

І.О. ВАКАРЧУК, О.І. ГРИГОРЧАК, В.С. ПАСТУХОВ, Р.О. ПРИТУЛА

Львівський національний університет ім. Івана Франка  
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: chair@franko.lviv.ua)**ЕФЕКТИВНА МАСА АТОМА  ${}^4\text{He}$   
В НАДПЛИННІЙ І НОРМАЛЬНІЙ ФАЗАХ**

УДК 538.941

*Знайдено вираз для температурної залежності ефективної маси атома  ${}^4\text{He}$  в надплинній і нормальній фазах, який дозволяє усунути інфрачервоні розбіжності і є застосовним при всіх температурах за винятком вузької флуктуаційної області  $0,97 \lesssim T/T_c \leq 1$ . В границі високих і низьких температур, а також в границі виключення взаємодії, отриманий вираз дає відомі результати. На основі ефективної маси розраховано хід кривої теплоємності, а також знайдено температуру фазового переходу  $T_c \approx 2,18$  К. Використовуючи запропонований в роботі підхід, отримано значення малого критичного індексу  $\eta$  в наближенні хаотичних фаз, яке відтворює вже відомий результат цього наближення.*

*Ключові слова:* рідкий  ${}^4\text{He}$ , ефективна маса, критична температура, критичні індекси.

**1. Вступ**

Вперше ідея про те, що перехід рідкого  ${}^4\text{He}$  в надплинний стан пов'язаний з явищем бозе-ейнштейнівської конденсації, була висловлена Ф. Лондоном [1]. Саме "близькість" температури бозе-конденсації ідеального газу з параметрами гелію до температури переходу в реальному  ${}^4\text{He}$  наштовхнула його на цю здогадку. І хоча таке трактування фазового переходу не позбавлене труднощів [2], але загалом коректно описує сучасні експерименти з холодними газами [3, 4].

До нерозв'язаних до сьогодні проблем в теорії рідкого  ${}^4\text{He}$  можна віднести мікроскопічний розрахунок термодинамічних функцій у всій області температур та температури переходу в надплинний стан, яка б узгоджувалась з експериментальним значенням. На якісному рівні пониження критичної температури обґрунтував Фейнман [5] введенням ефективної маси частинок. Використовуючи інтуїтивні міркування, він дійшов до висновку, що ефективна маса внаслідок ефектів взаємодії між частинками повинна бути більшою за масу атомів. Ці висновки справедливі і для двовимірних систем [6]. Хоча існує і конкуруючий механізм. Відштовхування на малих відстанях ефективно збільшує густину системи, а, отже, збільшує температуру бозе-конденсації, що й підтвер-

джується результатами теоретичних розрахунків [7–11] та Монте-Карло симуляцій для моделі слабонеідеального бозе-газу [12, 13]. Для узгодження експериментальних результатів для  ${}^4\text{He}$  на вайкорі з теоретичними розрахунками доводиться одночасно враховувати як ефект перенормування маси атомів, так і зсув, пов'язаний з відштовхувальною частиною взаємодії між частинками [14].

В літературі переважно аналізувалось значення ефективної маси при низьких температурах [15–19], а в роботах [20, 21] за допомогою варіаційного підходу отримана і температурна залежність. Властивості гелію в нормальній фазі досліджувались в роботах [22, 23], де для узгодження розрахованих структурних функцій з експериментальними кривими була використана ефективна маса частинок як підгоночний параметр. В роботі [24] показано спосіб розрахунку ефективної маси атома  ${}^4\text{He}$  в рідині, яка дозволяє усунути інфрачервоні розбіжності, що є характерними для теорії фазових переходів. Недоліком запропонованого в цій роботі підходу є слабообґрунтований спосіб екстраполяції "затравочної" ефективної маси на широку область температур (лише на основі її виразу для нуля температур), а також некоректна поведінка отриманої величини ефективної маси в критичній області. Інший підхід до розрахунку ефективної маси був запропонований в роботі [25], де з її допомогою було знайдено температурну поведінку теплоємності і показано значно краще узгодження з експери-

© І.О. ВАКАРЧУК, О.І. ГРИГОРЧАК,  
В.С. ПАСТУХОВ, Р.О. ПРИТУЛА, 2016

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2016. Т. 61, № 1

ментальними даними в порівнянні з розрахунком на основі “голої маси”. Однак отриманий у цьому підході вираз для ефективної маси не усуває згадані інфрачервоні розбіжності, оскільки ідеологія його розрахунку не брала до уваги цієї мети.

Завданням цієї роботи є знайти такий вираз для ефективної маси, який би, з одного боку, усував інфрачервоні розбіжності, а з іншої – давав коректну поведінку в околі критичної точки (за винятком, хіба що, вузької флуктуаційної області) і був краще теоретично обґрунтований в широкотемпературній ділянці; а також отримати температурну поведінку теплоємності з новою ефективною масою і провести порівняння з попередніми результатами.

## 2. Загальні викладки

Для розрахунку теплоємності багатобозонної системи ми скористаємося виразом для внутрішньої енергії в наближенні парних кореляцій [24, 25], який можна отримати в результаті усереднення гамільтоніана системи з матрицею густини, знайденою в [26]:

$$\begin{aligned}
 E = & N \frac{mc^2}{2} + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\bar{z}_0^{-1} e^{\beta \bar{\varepsilon}_q} - 1} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\bar{m}}{m} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \frac{\partial \bar{S}_0(q)}{\partial \beta} + \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q (\lambda_q^2 + \alpha_q^2 - 1) S(q) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left[ \frac{\alpha_q}{\text{sh}(\beta E_q)} - \frac{1}{\text{sh}(\beta \varepsilon_q)} \right] + \\
 & + \frac{1}{16} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \varepsilon_q \left( 1 - \frac{1}{\alpha_q^2} \right) \left( \alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} - 4\alpha_q^2 \right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

де  $\bar{m}$  – ефективна маса,  $\bar{\varepsilon}_q = \hbar^2 q^2 / 2\bar{m}$ ,  $\bar{z}_0$ ,  $\bar{S}_0(q)$  – перенормовані відповідно одночастинковий спектр, активність і структурний фактор ідеального бозе-газу;  $E_q = \alpha_q \varepsilon_q$  – спектр елементарних збуджень Боголюбова,  $\alpha_q = \sqrt{1 + 2N\nu_q / (V\varepsilon_q)}$  – боголюбівський фактор,  $\nu_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}} \Phi(R) d\mathbf{R}$  – фур’є-образ потенціалу парної міжчастинкової взаємодії  $\Phi(R)$ ,  $S(q)$  – структурний фактор бозерідини в наближенні парних кореляцій:

$$S(q) = \frac{\bar{S}_0(q)}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)}, \quad (2)$$

$$\lambda_q = \alpha_q \text{th} \left[ \frac{\beta}{2} E_q \right] - \text{th} \left[ \frac{\beta}{2} \varepsilon_q \right]. \quad (3)$$

Розподіл бозе-частинок з новим спектром є таким:

$$\bar{n}_p = \frac{1}{\bar{z}_0^{-1} e^{\beta \bar{\varepsilon}_p} - 1}, \quad (4)$$

а сам перенормований одночастинковий спектр  $\bar{\varepsilon}_p$  вибраний у вигляді:

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + \Delta_p - \Delta_0, \quad (5)$$

де  $\Delta_p$  – поправка до спектра, яку потрібно визначити. Величина  $\Delta_0$  залежить тільки від температури і фактично відповідає за перенормування активності. Після усунення інфрачервоних розбіжностей для  $\Delta_p$  отримано [24]:

$$\Delta_p = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}. \quad (6)$$

Вираз для перенормованого одночастинкового спектра (5) можна записати і в такий спосіб:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}(p)}, \quad (7)$$

де величину  $\bar{m}(p)$  трактуємо як повну ефективну масу частинки, залежну від модуля хвильового вектора  $\mathbf{p}$ . Такий вигляд спектра  $\bar{\varepsilon}_p$  був запропонований у роботі [27] для усунення інфрачервоних розбіжностей. Нагадаємо, що ефективна маса  $\bar{m}$  формується багаточастинковими кореляціями, починаючи з чотиричастинкових і, узагалі кажучи, є залежною від модуля імпульсу  $p$ . Зрозуміло, що нас цікавитиме поведінка  $\bar{m}(p)$  при  $p \rightarrow 0$ , і під повною ефективною масою будемо розуміти величину  $\bar{m} = \bar{m}(0)$ . У зв’язку з цим ми докладніше розглянемо різницю  $\Delta_p - \Delta_0$  при  $p \rightarrow 0$ .

При малих значеннях  $p$  перенормований спектр (5) запишемо так [24]:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}
 \frac{m^*}{\bar{m}} = & 1 + \frac{1}{2\pi^2 \rho} \int_0^\infty \frac{q^2 \lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \times \\
 & \times \bar{n}_q (1 + \bar{n}_q) \left[ \frac{2}{3} \beta \varepsilon_q (1 + 2\bar{n}_q) - 1 \right] dq. \quad (9)
 \end{aligned}$$

В нашій теорії для температурної залежності “затравочної” ефективної маси  $m^*$  використаємо вираз, який знайдено в роботі [25]:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m^*} = & 1 - \frac{1}{3N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{(\alpha_{\mathbf{q}} - 1)^2}{\alpha_{\mathbf{q}}(\alpha_{\mathbf{q}} + 1)} - \\ & - \frac{2}{3N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{q}}^2 + 3}{\alpha_{\mathbf{q}}^2 - 1} [n(\beta\varepsilon_{\mathbf{q}}) - 1/(\beta\varepsilon_{\mathbf{q}})] - \right. \\ & - \frac{3\alpha_{\mathbf{q}}^2 + 1}{\alpha_{\mathbf{q}}(\alpha_{\mathbf{q}}^2 - 1)} [n(\beta E_{\mathbf{q}}) - 1/(\beta E_{\mathbf{q}})] + \\ & \left. + 2 [1/(\beta\varepsilon_{\mathbf{q}}) - \beta\varepsilon_{\mathbf{q}}n(\beta\varepsilon_{\mathbf{q}})[1 + n(\beta\varepsilon_{\mathbf{q}})]] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут зроблено таке позначення:  $n(x) = 1/(e^x - 1)$ .

Неважко побачити, що розбіжність в критичній точці правої частини рівності (9) “сидить” в підінтегральному виразі в області малих значень хвильового вектора  $q$  і є логарифмічною за своєю природою, що буде показано згодом. Така розбіжність є характерною для критичних явищ. Наше завдання полягає в тому, щоб виділити цю неаналітичність і знайти коректний вираз для ефективної маси. Для цього повернемося до рівності, яка випливає з роботи [24]:

$$\frac{m^*}{\bar{m}} = 1 + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_p - \Delta_0}{\varepsilon_p}, \quad (11)$$

де

$$\Delta_p - \Delta_0 = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{1 + \lambda_{\mathbf{q}} \bar{S}_0(q)} \{ \bar{n}_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|} - \bar{n}_{\mathbf{q}} \}. \quad (12)$$

З виразу (12) виділимо величину  $\Delta_{\infty}$ , яка містить всю неаналітичність і водночас є набагато зручнішою для аналізу:

$$\begin{aligned} \Delta_{\infty} = & \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_{\mathbf{q}}}{1 + \lambda_{\mathbf{q}} \bar{S}_0(q)} \left\{ \frac{1}{\bar{z}_0^{-1} - 1 + \bar{z}_0^{-1} \beta \bar{\varepsilon}_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{z}_0^{-1} - 1 + \bar{z}_0^{-1} \beta \bar{\varepsilon}_{\mathbf{q}}} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Наступний крок – це знайти розклад  $\Delta_{\infty}$  в околі малих значень  $p$  і обмежитися доданками, пропорційними до  $p^2$ , оскільки лише вони будуть давати внесок у величину ефективної маси в силу рівності (11).

У правій частині рівності (13) перейдемо від підсумовування до інтегрування:

$$\begin{aligned} \Delta_{\infty} = & \frac{p_0^2 \bar{z}_0}{4\pi^2 \beta \rho} \int_0^{\infty} \frac{\lambda_{\mathbf{q}} dq}{1 + \lambda_{\mathbf{q}} \bar{S}_0(q)} \times \\ & \times \left\{ \frac{q}{2p} \ln \left| \frac{P_0^2 + (q+p)^2}{P_0^2 + (q-p)^2} \right| - \frac{2q^2}{P_0^2 + q^2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $p_0^2 = 2\bar{m}/(\beta\hbar^2)$ ,  $P_0 = p_0\sqrt{(1 - \bar{z}_0)}$ . В докритичній області активність  $\bar{z}_0 = 1$ , а тому в цій області  $P_0 = 0$  і отримані нами вирази дещо спростяться.

Зробимо заміну змінних:  $q/p = x$ ,  $dq = pdx$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_{\infty} = & \frac{p_0^2 \bar{z}_0 p}{4\pi^2 \beta \rho} \int_0^{\infty} \frac{\lambda_{px}}{1 + \lambda_{px} \bar{S}_0(px)} \times \\ & \times \left\{ \frac{x}{2} \ln \left| \frac{P_0^2/p^2 + (x+1)^2}{P_0^2/p^2 + (x-1)^2} \right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2 + x^2} \right\} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Функція  $\lambda_{px}/(1 + \lambda_{px} \bar{S}_0(px))$  є обмеженою і прямує до нуля, коли  $x \rightarrow \infty$  (при фіксованому  $p$ ), а функція

$$\frac{x}{2} \ln \left| \frac{P_0^2/p^2 + (x+1)^2}{P_0^2/p^2 + (x-1)^2} \right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2 + x^2}$$

в області  $x > 1$  є спадаючою до нуля, при цьому

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{x}{2} \ln \left| \frac{P_0^2/p^2 + (x+1)^2}{P_0^2/p^2 + (x-1)^2} \right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2 + x^2} \right\} dx = 0$$

для будь-яких значень  $P_0$  і  $p$ . Це дає підстави стверджувати (особливо, коли йдеться про докритичну область), що при  $p \rightarrow 0$  незникаючий внесок у величину  $\Delta_{\infty}/p^2$  робить лише область малих значень  $px$  підінтегральної функції.

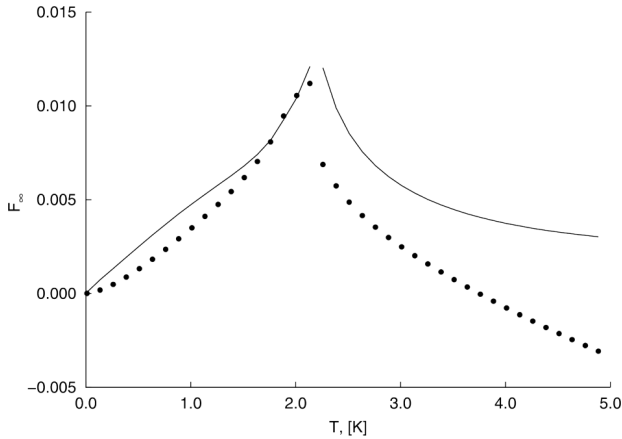
Після цих слів перейдемо до пошуку розкладів величин  $\lambda_{\mathbf{q}}$  і  $\bar{S}_0(q)$  в околі нуля хвильового вектора  $q$ . Для  $\lambda_{\mathbf{q}}$  отримати результат зовсім нескладно:

$$\lambda_{\mathbf{q}} = \beta\rho\nu_0 + o(q), \quad (16)$$

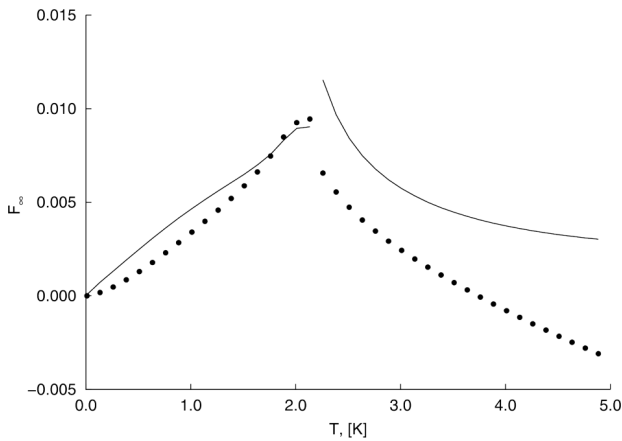
де  $\rho$  – це густина бозе-системи.

Натомість вигляд розкладу структурного фактора ідеального бозе-газу залежить від того, в якій області температур ми працюємо. В докритичній ( $T < T_c$ ) він має такий вигляд:

$$S_0(q) = \frac{4\bar{m}(1 - (T/T_c)^{3/2})}{\beta\hbar^2 q^2} + \frac{\bar{m}^2}{2\rho\hbar^4 \beta^2} \frac{1}{q} + 1 + o(q), \quad (17)$$



**Рис. 1.** Залежність величини  $F_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta_\infty(p)/\varepsilon_p$  від температури при значенні параметра  $p = 0,01$ . Крапки – точний вираз, суцільна лінія – прийняте наближення



**Рис. 2.** Залежність величини  $F_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta_\infty(p)/\varepsilon_p$  від температури при значенні параметра  $p = 0,1$ . Крапки – точний вираз, суцільна лінія – прийняте наближення

а в надкритичній такий:

$$S_0(q) = \frac{\bar{m}^2}{\pi \rho \hbar^4 \beta^2} \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{2P_0} \right) + o(q). \quad (18)$$

Цей результат впливає безпосередньо із виразу для структурного фактора ідеального бозегазу [26]:

$$\bar{S}_0(q) = 1 + \frac{\bar{m}}{4\pi^2 \rho \beta \hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{p}{\bar{z}_0^{-1} e^{\beta \frac{\hbar^2 q^2}{2m}} - 1} \times \\ \times \ln \left| \frac{1 - \bar{z}_0 e^{-\beta \frac{\hbar^2 (p+q)^2}{2m}}}{1 - \bar{z}_0 e^{-\beta \frac{\hbar^2 (p-q)^2}{2m}}} \right| dp.$$

34

Для аналітичного дослідження виразу (15) ми скористаємося таким наближенням для величин  $\lambda_q$  і  $\bar{S}_0(q)$ , яке містить лише наведені щойно члени розкладу. Переконалися в адекватності використаних наближень допоможе чисельний аналіз, результати якого наведені на рис. 1 і рис. 2.

Подальше дослідження виразу (15) ми будемо проводити окремо в докритичній і післякритичній області температур, а також в самій критичній точці в силу відмінності підходів, які потрібно застосувати в кожному із згаданих випадків.

### 3. Розрахунки в докритичній області температур

В докритичній області температур ( $T < T_c$ ) вираз (15) набуде такого вигляду:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^3}{4\pi^2 \beta \rho} \int_0^\infty \frac{x^2 \left( x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 2 \right) dx}{(1 + \varkappa)x^2 p^2 + \gamma x p + 2n_0 \varkappa} + o(p^2),$$

де

$$\varkappa = \beta \rho \nu_0; \quad \gamma = \frac{\bar{m}^2 \nu_0}{2\hbar^4 \beta}; \quad n_0 = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (19)$$

Далі, скориставшись представленням

$$x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 da}{x^2 - a^2} - \int_{-1}^1 da = \int_{-1}^1 \frac{a^2 da}{x^2 - a^2}$$

і змінивши порядок інтегрування, будемо мати

$$\Delta_\infty = \frac{2\bar{m} \varkappa p^3}{(2\pi \hbar \beta)^2 \rho} \int_{-1}^1 da \times \\ \times \int_0^\infty \frac{x^2 a^2 dx}{(x^2 - a^2)[(1 + \varkappa)x^2 p^2 + \gamma x p + 2n_0 \varkappa]} + o(p^2). \quad (20)$$

Знаменник підінтегрального виразу розкладемо на множники, а весь підінтегральний вираз на прості дроби і проведемо елементарне інтегрування по змінній  $x$ . Тоді

$$\Delta_\infty = -\frac{p_0^2 \varkappa p}{4\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \int_{-1}^1 a^2 da \left\{ \frac{p^2 a \ln |a|}{2(ap - x_1)(ap - x_2)} - \right. \\ \left. - \frac{p^2 a \ln |a|}{2(ap + x_1)(ap + x_2)} + \frac{px_2^2 \ln |x_2/p|}{(a^2 p^2 - x_2^2)(x_1 - x_2)} - \right.$$

$$-\frac{px_1^2 \ln |x_1/p|}{(a^2p^2 - x_1^2)(x_1 - x_2)} \Big\} + o(p^2), \quad (21)$$

де  $x_1/p$  і  $x_2/p$  – корені квадратного рівняння

$$(1 + \varkappa)x^2p^2 + \gamma xp + 2n_0\varkappa = 0,$$

причому:

$$x_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 8n_0(1 + \varkappa)\varkappa}}{2(1 + \varkappa)}. \quad (22)$$

Після відповідних перетворень і інтегрування за змінною  $a$  будемо мати, що

$$\begin{aligned} \Delta_\infty = & \frac{p_0^2 \varkappa}{4\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \frac{1}{x_1 - x_2} \left\{ 2(x_2^2 - x_1^2) + \right. \\ & + \frac{x_2^3}{p^2} \left( \operatorname{dilog} \left[ 1 + \frac{p}{x_2} \right] - \operatorname{dilog} \left[ 1 - \frac{p}{x_2} \right] \right) - \\ & - \frac{x_1^3}{p^2} \left( \operatorname{dilog} \left[ 1 + \frac{p}{x_1} \right] - \operatorname{dilog} \left[ 1 - \frac{p}{x_1} \right] \right) + \\ & + 2x_2^2 \ln |x_2/p| \left( 1 - \frac{x_2}{p} \operatorname{arcth} \left[ \frac{p}{x_2} \right] \right) - \\ & \left. - 2x_1^2 \ln |x_1/p| \left( 1 - \frac{x_1}{p} \operatorname{arcth} \left[ \frac{p}{x_1} \right] \right) \right\} + o(p^2), \quad (23) \end{aligned}$$

де  $\operatorname{dilog}[x] = \int_1^x \ln(y)/(1-y) dy$ .

Проводячи розклад за  $p$  отриманого виразу, ми знайдемо, що величини, пропорційні до  $p^2$ , походять виключно з останніх двох доданків у фігурних дужках. В результаті будемо мати:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa}{3\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \frac{\ln |x_1/x_2|}{(x_1 - x_2)} p^2 + o(p^2). \quad (24)$$

При наближенні до критичної точки один з коренів, скажімо  $x_2$ , прямує до нуля, і ми отримуємо логарифмічну розбіжність для величини  $\Delta_\infty$  в околі критичної точки. Як в цьому випадку бути з ефективною масою? Повертаючись до аналізу виразів для  $x_1$  і  $x_2$ , ми прийдемо до висновку, що існує значення температури  $T_F$ , при якій величини  $x_1$  і  $x_2$  стають дійсними. Це, в свою чергу, приводить до того, що функція  $\operatorname{arcth}(p/x_2)$  перстає бути обмеженою в області температур між  $T_F$  і  $T_c$  та прямує до безмежності при наближенні до критичної точки. Поки величина  $x_2$  залишається

комплексною, функцію арктангенса гіперболічного можна виразити через арктангенс тригонометричний, який, в свою чергу, є обмеженою функцією. Температуру  $T_F$  можна легко знайти, прирівнявши до нуля дискримінант наведеного вище квадратного рівняння. Його чисельний розв'язок відносно температури дає значення  $T_F \approx 2,13$  К при критичній температурі  $T_c \approx 2,18$  К. Як бачимо, це є дуже вузька область, яку ми можемо інтерпретувати, як флуктуаційну, тобто таку, в якій флуктуації величини бозе-конденсату стають співмірними з кількістю самого конденсату. Про неї також можна говорити як про область, аналогічну до області Гінзбурга, де перетурбативний метод розрахунку не працює. Так чи інакше, в цій вузькій області ми не можемо зробити жодних коректних висновків про ефективну масу в межах нашого підходу. Для аналізу цієї області потрібні інші методи, наприклад, ренормгруповий підхід. Внесок  $\Delta_\infty$  у значення ефективної маси до температури  $T_F$  є дуже незначним, в чому можна впевнитися завдяки чисельному аналізу. Аналітичний вигляд цього внеску у праву частину рівності (11) такий:

$$\frac{p_0^4 \varkappa}{6\pi^2 \rho (1 + \varkappa)} \frac{\ln |x_1/x_2|}{(x_1 - x_2)}. \quad (25)$$

#### 4. Розрахунки в критичній точці

Щоб з'ясувати характер розбіжності величини  $\Delta_\infty/p^2$  як функції  $p$  в критичній точці, проведемо розрахунок безпосередньо в ній. Повернемося до формули (20) і покладемо в ній  $T = T_c$ , що означає  $n_0 = 0$ . Тоді

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{2\pi^2 \beta \rho} \int_0^1 da \int_0^\infty \frac{xa^2 dx}{(x^2 - a^2)[(1 + \varkappa)xp + \gamma]} + o(p^2). \quad (26)$$

Знову розкладемо знаменник підінтегрального виразу на множники, а сам вираз – на прості дроби і проінтегруємо за змінною  $x$ . В результаті отримаємо:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{2\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \int_0^1 \frac{a^2 x_0 \ln |a/x_0|}{a^2 p^2 - x_0^2} da + o(p^2),$$

де  $x_0/p$  – корінь рівняння  $(1 + \varkappa)xp + \gamma = 0$ , причому:  $x_0 = -\gamma/(1 + \varkappa)$ . У написаному вище інтегралі

зробимо заміну змінних  $a/|x_0| = \xi$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_\infty &= \frac{p_0^2 \varkappa x_0^2 p}{2\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \int_0^{1/|x_0|} \frac{\xi^2 \ln \xi}{\xi^2 - 1} + o(p^2) = \\ &= -\frac{p_0^2 \varkappa x_0^2 p}{2\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa)} \int_0^{1/|x_0|} \xi^2 \ln \xi d\xi + o(p^2), \end{aligned} \quad (27)$$

оскільки  $1/|x_0| \sim p$ ,  $p \rightarrow 0$ . В результаті отримаємо:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{18\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa) |x_0|} \left( 1 - 3 \ln \left| \frac{p}{x_0} \right| \right) + o(p^2).$$

Отож ми показали, що величина  $\Delta_\infty/p^2$  в критичній точці розбігається як  $\ln |p|$ ,  $p \rightarrow 0$ . Така розбіжність є характерною для критичних явищ. Її можна трактувати як наслідок розкладу одночастинкового спектра бозе-рідини в критичній точці:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 \tilde{p}^2}{2\tilde{m}} \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right)^{2-\eta} &= \frac{\hbar^2 \tilde{p}^2}{2\tilde{m}} \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right)^2 e^{-\eta \ln(p/\tilde{p})} = \\ &= \frac{\hbar^2 p^2}{2\tilde{m}} \left( 1 - \eta \ln \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right) \right) + o(\eta), \end{aligned} \quad (28)$$

де  $\eta$  – це малий критичний індекс,  $\tilde{p}$  – характерний масштаб хвильового вектора в околі критичної точки. Беручи до уваги, що в критичній точці єдиний незникаючий внесок в одночастинковий спектр бозе-рідини дає величина  $\Delta_\infty$ , ми отримаємо рівняння, з якого можемо знайти  $\eta$  і  $\tilde{p}$ :

$$\begin{aligned} \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{18\pi^2 \beta \rho (1 + \varkappa) |x_0|} \left( 1 - 3 \ln \left| \frac{p}{x_0} \right| \right) &= \\ = \frac{p^2}{p_0^2 \beta} \left( 1 - \eta \ln \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Звідси:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4}{3\pi^2} \approx 0,135, \\ \tilde{p} &= |x_0| \exp \left( \frac{\eta - 3}{3\eta} \right) \approx 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Результат для малого критичного індекса  $\eta$  вперше отриманий в роботах [28, 29], де для розрахунків використовувався метод розкладу за оберненими степенями вимірності параметра порядку. Наближення хаотичних фаз відтворює лише перший член цього розкладу, а тому й не дивно, що результат для малого критичного індекса відрізняється від результату Монте-Карло симуляцій [30].

## 5. Розрахунки при температурах, вищих за критичну

При температурах, вищих за критичну, величина (15) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta_\infty &= \frac{p_0^2 \tilde{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta \rho} \int_0^\infty \frac{q dq}{q + \tilde{\gamma} \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{2P_0} \right)} \times \\ &\times \left\{ \frac{q}{2p} \ln \left| \frac{P_0^2 + (q+p)^2}{P_0^2 + (q-p)^2} \right| - \frac{2q^2}{P_0^2 + q^2} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\tilde{\gamma} = 2\gamma/\pi$ . Спочатку продиференціювавши, а потім проінтегрувавши за параметром  $p$  отриманий вираз, а також змінивши порядок інтегрування, будемо мати:

$$\begin{aligned} \Delta_\infty &= \frac{p_0^2 \tilde{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta \rho} \frac{1}{p} \int_0^p dp \int_0^\infty \frac{q dq}{q + \tilde{\gamma} \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{2P_0} \right)} \times \\ &\times \frac{2qp^2(q^2 - p^2 - 3P_0^2)}{[P_0^2 + (p+q)^2][P_0^2 + (p-q)^2][P_0^2 + q^2]}. \end{aligned} \quad (32)$$

Щоб порахувати написаний вище інтеграл, симетризуємо межі інтегрування за  $q$ , а потім зробимо аналітичне продовження підінтегральної функції у верхню півплощину і замкнемо контур інтегрування півколом радіуса  $R$ . В границі  $R \rightarrow \infty$  інтеграл за півколом  $R$  дає нуль в силу того, що степінь знаменника підінтегральної функції на дві одиниці вищий за степінь чисельника. В результаті, наш інтеграл дорівнює сумі лишків аналітичного продовження підінтегральної функції у верхню півплощину помноженій на  $2\pi i$ . У цю півплощину потрапляють лише три особливі точки підінтегральної функції:  $q = p + iP_0$ ;  $q = -p + iP_0$ ;  $q = iP_0$ . Принагідно зауважимо, що знаменник дробу, який містить функцію арктангенса, не перетворюється в нуль в жодній точці комплексної площини. В результаті розрахунків отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta_\infty &= \frac{p_0^2 \tilde{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta \rho} \frac{\pi i}{2p} \int_0^p dp \left( \frac{2P_0^2}{iP_0 + \tilde{\gamma} \operatorname{arctg}(i/2)} + \right. \\ &+ \frac{(-p + iP_0)^2}{-p + iP_0 + \tilde{\gamma} \operatorname{arctg} \left( -\frac{p}{2P_0} + \frac{i}{2} \right)} + \\ &\left. + \frac{(p + iP_0)^2}{p + iP_0 + \tilde{\gamma} \operatorname{arctg} \left( \frac{p}{2P_0} + \frac{i}{2} \right)} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Не вдаючись в деталі доволі простих перетворень, запишемо кінцевий результат для  $\Delta_\infty$ :

$$\Delta_\infty = -\frac{2\pi}{p} \int_0^p dp \left\{ \frac{(f_2 + P_0)(p^2 - P_0^2) - 2pP_0(f_1 + p)}{(f_1 + p)^2 + (f_2 + P_0)^2} + \frac{P_0^2}{P_0 + \tilde{\gamma} \ln(3)/2} \right\}, \quad (34)$$

де

$$f_1 = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{4pP_0}{3P_0^2 - p^2} \right), \quad (35)$$

$$f_2 = -\frac{\tilde{\gamma}}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{(3P_0^2 - p^2)^2 + 16p^2P_0^2}}{9P_0^2 + p^2} \right).$$

В отриманому виразі проведемо розклад за малим параметром  $p$  і збережемо лише доданки, пропорційні до  $p^2$ . В результаті будемо мати:

$$\Delta_\infty = -\frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa \tilde{\gamma}}{27\pi\beta\rho} \times \frac{(-9\tilde{\gamma} \ln^2(3) + 8P_0 + 28\tilde{\gamma} \ln(3) - 16\tilde{\gamma})}{(2P_0 + \tilde{\gamma} \ln(3))^3} p^2 + o(p^2). \quad (36)$$

Відповідно, внесок у праву частину рівності (11) є таким:

$$-\frac{p_0^4 \bar{z}_0 \varkappa \tilde{\gamma}}{27\pi\rho} \frac{(-9\tilde{\gamma} \ln^2(3) + 8P_0 + 28\tilde{\gamma} \ln(3) - 16\tilde{\gamma})}{(2P_0 + \tilde{\gamma} \ln(3))^3}. \quad (37)$$

За допомогою чисельного аналізу можна перекоонатися у малості цієї величини, а тому її внеском у ефективну масу можна також знехтувати.

## 6. Аналітичний вираз для ефективної маси

Беручи до уваги, що величина  $\Delta_\infty$  дає незначний внесок у значення ефективної маси (що було показано вище) і повертаючись до схеми розрахунку, наведеної в роботі [24], для ефективної маси отримаємо такий вираз:

$$\bar{m} = \frac{m^*}{(1 + F(T))}, \quad (38)$$

де

$$F(T) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{N\beta\varepsilon_p} \sum_{q \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} (e^{p\nabla_q} - 1) \times \left( \bar{n}_q - \frac{1}{\bar{z}_0^{-1}(\beta\bar{\varepsilon}_q + 1 - \bar{z}_0)} \right), \quad (39)$$

$\nabla_q$  – оператор градієнта.

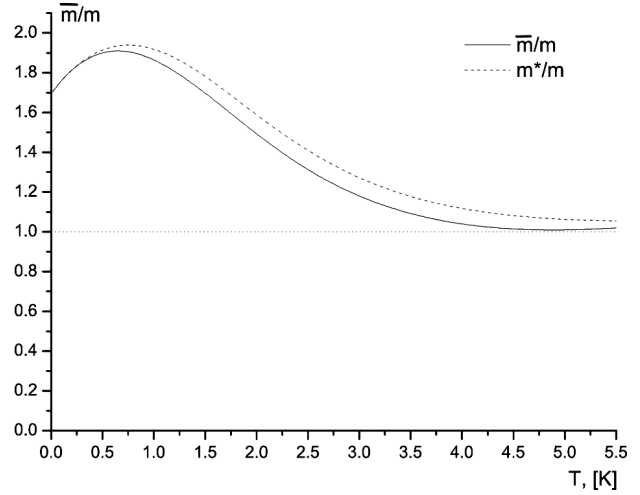


Рис. 3. Температурна залежність ефективної маси атома  ${}^4\text{He}$

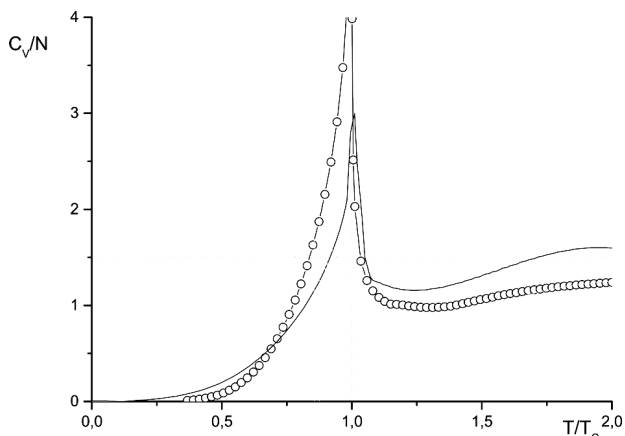
Розкладемо в ряд оператор  $e^{p\nabla_q}$ , обмежившись першими трьома членами розкладу, оскільки саме вони дають необхідне нам наближення. Зробивши після цього нескладні перетворення, перейшовши від підсумовування до інтегрування і врахувавши зміст позначень  $p_0$  і  $P_0$ , для величини  $F(T)$  будемо мати такий вираз:

$$F(T) = \frac{1}{2\pi^2\rho} \int_0^\infty \frac{\lambda_q q^2 dq}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \left( \bar{n}_q(1 + \bar{n}_q) \times \left[ \frac{2}{3} \beta\varepsilon_q(1 + 2\bar{n}_q) - 1 \right] - \frac{\bar{z}_0(\beta\bar{\varepsilon}_q - 3 + 3\bar{z}_0)}{3(\beta\bar{\varepsilon}_q + 1 - \bar{z}_0)^3} \right). \quad (40)$$

Безпосередньою перевіркою легко перекоонатися, що в границі як низьких, так і високих температур функція  $F(T)$  рівна нулю, а тому в цих границях  $\bar{m} = m^*$ . Користуючись результатами роботи [25], знайдемо, що  $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{m} \approx 1.7m$ , а  $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{m} = m$ .

## 7. Чисельний розрахунок ефективної маси і теплоємності

Щоб проілюструвати отриманий результат, потрібно подати його в графічному вигляді. Для цього необхідно провести чисельний розрахунок відношення  $\bar{m}/m$ , який вимагає самоузгодженого підходу, оскільки вираз для  $\bar{m}$  містить в собі величини  $\bar{S}_0(q)$ ,  $\bar{\varepsilon}_q$ ,  $\bar{n}_q$ , які, в свою чергу, залежать від  $\bar{m}$ . На практиці це означає здійснення ітераційно-



**Рис. 4.** Температурна залежність теплоємності рідкого  ${}^4\text{He}$ . Суцільна крива – теоретичний результат з урахуванням ефективної маси, кружечки – експериментальні дані [35–37]

го процесу, який у нашому випадку зводиться до 3-4 ітерацій.

Обчислення проводимо при рівноважній густині гелію  $\rho = 0,02185 \text{ \AA}^{-3}$ , масі частинок  $m = 4,0026 \text{ а.о.м.}$ , швидкості звуку  $c = 238,2 \text{ м/с}$  у границі  $T \rightarrow 0$  [32]. Як вхідну інформацію, замість коефіцієнта Фур’є енергії парної взаємодії між частинками  $\nu_q$ , використовуємо експериментально вимірюваний структурний фактор  $S^{\text{exp}}(q)$  рідкого  ${}^4\text{He}$ , екстрапольований до температури  $T \rightarrow 0$  з роботи [33].

На рис. 3 подана температурна залежність ефективної маси атома  ${}^4\text{He}$  в наближенні парних міжчастинкових кореляцій. Отримавши її, ми за відомою формулою [34] розраховували також температуру бозе-конденсації в рідкому  ${}^4\text{He}$  і здобули значення  $T_c \approx 2,18 \text{ К}$ , що є дуже близьким до експериментального  $T_c = 2,168 \text{ К}$ .

Для розрахунку теплоємності ми скористалися виразом для внутрішньої енергії багатобозонної системи в наближенні парних кореляцій (1), чисельно продиференціювавши його по температурі. На рис. 4 наведено графік температурної залежності теплоємності з урахуванням ефективної маси.

## 8. Висновок

В роботі знайдено вираз для температурної залежності ефективної маси атома  ${}^4\text{He}$  (як у нормальній, так і надплинній фазі), яка дає можливість усунути інфрачервоні розбіжності, що є характер-

ними для критичних явищ. Вираз для ефективної маси застосовний при всіх температурах, окрім вузької флуктуаційної області, яка розпочинається з температури  $T_F \approx 2,13 \text{ К}$  і закінчується температурою фазового переходу. В границі високих температур ефективна маса переходить у “голу” масу атома  ${}^4\text{He}$ . Це саме відбувається і при “виключенні” міжчастинкової взаємодії. В границі низьких температур ми отримуємо значення, яке збігається зі значенням ефективної маси домішкового атома  ${}^3\text{He}$  в рідині  ${}^4\text{He}$  при заміні “голої” маси  ${}^3\text{He}$  на масу  ${}^4\text{He}$  [18]. В цьому контексті зауважимо, що немає єдиної думки про значення ефективної маси навіть в нулі температур, не кажучи вже про широкотемпературну область, оскільки саме введення цієї величини є феноменологічним моментом і великою мірою залежить від застосованих підходів для її розрахунку [15–17].

Теоретично розрахований хід кривої теплоємності з урахуванням ефективної маси значно краще узгоджується з експериментом, зокрема в надкритичній області, ніж без її урахування [31]. Крім того, в порівнянні з “затравочною” масою, отримана нами ефективна маса дає краще узгодження з експериментом для теплоємності в області ширинною приблизно  $0,5 \text{ К}$  над точкою фазового переходу [25].

За допомогою ефективної маси вдалося зсунути точку фазового переходу від значення для ідеального бозе-газу до температури  $T_c \approx 2,18 \text{ К}$ , що, як уже зазначалося, є дуже близьким до експериментального. “Затравочна” маса в цьому випадку дає  $T_c \approx 1,94 \text{ К}$  [25].

Запропонований в цій роботі підхід дозволив також знайти малий критичний індекс  $\eta$  в наближенні хаотичних фаз. Він доволі сильно відрізняється від сучасного значення [30], але водночас відтворює вже відомий результат цього наближення [28].

1. F. London, Phys. Rev. **54**, 947 (1938).
2. E.A. Pashitskii, Fiz. Nizk. Temp. **25**, 115 (1999).
3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
4. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
5. R.P. Feynman, Phys. Rev. **91**, 1291 (1953).
6. P. Pieri, G.C. Strinati, and I. Tifrea, Euro. Phys. J. B **22**, 79 (2001).
7. H.T.C. Stoof, Phys. Rev. A **45**, 8398 (1992).



8. G. Baym, J.-P. Blaizot, M. Holzmann, F. Laloë, and D. Vautherin, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1703 (1999).
9. M. Holzmann and W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2687 (1999).
10. P. Arnold, G. Moore, and B. Tomašik, *Phys. Rev. A* **65**, 013606 (2002).
11. B. Kastening, *Phys. Rev. A* **69**, 043613 (2004).
12. V.A. Kashurnikov, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120402 (2001).
13. P. Arnold and G. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120401 (2001).
14. J.D. Reppy, B.C. Crooker, B. Hebral, A.D. Corwin, J. He, and G.M. Zassenhaus, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2060 (2000).
15. A. Isihara and T. Samulski, *Phys. Rev. B* **16**, 1969 (1977).
16. I. O. Вакарчук, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. **26**, 29 (1993).
17. A.A. Rovenchak, *Fiz. Nizk. Temp.* **29**, 145 (2003).
18. I.O. Вакарчук, Журн. фіз. досл. **1**, 25 (1996).
19. I.O. Vakarchuk, *J. Phys. Stud.* **1**, 156 (1997).
20. M.L. Ristig, T. Lindenau, M. Serhan, and J.W. Clark, *J. Low Temp. Phys.* **114**, 317 (1999).
21. T. Lindenau, M.L. Ristig, J.W. Clark, and K.A. Gernoth, *J. Low Temp. Phys.* **129**, 143 (2002).
22. K.A. Gernoth, M. Serhan, and M.L. Ristig, *Phys. Rev. B* **78**, 054513 (2008).
23. K.A. Gernoth and M.L. Ristig, *Int. J. Mod. Phys. B* **23**, 4096 (2009).
24. I.O. Вакарчук, Р.О. Притула, Журн. фіз. досл. **12**, 4001 (2008).
25. I.O. Vakarchuk, V.S. Pastukhov, and R.O. Prytula, *Ukr. J. Phys.* **57**, 1214 (2012).
26. I.O. Vakarchuk, *J. Phys. Stud.* **8**, 223 (2004).
27. I.O. Vakarchuk, *Theor. Math. Phys.* **154**, 6 (2008).
28. R.A. Ferrell and D.J. Scalapino, *Phys. Lett. A* **41**, 371 (1972); *Phys. Rev. Lett.* **29**, 413 (1972).
29. R. Abe, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 1877 (1973).
30. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **74**, 144506 (2006).
31. I.O. Вакарчук, Р.О. Притула, Журн. фіз. досл. **11**, 259 (2007).
32. R.J. Donnelly and C.F. Barenghi, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **27**, 1217 (1998).
33. I.O. Vakarchuk, V.V. Babin, and A.A. Rovenchak, *J. Phys. Stud.* **4**, 16 (2000).
34. I.O. Вакарчук, *Вступ до проблеми багатьох тіл* (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 1999).
35. D.M. Ceperley, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 279 (1995).
36. V.D. Arp, R.D. McCarty, and D.G. Friend, *Natl. Inst. Stand. Technol. Tech. Note 1334* (revised) (1998).
37. V.D. Arp, *Int. J. Thermophys.* **26**, 1477 (2005).

Одержано 10.06.15

*И.А. Вакарчук, О.И. Григорчук,  
В.С. Пастухов, Р.А. Притула*

#### ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА АТОМА ${}^4\text{He}$ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ И НОРМАЛЬНОЙ ФАЗАХ

#### Резюме

Найдено выражение для температурной зависимости эффективной массы атома  ${}^4\text{He}$  в сверхтекучей и нормальной фазах, которое позволяет устранить инфракрасные расходимости и является применимым при всех температурах за исключением узкой флуктуационной области  $0,97 \lesssim T/T_c \leq 1$ . В пределе высоких и низких температур, а также в пределе исключения взаимодействия полученное выражение дает известные результаты. На основании эффективной массы рассчитан ход кривой теплоемкости, а также получена температура фазового перехода  $T_c \approx 2,18$  К. Используя предложенный в работе подход, найдено значение малого критического индекса  $\eta$  в приближении хаотических фаз, которое воспроизводит уже известный результат этого приближения.

*I.O. Vakarchuk, O.I. Hryhorchak,  
V.S. Pastukhov, R.O. Prytula*

#### EFFECTIVE MASS OF ${}^4\text{He}$ ATOM IN SUPERFLUID AND NORMAL PHASES

#### Summary

The formula for the temperature dependence of the effective mass of a  ${}^4\text{He}$  atom in the superfluid and normal phases is obtained. This expression for the effective mass allows one to eliminate infra-red divergences, being applicable at all temperatures, except for a narrow fluctuation region  $0.97 \lesssim T/T_c \leq 1$ . In the high and low temperature limits, as well as in the interactionless limit, the obtained expression reproduces the well known results. The temperature dependence of the heat capacity and the phase transition temperature  $T_c \approx 2.18$  K are calculated, by using the formula obtained for the effective mass. In the framework of the approach proposed in this work, the small critical index  $\eta$  is determined in the random phase approximation. The obtained value corresponds to the well known result.