, вочевидь, може бути розрахована за допомогою самих лише перетворень Лоренца. В додатку показано, що можна задати такий закон руху частинок, що спостерігачі в різних інерційних системах відліку отримуватимуть при вимірюванні одну й ту саму залежність відстані відносно "своєї" системи відліку від часу відносно цієї системи відліку. Тобто в цій задачі також скорочення не відбувається і це є таким самим наслідком одних лише перетворень Лоренца, як і існування скорочення в задачі про стрижень.

По-друге, в задачі про стрижень ніколи не розглядається його внутрішній стан. Зрозуміло, що цей стан не має нічого спільного із станами, розглянутими в цій роботі. Тому й результати роботи не мають відношення до перетворення цього стану. Питання про такі стані і їх перетворення виходить далеко за межи питань, які розглядалися в цій роботі.

По-третє, окрім наведених вище детальних аргументів на користь зробленого висновку, можемо також додати ще один аргумент "з загальних міркувань". Якщо ми розглянемо мезон із нульовим спіном, то його внутрішній момент імпульсу повинен дорівнювати нулю. Але це означає, що цей стан повинен бути сферично-симетричним. При цьому внутрішній момент імпульсу мезона повинен залишатись рівним нулю в довільній системі відліку. Але, якщо стан переставав би бути сферично-симетричним внаслідок лоренцева скорочення, то внутрішній момент імпульсу переставав би дорівнювати нулю. Тобто в новій системі відліку у мезона з'являвся б ненульовий спін.

Результат, отриманий у цій роботі, є важливим для подальшого розгляду. Зокрема, він дозволяє далі розвити метод багаточастинкових полів для опису адронів у процесах розсіяння [5, 6]. В межах цього методу вдається не тільки розглядати процеси розсіяння адронів як багатокваркових систем, а й описати конфайнмент кварків і глюонів.

1. І.В. Шарф, А.В. Тіхонов, Г.О. Сохранний, К.В. Яткін, М.А. Делієргієв та ін. Метод Лапласа для опису непружного розсіяння адронів і нові механізми зростання перерізів. *УФЖ* **56**, 1151 (2011).
2. I. Sharph, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, M. Deliyergiyev, N. Podolyan *et al.* On the role of longitudinal momenta in high energy hadron-hadron scattering. *Central Eur. J. Phys.* **10**, 858 (2012) [DOI: 10.2478/s11534-012-0056-5].
3. I.V. Sharph *et al.* The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams. arXiv:1509.04329 (2015).
4. I.V. Sharf, K.K. Merkotan, N.A. Podolyan, D.A. Ptashynskyy, A.V. Tykhonov *et al.* Gluon Loops in the Inelastic Processes in QCD. arXiv:1210.3490 (2012).
5. Yu.V. Volkotrub *et al.* Multi-particle field operators in quantum field theory. arXiv:1510.01937 (2015).
6. N. Chudak, M. Deliyergiyev, K. Merkotan, O. Potiienko, D. Ptashynskyi, Y. Shabatura, G. Sokhrannyi, A. Tykhonov, Y. Volkotrub, I. Sharph, V. Rusov. Multiparticle quantum fields. *Phys. J.* **2** (3), 181 (2016).
7. Р. Фейнман. *Взаимодействие фотонов с адронами.* (Мир, 1975).
8. M. Diehl, D. Ostermeier, A. Schafer. Elements of a theory for multiparton interactions in QCD. *JHEP* **1203**, 089 (2012) [DOI: 10.1007/JHEP03(2012)089].
9. M. Strikman. Transverse structure of the nucleon and multiparton interactions. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **187**, 289 (2011). [DOI: 10.1143/PTPS.187.289].
10. А.П. Кобушкин, В.П. Шелест. Релятивистские уравнения для связанных состояний кварков. *ТМФ* **31**, 156 (1977).
11. R.N Faustov. Relativistic wavefunction and form factors of the bound system. *Ann. Phys.* **78** (1), 176 (1973) [DOI: 10.1016/0003-4916(73)90007-9].
12. E.E. Salpeter, H.A. Bethe. A Relativistic equation for bound state problems. *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951) [DOI: 10.1103/PhysRev.84.1232].
13. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Quasi-optical approach in quantum field theory. *Nuovo Cimento* **29** (2), 380 (1963) [DOI: 10.1007/BF02750359].
14. S.J. Brodsky, H.-C. Pauli, S.S. Pinsky. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone. *Phys. Rept.* **301**, 299 (1998) [DOI: 10.1016/S0370-1573(97)00089-6].
15. T. Heinzl. *Light Cone Dynamics of Particles and Fields.* PhD thesis (Regensburg U., 1998). http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0300475.
16. М.В. Терентьев. О структуре волновых функций мезонов как связанных состояний кварков. *ЯФ* **24** (1), 207 (1976).
17. P.A.M. Dirac. Forms of relativistic dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949) [DOI: 10.1103/RevModPhys.21.392].
18. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, 1984).
19. Ф.А. Березин. *Метод вторичного квантования* (Наука, 1986).
20. M.A. Deliyergiyev, A.G. Kotanzhyan, K.K. Merkotan, N.O. Podolian, O.S. Potiyenko *et al.* Transformation of the nonrelativistic quantum system under transition from one inertial reference frame to another. arXiv:1307.2280v5 (2013).
21. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. *Обобщенные функции и действия над ними* (ГИФМЛ, 1959).
22. В.А. Карманов. Релятивистские составные системы в динамике на световом фронте. *ФЭЧАЯ* **19** (3), 525 (1988).
23. Л. Райдер. *Квантовая теория поля* (Мир, 1985).
24. Xiangdong Ji. Generalized parton distributions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **54** (1), 413 (2004) [DOI: 10.1146/annurev.nucl.54.070103.181302].
25. C. Alexandrou, C.N. Papanicolas, M. Vanderhaeghen. Colloquium: The shape of hadrons. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1231 (2012) [DOI: 10.1103/RevModPhys.84.1231].
26. И.М. Дремин. Упругое рассеяние адронов. *Успехи физических наук* **183** (1), 3 (2013) [DOI: 10.3367/UFNr.0183.201301a.0003].
27. R. Conceicao, J. Dias de Deus, M. Pimenta. Proton–proton cross-sections: The interplay between density and radius. *Nucl. Phys. A* **888**, 58 (2012) [DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2012.02.019].
28. I.V. Sharph *et al.* The state of nonrelativistic quantum system in a relativistic reference frame. arXiv:1403.3114 [hep-ph].
29. А.А. Дувіряк. Застосування двочастинкового рівняння Дірака у спектроскопії мезонів. *Журнал фізичних досліджень* **10**, 290 (2006).

Одержано 01.05.16

N.O. Chudak, K.K. Merkotan, D.A. Ptashynskyy, O.S. Potiyenko, M.A. Deliyergiyev, A.V. Tykhonov, G.O. Sokhrannyi, O.V. Zharova, O.D. Berezovs'kyi, V.V. Voitenko, Yu.V. Volkotrub, I.V. Sharph, V.D. Rusov

INTERNAL STATES OF HADRONS
IN RELATIVISTIC REFERENCE FRAMES

S u m m a r y

The internal state of an aggregate of a few bound particles and its transformation, when changing from the reference frame, where this combined particle is at rest, to a reference frame, where it moves relativistically, have been considered. It is supposed that the internal state of the combined particle in its rest frame can be considered in the non-relativistic approximation. This internal state is shown to remain the same, when changing from one inertial reference frame to another one. In other words, a particle that is spherically symmetric in its rest frame does not change its form in any other reference frame and does not undergo the Lorentz contraction in the direction of motion of any reference frame with respect to the rest one. A possible application of the results obtained to describe the scattering of hadrons considered as bound states of quarks has been discussed.