

М.Я. ГОРНЕЦЬКА, А.А. РОВЕНЧАК

Львівський національний університет ім. Івана Франка, кафедра теоретичної фізики  
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: andrij.rovenchak@gmail.com)

## ДВОПАРАМЕТРИЧНІ МОДИФІКАЦІЇ СТАТИСТИК ЕНІОНІВ

УДК 538.9

*У роботі розглянуто двопараметричні моделі дробових статистик, які спрямовані на встановлення виразу для чисел заповнення вільних еніонів. Знайдено віріальні коефіцієнти для таких типів статистик:  $\kappa$ -деформовані статистики Поліхронакоса і Голдейна–Ву, модифіковані з  $q$ -експонентною статистикою Поліхронакоса і Голдейна–Ву в бозонній границі, неповна та неадитивна статистика Джентіле для різних значень максимального заповнення рівня. Встановлено та проаналізовано зв'язок між різними типами дробових статистик та статистикою еніонів.*

*Ключові слова:* дробові статистики, еніони,  $\kappa$ -деформація, статистика Поліхронакоса, статистика Голдейна–Ву, статистика Джентіле.

### 1. Вступ

В останні десятиліття предметом дослідження стали квантові системи, які підпорядковуються дробовій статистиці, до якої відомі різні підходи [1, 2].

Методи, які пов'язані з дробовою статистикою, виявились успішними під час вивчення багатьох явищ у фізиці конденсованих систем: дробового квантового ефекту Холла [3], високотемпературної надпровідності [4], низькорозмірних взаємодіючих систем [5, 6], а також у таких несподіваних областях, як моделі темної матерії [7].

Бозе в 1924 р. [8] вивів розподіл Планка, застосувавши комбінаторний підхід до квантів світла. Згодом Айнштайн [9, 10] використав ідею Бозе та отримав розподіл квантового ідеального газу частинок із ненульовою масою спокою.

У 1926 р. Дірак [11] та Фермі [12] отримали функцію розподілу для частинок, які підкоряються принципу заборони Паулі. У квантових системах розподіл виражається як функція енергії, кратності виродження і кількості частинок системи. Для частинок, кількість яких у будь-якому стані необмежена, окремий випадок статистики – це розподіл Бозе–Айнштайна, такі частинки називають бозонами. Якщо частинки підлягають принципу Паулі (тобто у певному стані може перебувати лише одна частинка), то справедливим є розподіл Фермі–Дірака, а частинки називають ферміонами.

Джентіле у 1940 р. [13] зробив першу спробу узагальнення статистики. Для його моделі характерним є особливе заповнення енергетичних рівнів: кількість частинок, які можуть бути на певному енергетичному рівні, обмежена деяким скінченим числом  $s$ , яке називають порядком статистики.

Міргайм і Лайнос [14] у 1977 р. показали, що при перестановці двох частинок у двовимірній системі фаза хвильової функції може набувати довільних значень. Ці частинки отримали назву еніони (англ. “anyon”, від “any” – “будь-який”), яку запропонував у 1982 р. Вілчек [15]. Для таких двох квазічастинок результат перестановки дає  $|\psi_1\psi_2\rangle = e^{i\pi\alpha}|\psi_2\psi_1\rangle$ , де  $\alpha$  – параметр еніонної статистики, який є дійсним числом,  $\alpha \in [0; 1] \pmod{2}$ .

Еніони – це тип квазічастинок, які спостерігаються тільки у двовимірних системах з властивостями, відмінними від властивостей ферміонів і бозонів. Розглядають два типи еніонів: абелеві та неабелеві [16, 17]. Збудження, що відповідають абелевим еніонам, були виявлені експериментально, вони відіграють важливу роль у дробовому квантовому ефекті Холла [18]. Неабелеві еніони залишаються гіпотетичними і є областю активних досліджень.

У 1991 р. Голдейн, запропонувавши вираз інтерполяції між бозонною й ферміонною границями, ввів узагальнення принципу заборони Паулі, який може стосуватися не одного, а декількох станів [19]. А в 1994 р. Ву [20] отримав функцію розподілу дробової виключної статистики.

Двопараметричні статистики розглядали, зокрема, у роботах [21, 22], де було показано, що взаємодіючий газ композитних бозонів (що складаються із двох ферміонів або двох бозонів) може алгебраїчно реалізуватись за допомогою моделі деформованого бозе-газу зі структурною функцією, яка є комбінацією  $q$ -деформації та квадратичної поліноміальної деформації. У нашій роботі підхід буде ґрунтуватися на роботі [23], де двопараметричні дробові статистики використано для моделювання еніонів.

Дотепер залишається невідомим вираз для чисел заповнення ідеального газу еніонів. Це ускладнює аналіз їх термодинаміки, і статистико-механічна модель, яка б відповідала еніонам – невідома [1]. Використання двопараметричної статистики дозволяє забезпечити ефективний опис із точністю, вищою за звичайні однопараметричні. Крім того, розглянуті моделі можна застосовувати в дослідженнях взаємодіючих квантових газів [5, 24].

У розділі 2 коротко розглянуто загальні співвідношення віріальних і кластерних розкладів, а також віріальні коефіцієнти еніонів. У розділі 3 проаналізовано модифікації статистик та наведено числові результати розрахунків віріальних коефіцієнтів для шести статистик. Досліджено модифіковану статистику Поліхронакоса з  $q$ -експонентою у бозонній границі. Розділ 4 присвячено встановленню зв'язків між параметрами еніонної статистики та іншими типами дробових статистик. Отримані результати підсумовано у Висновках.

## 2. Віріальні та кластерні розклади

### 2.1. Загальні співвідношення

Віріальний розклад для рівняння стану двовимірної системи можна записати у вигляді:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 [1 + b_2(\rho_2 \lambda^2) + b_3(\rho_2 \lambda^2)^2 + \dots], \quad (1)$$

де  $p$  – тиск,  $T$  – абсолютна температура,  $\rho_2 = \frac{N}{A}$  – двовимірна густина (концентрація) системи, а

$$\lambda = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{mT} \right)^{1/2} \quad (2)$$

– довжина теплової хвилі де Бройля. Множники  $b_j$  – безрозмірні  $j$ -ті віріальні коефіцієнти. Прига-

даємо, який вигляд має віріальний розклад ідеального двовимірного газу зі статистикою Фермі або Бозе [1]:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left( 1 \pm \frac{1}{4} \rho_2 \lambda^2 + \dots \right), \quad (3)$$

де верхній знак відповідає ферміонам (F), а нижній – бозонам (B). Легко переконатись, що другі віріальні коефіцієнти будуть такими:

$$b_2^F = +\frac{1}{4}, \quad b_2^B = -\frac{1}{4}. \quad (4)$$

Скористаємося кластерним розкладом для знаходження віріальних коефіцієнтів. Запишемо рівняння стану через велику статистичну суму  $\Xi$ :

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{A} \ln \Xi(z, V, T), \quad (5)$$

де  $z$  – активність, що виражається через хімічний потенціал  $\mu$  як  $z = e^{\mu/T}$ . Густина дорівнює:

$$\rho_2 = \frac{N}{A} = z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{A} \ln \Xi \right)_{A,T} = T \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{A} \ln \Xi \right)_{A,T}. \quad (6)$$

Застосовуючи кластерний розклад

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{A} \ln \Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell} z^{\ell} \quad (7)$$

до рівняння стану, отримуємо

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell} z^{\ell} = \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell B_{\ell} z^{\ell} \right) \left[ 1 + b_2 \lambda^2 \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell B_{\ell} z^{\ell} \right) + \dots \right],$$

звідки знайдемо зв'язок між віріальними і кластерними коефіцієнтами.

Другий, третій та четвертий віріальні коефіцієнти мають вигляд [25]:

$$\begin{aligned} b_2 \lambda^2 &= -\frac{B_2}{B_1^2}, & b_3 \lambda^4 &= -2 \frac{B_3}{B_1^3} + 4 \frac{B_2^2}{B_1^4}, \\ b_4 \lambda^6 &= -3 \frac{B_4}{B_1^4} + 18 \frac{B_2 B_3}{B_1^4} - 20 \frac{B_2^3}{B_1^6}, \end{aligned} \quad (8)$$

і для вищих віріальних коефіцієнтів аналогічно можна одержати результати, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $z$ .

## 2.2. Віріальні коефіцієнти еніонів

Для знаходження віріальних коефіцієнтів еніонів потрібно використати той факт, що велика статистична сума може бути записана у вигляді нескінченного ряду за статистичними сумами  $Z_N$  системи  $N$  частинок:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \quad Z_0 \equiv 1. \quad (9)$$

Із кластерного розкладу (7) матимемо кластерні інтеграли в термінах статистичних сум [1]:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{Z_1}{A}, \quad B_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2A}, \\ B_3 &= \frac{3Z_3 - 3Z_2Z_1 + Z_1^3}{3A}, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

За допомогою формул (8), (10) обчислюємо другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу:

$$b_2 = -\frac{A}{\lambda^2} \frac{(2Z_2 - Z_1^2)}{2Z_1^2}. \quad (11)$$

Ідеальний еніонний газ далі розглядаємо як взаємодіючий бозе-газ [1]. Зважаючи на це, перепишемо вираз (11), розбивши його на дві частини:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{A}{\lambda^2} \frac{Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{Z_1^2}, \quad (12)$$

де  $b_2(0)$ ,  $Z_2(0)$  відповідають ідеальному бозе-газові, а параметр  $\alpha \in [0; 1]$ . Тут використано той факт, що одночастинкова статистична сума  $Z_1$  не залежить від статистики, тобто є однаковою для ферміонів, бозонів та еніонів. Варто зауважити, що всі вирази розглядаються лише в термодинамічній границі  $A \rightarrow \infty$ .

Для зручності розгляду задачі помістимо систему в осциляторний потенціал із частотою  $\omega$  у ролі регулятора. Враховуючи спектр одночастинкової задачі  $E_n = (n + 1)\hbar\omega$  та спектр задачі двох еніонів, який має дві гілки [1]:

$$E_n^{(1)} = (2n + 1 + \alpha)\hbar\omega \text{ з виродженням } n + 1,$$

$$E_n^{(2)} = (2n + 1 - \alpha)\hbar\omega \text{ з виродженням } n,$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , після низки перетворень отримаємо точний вираз для другого віріального коефіцієнта ідеального еніонного газу [1, 26]:

$$b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2), \quad (13)$$

де взято до уваги другий віріальний коефіцієнт ідеального бозе-газу (4)  $b_2(0) = -1/4$ . Цікавим фактом є те, що при  $\alpha = 1$  ми отримуємо правильну ферміонну границю (4).

На жаль, задача більшої кількості еніонів точно не розв'язується, але відомі результати для вищих віріальних коефіцієнтів на підставі числових розрахунків. Третій коефіцієнт еніонів має вигляд [26]:

$$b_3^{\text{anyon}}(\alpha) = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2 \pi\alpha}{12\pi^2} + c_3 \sin^4 \pi\alpha, \quad (14)$$

де

$$c_3 = -(1,652 \pm 0,012) \cdot 10^{-5}.$$

Четвертий віріальний коефіцієнт еніонів [27]:

$$\begin{aligned} b_4^{\text{anyon}}(\alpha) &= \frac{\sin^2 \pi\alpha}{16\pi^2} \left( \frac{\ln(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}} + \cos \pi\alpha \right) + \\ &+ (c_4 + d_4 \cos \pi\alpha) \sin^4 \pi\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

де константи

$$c_4 = -0,0053 \pm 0,0003; \quad d_4 = -0,0048 \pm 0,0009.$$

## 3. Модифікації статистик

### 3.1. Вирази для чисел заповнення

Розглянемо модифікації дробових статистик на основі таких трьох загальних виразів для чисел заповнення, порівн. [23].

Перший

$$n_j^{\text{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) + Y} \quad (16)$$

узагальнює стандартні Бозе (Фермі) статистики при  $X(\varepsilon_j) = e^{\frac{\varepsilon_j}{T}}$  та  $Y = -1$  ( $Y = +1$ ), і визначає дробову статистику Поліхронакоса [28], якщо  $Y = -\gamma = \text{const} \neq \pm 1$ .

Другий – це модифікована статистика Голдейна-Ву [19, 20], яка представлена у вигляді

$$n_j^{\text{HW}} = \frac{1}{w[z^{-1}X(\varepsilon_j)] + g}, \quad (17)$$

де функція  $w(\xi)$  – розв'язок трансцендентного рівняння

$$w^g(1 + w)^{1-g} = \xi, \quad (18)$$

який можна отримати за допомогою певного виразу для кількості мікростанів квантової системи

багатьох тіл, що забезпечує інтерполяцію між бозонами і ферміонами.

Легко перекоонатися, що при  $g = 0$  отримаємо  $w(\xi) = \xi - 1$  – тобто розподіл Бозе, а при  $g = 1$  будемо мати  $w(\xi) = \xi$ , тобто розподіл Фермі.

У границі  $\xi \rightarrow \infty$  розв'язком рівняння буде  $w(\xi) \simeq \xi$ , що дає

$$n_j = e^{-(\varepsilon_j - \mu)/T} \quad (19)$$

– розподіл Больцмана, який не залежить від параметра статистики  $g$ .

Третій вираз – статистика Дженгіле [13]:

$$n_j^G = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) - 1} - \frac{(s+1)}{z^{-(s+1)}X^{(s+1)}(\varepsilon_j) - 1}. \quad (20)$$

Нескладно перекоонатись, що, дійсно, при  $s = 1$  маємо розподіл Фермі, а при  $s = \infty$  – розподіл Бозе.

Додатково до параметрів  $\gamma, \kappa$  або  $s$  у даних статистиках можна ввести в модель другий параметр деформації [23].

У цій роботі розглядаються такі модифікації:  $\kappa$ -експонента з'явиться замість звичайного больцманівського фактора  $e^{\varepsilon/T}$  у  $\kappa$ -деформованих статистиках та заміна  $e^x$  на  $e^{qx}$  неповних статистиках [29, 30]. Також буде розглянуто два варіанти так званих  $q$ -експонент.

$\kappa$ -експонента записується у вигляді [31, 32]:

$$\exp_{\kappa}(x) = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x\right)^{1/\kappa}. \quad (21)$$

Розклад рівнянь (16), (17), (20) за активністю  $z$  визначається за формулами [33]:

$$\begin{aligned} n_j^P &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{Y^{l-1}}{X^l} z^l = \\ &= \frac{1}{X} z - \frac{Y}{X^2} z^2 + \frac{Y^2}{X^3} z^3 \mp \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} n_j^{HW} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma[g(m+1)]}{n! \Gamma[g(m+1) - m]} \frac{z^{m+1}}{X^{m+1}} = \\ &= \frac{1}{X} z - \frac{(2g-1)}{X^2} z^2 + \frac{(3g-2)(3g-1)}{2! X^3} z^3 \mp \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} n_i^G &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^l}{X^l} - (s+1) \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^{l(s+1)}}{X^{l(s+1)}} = \\ &= \left(\frac{1}{X} z - \frac{1}{X^2} z^2 + \frac{1}{X^3} z^3 \mp \dots\right) - \\ &- (s+1) \left(\frac{1}{X^{s+1}} z^{s+1} - \frac{1}{X^{2(s+1)}} z^{2(s+1)} \pm \dots\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для простоти, підсумовування за рівнями  $\sum_j$  в рівняннях

$$N = \sum_j g_j n_j, \quad \frac{N}{A} = \frac{1}{A} \sum_j g_j n_j = \sum_{l=1}^{\infty} l B_l z^l \quad (25)$$

замінімо інтегруванням за енергією. Густина станів функції  $G(\varepsilon)$  у двовимірному ідеальному газі частинок, що мають масу  $m$ , рівна  $G(\varepsilon) = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} = \text{const}$  [34], порівн. також [1, с. 150] або [35, с. 22]:

$$\sum_j \dots = \int_0^{\infty} d\varepsilon G(\varepsilon) \dots \quad (26)$$

Використовуючи різні представлення для функції  $X$ , кластерні інтеграли  $B_l$  легко обчислити за допомогою розкладів у ряди (22)–(24) та отримати віріальні коефіцієнти з рівнянь (8).

Далі наведемо результати розрахунків віріальних коефіцієнтів для кількох статистик.

### 3.2. Результати віріальних коефіцієнтів

•  $\kappa$ -деформована статистика Поліхронакоса ( $\kappa$ -deformed Polychronakos statistics,  $\kappa$ PS). Для цього типу статистики

$$X(\varepsilon) = e_{\kappa}^{\frac{\varepsilon}{T}} = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 \frac{\varepsilon^2}{T^2} + \kappa \frac{\varepsilon}{T}}\right)^{1/\kappa}, \quad Y = -\gamma, \quad (27)$$

кластерні інтеграли:

$$\begin{aligned} B_1 \lambda^2 &= -\frac{1}{\kappa^2 - 1}, \quad B_2 \lambda^2 = -\frac{\gamma}{\kappa^2 - 4}, \\ B_3 \lambda^2 &= -\frac{\gamma^2}{\kappa^2 - 9}, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

і другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$b_2^{\kappa PS} = -\gamma \frac{(\kappa^2 - 1)^2}{(\kappa^2 - 4)}; \quad (29)$$

$$b_3^{\kappa PS} = 2\gamma^2 (\kappa^2 - 1)^4 \left[ \frac{2}{(\kappa^2 - 4)^2} - \frac{1}{(\kappa^2 - 9)(\kappa^2 - 1)} \right].$$

•  $\kappa$ -деформована статистика Голдейна–Ву ( $\kappa$ -deformed Haldane–Wu statistics,  $\kappa$ HWS). Для цього типу статистики

$$X(\varepsilon) = e_{\kappa}^{\frac{\varepsilon}{T}} = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 \frac{\varepsilon^2}{T^2} + \kappa \frac{\varepsilon}{T}}\right)^{1/\kappa}, \quad (30)$$

кластерні інтеграли:

$$\begin{aligned} B_1\lambda^2 &= -\frac{1}{\kappa^2 - 1}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{(2g - 1)}{\kappa^2 - 4}, \\ B_3\lambda^2 &= -\frac{(3g - 2)(3g - 1)}{2!(\kappa^2 - 9)}, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

і другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} b_2^{\kappa\text{HWS}} &= -(2g - 1)\frac{(\kappa^2 - 1)^2}{\kappa^2 - 4}; \\ b_3^{\kappa\text{HWS}} &= (\kappa^2 - 1)^4 \left[ \frac{4(2g - 1)^2}{(\kappa^2 - 4)^2} - \frac{(3g - 2)(3g - 1)}{(\kappa^2 - 9)(\kappa^2 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

• Неповна статистика Джентіле (Incomplete Gentile statistics, IGS). Для цього типу статистики

$$X = e^{\frac{q\varepsilon}{T}}, \quad (33)$$

розглянемо кластерні інтеграли і другий та третій віріальні коефіцієнти для різних значень  $s$ .

★  $s = 2$ :

кластерні інтеграли:

$$B_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{4q}, \quad B_3\lambda^2 = -\frac{2}{9q}, \dots \quad (34)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$b_2^{\text{IGS}2} = -\frac{q}{4}; \quad b_3^{\text{IGS}2} = \frac{25}{36}q^2. \quad (35)$$

★  $s = 3$ :

кластерні інтеграли:

$$B_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{4q}, \quad B_3\lambda^2 = \frac{1}{9q}, \dots \quad (36)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$b_2^{\text{IGS}3} = -\frac{q}{4}; \quad b_3^{\text{IGS}3} = \frac{q^2}{36}. \quad (37)$$

★  $s = 4$ :

кластерні інтеграли:

$$B_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{4q}, \quad B_3\lambda^2 = \frac{1}{9q}, \dots \quad (38)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$b_2^{\text{IGS}4} = -\frac{q}{4}; \quad b_3^{\text{IGS}4} = \frac{q^2}{36}. \quad (39)$$

• Неадитивна статистика Джентіле (Nonadditive Gentile statistics, NGS). Для цього типу статистики використовуємо так звану  $q$ -експоненту Цалліса [36]:

$$e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (40)$$

якщо аргумент у квадратних дужках більший за нуль і  $e_q^x = 0$  у протилежному випадку. Тоді

$$X(\varepsilon) = e_q^{\frac{\varepsilon}{T}} = \left[ 1 + (1 - q)\frac{\varepsilon}{T} \right]^{1/(1-q)}. \quad (41)$$

Розглянемо кластерні інтеграли і другий та третій віріальний коефіцієнт для різних значень  $s$ .

★  $s = 2$ :

кластерні інтеграли:

$$\begin{aligned} B_1\lambda^2 &= \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{2(1+q)}, \\ B_3\lambda^2 &= -\frac{2}{3q(2+q)}, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} b_2^{\text{NGS}2} &= -\frac{q^2}{2(1+q)}; \\ b_3^{\text{NGS}2} &= \frac{q^2}{4} \left[ \frac{16}{3(2+q)} + \frac{1}{(1+q)^2} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

★  $s = 3$ :

кластерні інтеграли:

$$\begin{aligned} B_1\lambda^2 &= \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{2(1+q)}, \\ B_3\lambda^2 &= \frac{1}{3(2+q)}, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} b_2^{\text{NGS}3} &= -\frac{q^2}{2(1+q)}; \\ b_3^{\text{NGS}3} &= q^4 \left[ \frac{1}{(1+q)^2} - \frac{2}{3q(2+q)} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

★  $s = 4$ :

кластерні інтеграли:

$$\begin{aligned} B_1\lambda^2 &= \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{1}{2(1+q)}, \\ B_3\lambda^2 &= \frac{1}{3(2+q)}, \dots \end{aligned} \quad (46)$$

другий та третій віріальні коефіцієнти:

$$\begin{aligned} b_2^{\text{NGS4}} &= -\frac{q^2}{2(1+q)}; \\ b_3^{\text{NGS4}} &= q^4 \left[ \frac{1}{(1+q)^2} - \frac{2}{3q(2+q)} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Зрозуміло, що статистика Джентіле з  $s \geq 4$  збігатиметься зі статистикою Бозе принаймні з точністю до четвертого віріального коефіцієнта.

### 3.3. $q$ -експонента у бозонній границі статистик Поліхронакоса і Голдейна–Ву

У задачах, пов'язаних із так званими  $q$ -деформованими комутаторами

$$[A, B]_q = AB - qBA,$$

виникають деформовані експоненти іншого типу порівняно з тими, які ми розглядали у попередніх розділах [37]. Для цих  $q$ -експонент будемо використовувати позначення:

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{[j]_q!}, \quad (48)$$

де  $q$ -факторіал задано формулою

$$[j]_q! = [j]_q [j-1]_q \dots [1]_q, \quad (49)$$

що містить  $q$ -аналог числа  $n$ :

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}. \quad (50)$$

Загальний вигляд розкладу  $q$ -експоненти в ряд:

$$\begin{aligned} E_q^x &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{(q-1)^n}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{q-1}{q^n-1} \frac{q-1}{q^{n-1}-1} \dots \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким чином,  $E_q^x$  можна записати як

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{(1+\dots+q^{n-1})(1+\dots+q^{n-2})\dots(1+q)1}.$$

У границі  $q \rightarrow 1$  зобразимо функцію  $E_q^x$  у вигляді ряду:

$$E_q^x = f_0(x) + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x) + \dots \quad (52)$$

Підставивши  $q = 1$ , отримали вираз для  $f_0(x)$ :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{n!} = e^x. \quad (53)$$

Можна також показати, що наступні члени розкладу дадуть такі коефіцієнтні функції:

$$f_1(x) = -\frac{x^2}{4} e^x, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{x^2}{8} \left[ 1 + \frac{17}{9}x + \frac{59}{36}x^2 + \frac{31}{36}x^3 + \frac{17}{54}x^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{47}{540}x^5 + \frac{83}{4320}x^6 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Модифікована з цією експонентою статистика Поліхронакоса визначається так:

$$n_j^{qP} = \frac{1}{z^{-1} E_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \quad (56)$$

а відповідна статистика Голдейна–Ву буде

$$n_j^{qHW} = \frac{1}{w[z^{-1} E_q^{\varepsilon_j/T}] + g}. \quad (57)$$

Детальніший аналіз цих статистик наведено в наступному розділі.

### 4. Встановлення зв'язку між еніонною та іншими типами статистик

Після описів статистик, отримавши вирази для віріальних коефіцієнтів, можемо встановити відповідність між еніонною статистикою та іншими видами дробових статистик.

Для цього потрібно провести таку процедуру: прирівнюємо другий та третій віріальні коефіцієнти еніонів і відповідної статистики, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_2 = b_2^{\text{anyon}}, \\ b_3 = b_3^{\text{anyon}}. \end{cases} \quad (58)$$

Відповідно будемо мати два рівняння на два параметри ( $\kappa, \gamma, \dots$ ). Отримавши ці параметри статистики ( $\kappa, \gamma, \dots$ ) при різних значеннях еніонного параметра  $\alpha \in [0, 1]$ , можемо знайти значення четвертого віріального коефіцієнта, який покаже, наскільки запропоновані двопараметричні статистики відрізняються від еніонної.

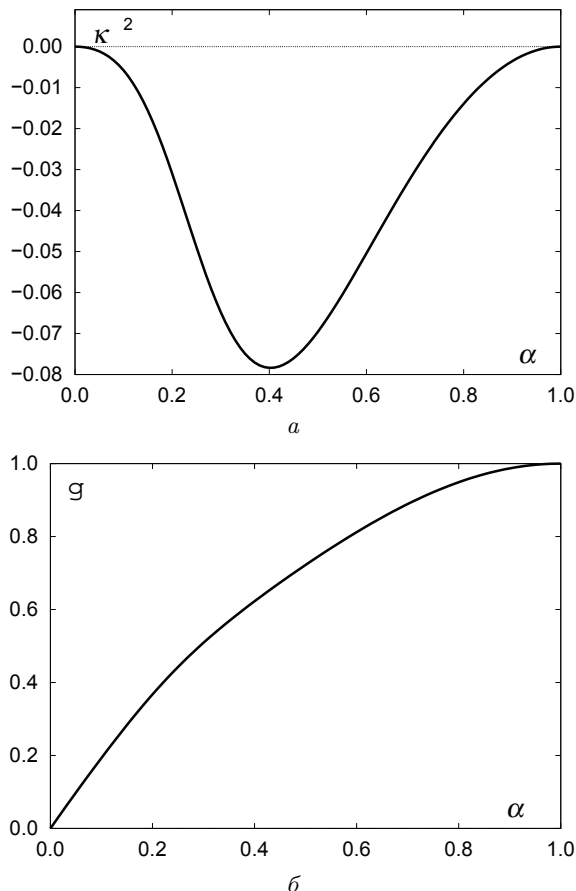


Рис. 1. Параметри  $\kappa^2$  (а) і  $g$  (б) у  $\kappa$ -деформованій статистиці Голдейна–Ву як функції параметра еніонів  $\alpha$

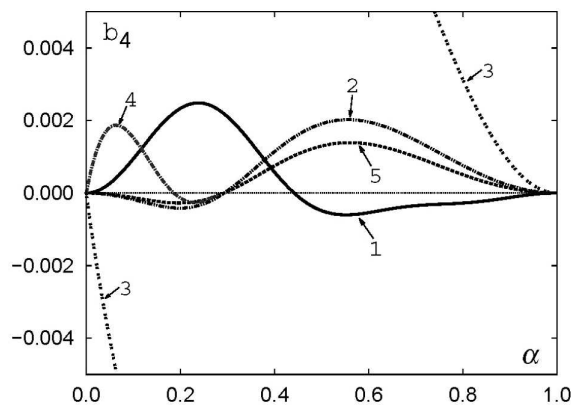


Рис. 2. Четвертий віріальний коефіцієнт у різних статистиках: 1 – еніони; 2 –  $\kappa$ -деформована статистика Голдейна–Ву; 3 –  $\kappa$ -деформована статистика Поліхронакоса; 4 – статистика Джентіле з  $s > 3$  (тут еквівалентно статистиці Бозе); 5 – статистика Голдейна–Ву, деформована експонентою Цалліса [23]

Числові розрахунки показують, що заміна  $q$ -експоненти Цалліса на  $\kappa$ -експоненту дає результати, які якісно збігаються з отриманими у праці [23] для модифікацій статистик Поліхронакоса та Голдейна–Ву. При цьому виявляється, що параметр  $\kappa^2 < 0$ , тобто  $\kappa$  – уявна величина. Однак такий результат не повинен становити труднощів, оскільки комплексні параметри у дробових статистиках можуть виникати у різних контекстах [34, 38, 39].

На рис. 1 зображено залежність параметрів  $\kappa^2$  і  $g$  у  $\kappa$ -деформованій статистиці Голдейна–Ву від еніонного параметра  $\alpha$ .

На рис. 2 показано порівняння четвертого віріального коефіцієнта у різних дробових статистиках. Цікаво зауважити, що в усіх досліджених статистиках поведінка  $b_4$  якісно відрізняється від результату еніонів – у бозонній границі вони мають різні знаки. Єдиним винятком є статистика Джентіле з  $s = 4$  з  $q$ -експонентою Цалліса, а фактично – деформована статистика Бозе.

У проміжному розподілі, що відповідає статистиці Джентіле, де максимальна заселеність рівнів обмежена числом  $s$ , ми розглянули різні значення  $s = 2, 3, 4$ . Фактично, кожен із відповідних виразів для чисел заповнення – це окремий розподіл, у якому деформація експоненти дає один параметр. Його ми пов'язували з еніонним  $\alpha$ , прирівнюючи другі віріальні коефіцієнти

$$b_2 = b_2^{\text{anyon}}. \tag{59}$$

Відповідно вже третій віріальний коефіцієнт відрізнявся від еніонного, як наведено на рис. 3.

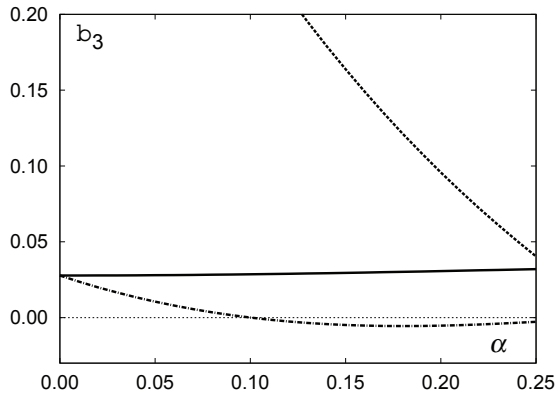
Проте, як сказано вище, поведінка четвертого віріального коефіцієнта при  $s > 3$  якісно збігається з еніонним, що дає підстави в майбутньому розглядати цю модель як основу для подальших модифікацій.

Далі наведемо числові результати для статистики Поліхронакоса з  $q$ -експонентою  $E_q^x$  (48). Розкладаючи вираз (56) у ряд за  $z$ , для кластерних інтегралів будемо мати з точністю до другого порядку за малими поправками ( $q = 1 + \theta, \gamma = 1 + \eta$ ):

$$B_1 = 1 + \frac{1}{2}\eta + \eta^2 P_1,$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta\theta + \eta^2 \left( \frac{9}{64} + P_2 \right) \right],$$

$$B_3 = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta + \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{1}{18}\eta + \frac{1}{9}\eta\theta + \eta^2 \left( \frac{1}{27} + P_3 \right) \right],$$



**Рис. 3.** Третій віріальний коефіцієнт у різних варіантах статистики Джентіле з експонентою Цалліса. Пунктирна лінія –  $s = 2$ , штрих-пунктирна –  $s > 2$ , суцільна – еніони

$$B_4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\theta + \frac{3}{4}\theta^2 + \frac{3}{32}\eta\theta + \eta^2 \left( \frac{15}{1024} + P_4 \right) \right],$$

де

$$P_j = -j \int_0^\infty e^{-(j+1)x} f_2(x) dx,$$

$$P_1 = -1,09993\dots, \quad P_2 = -0,181866\dots,$$

$$P_3 = -0,272799\dots, \quad P_4 = -0,0813217\dots$$

Звідси віріальні коефіцієнти:

$$b_2^{qP} = -\frac{1}{4} - \frac{\theta}{4} + \frac{3\eta}{16} + \left( \frac{3}{16}\theta\eta - 0,654347\eta^2 \right), \tag{60}$$

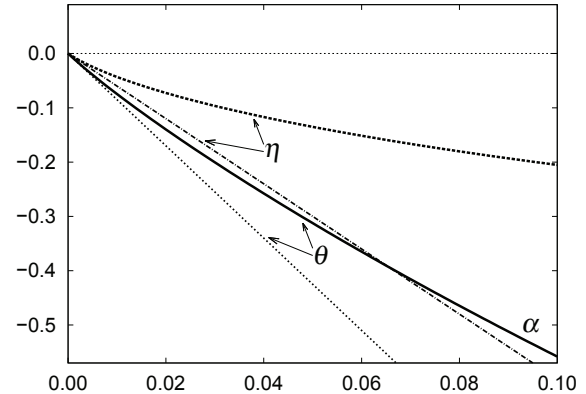
$$b_3^{qP} = \frac{1}{36} + \frac{\theta}{18} - \frac{17}{216}\eta + \left( \frac{\theta^2}{36} - \frac{17}{108}\theta\eta + 0,595426\eta^2 \right).$$

На рис. 4 наведено залежності поправок  $\theta$  та  $\eta$  від еніонного параметра  $\alpha$ . Можна зауважити, що малими ці поправки є лише в безпосередньому околі бозонної границі  $\alpha \rightarrow 0$ .

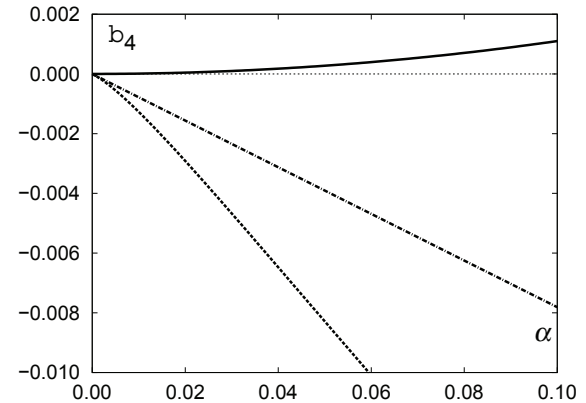
На рис. 5 наведено залежність четвертого віріального коефіцієнта модифікованої з  $q$ -експонентою статистики Поліхронакоса від еніонного параметра  $\alpha$ .

Проводячи аналогічні викладки для статистики Голдейна–Ву з  $q$ -експонентою  $E_q^x$  (48), після розкладу за малим параметром  $g$  та малим відхиленням  $\theta = q - 1$

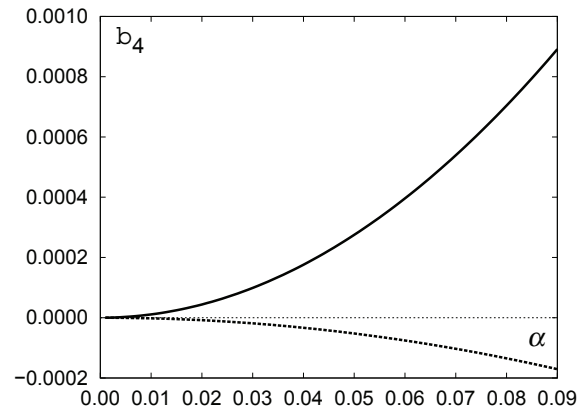
$$b_2^{gHW} = -\frac{1}{4} + \frac{g}{2} + 0,00144676\theta - 0,00289352g\theta - 0,459052\theta^2, \tag{61}$$



**Рис. 4.** Залежність малих поправок у статистиці Поліхронакоса з  $q$ -експонентою (48) від параметра еніонів



**Рис. 5.** Четвертий віріальний коефіцієнт у статистиці Поліхронакоса з  $q$ -експонентою (48). Суцільна лінія – результат для еніонів, штрих-пунктирна лінія – лінійне наближення за  $\theta, \eta$ , пунктирна лінія – квадратичне наближення за  $\theta, \eta$



**Рис. 6.** Четвертий віріальний коефіцієнт у статистиці Голдейна–Ву з  $q$ -експонентою (48). Суцільна лінія – результат для еніонів, пунктирна лінія – квадратичне наближення за  $g, \theta$



$$b_3^{q\text{HW}} = \frac{1}{36} + 0,00145216 \theta - 0,00798148 g\theta + 0,225433 \theta^2. \quad (62)$$

Порівняння четвертого віріального коефіцієнта у цій статистиці з еніонним наведено на рис. 6.

Як показують рис. 5, 6, і в останніх двох аналізованих статистиках четвертий віріальний коефіцієнт має знак, протилежний до еніонного  $b_4^{\text{anyon}}$ . Незважаючи на це, такі результати, подібно до отриманих у праці [23], забезпечують відтворення термодинамічних функцій еніонів з точністю, яка перевищує доступні експериментальні вимірювання [40].

## 5. Висновки

У роботі розглянуто дробові статистики, які узагальнюють квантові розподіли Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака. Подано інформацію про віріальні та кластерні розклади, віріальні коефіцієнти еніонів, а далі увагу зосереджено на модифікаціях трьох статистик, а саме: Поліхронакоса, Голдейна–Ву та Джентіле.

Знайдено кластерні інтеграли та віріальні коефіцієнти для семи типів статистик: неповна та  $\kappa$ -деформована статистика Поліхронакоса; неповна та  $\kappa$ -деформована статистика Голдейна–Ву; неповна та неадитивна статистика Джентіле для різних значень  $s$ . А також розглянуто модифіковану статистику Поліхронакоса з  $q$ -експонентою у бозонній границі.

Чисельні результати наведено для таких статистик:  $\kappa$ -деформовані статистики Голдейна–Ву та Поліхронакоса, статистика Джентіле з експонентою Цалліса при  $s = 2, 3, 4$ ; малих поправок у статистиці Поліхронакоса з  $q$ -експонентою. Виявляється, що жодна з узагальнених статистик не дає точної відповідності з еніонною [1], і лише деякі види статистик вдається частково зіставити з нею, але з певною точністю – до третього віріального коефіцієнта включно, що підтверджує попередні результати [23].

Отримані висновки відкривають можливості для подальших досліджень розглянутої проблеми у кількох напрямках, зокрема, вивчення двопараметричних модифікацій статистики Бозе (Джентіле при  $s > 3$ ) та конструювання виразу для чисел заповнення через ряди за малими поправками.

*Публікація містить результати досліджень, проведених за часткової грантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф64/41-2015 (№ держреєстрації 0115U004838).*

1. A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory* (World Scientific, Singapore, 2005).
2. А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **17**, 2001 (2013).
3. G.S. Jeon and J.K. Jain, Phys. Rev. B **81**, 035319 (2010).
4. G.S. Canright and M.D. Johnson, J. Phys. A **27**, 3579 (1994).
5. M.T. Batchelor, X.W. Guan, and N. Oelkers, Phys. Rev. Lett. **96**, 210402 (2006).
6. D.-V. Anghel, Phys. Scr. T **151**, 014079 (2012).
7. Z. Ebadi, B. Mirza, and H. Mohammadzadeh, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2013**, 057 (2013).
8. S.N. Bose, Z. Phys. **26**, 178 (1924).
9. A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss. phys.-math. Klasse, 261 (1924).
10. A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss. phys.-math. Klasse, 3 (1925).
11. P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. London A **112**, 661 (1926).
12. E. Fermi, Z. Phys. **36**, 902 (1926).
13. G. Gentile, Nuovo Cimento **17**, 493 (1940).
14. J.M. Leinaas and J. Myrheim, Nuovo Cimento **37B**, 1 (1977).
15. F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1987).
16. A.P. Polychronakos, Phys. Rev. Lett. **84**, 1268 (2000).
17. F. Mancarella, A. Trombettoni, and G. Mussardo, Nucl. Phys. B **867** [FS], 950 (2013).
18. F.E. Camino, W. Zhou, and V.J. Goldman, Phys. Rev. B **72**, 155313 (2005).
19. F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991).
20. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **73**, 922 (1994).
21. A.M. Gavrilik and Y.A.Mishchenko, Ukr. J. Phys. **58**, 1171 (2013).
22. A.M. Gavrilik and Y.A.Mishchenko, Nucl. Phys. B **891**, 466 (2015).
23. A. Rovenchak, Eur. Phys. J. B **87**, 175 (2014).
24. A. Rovenchak, Phys. Rev. A **89**, 052116 (2014).
25. P.F. Borges, H. Boschi-Filho, and C. Farina, Mod. Phys. Lett. A **14**, 1217 (1999).
26. S. Mashkevich, J. Myrheim, and K. Olaussen, Phys. Lett. B **382**, 124 (1996).
27. A. Kristoffersen, S. Mashkevich, J. Myrheim, and K. Olaussen, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 3723 (1998).
28. A.P. Polychronakos, Phys. Lett. B **365**, 202 (1996).
29. Q.A. Wang, Entropy **5**, 220 (2003).
30. Y. Kaupp, S. Liraki, D. Tayurskii, A. Useinov, A. El Kaabouchi, L. Nivanen, B. Minisini, F. Tsobnang, A. Le Méhauté, and Q.A. Wang, J. Low Temp. Phys. **150**, 660 (2008).
31. G. Kaniadakis, Physica A **296**, 405 (2001).
32. G. Kaniadakis, Entropy **15**, 3983 (2013).

33. R.T. Delves, G.S. Joyce, and I.J. Zucker, Proc. R. Soc. Lond. A **453**, 1177 (1997).
34. A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **39**, 1141 (2013).
35. А.А. Ровенчак, *Фізика бозе-систем* (ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, 2015).
36. C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
37. V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus* (Springer, New York, 2002).
38. Y. Yang, S. Xie, W. Feng, and X. Wu, Mod. Phys. Lett. A **13**, 879 (1998).
39. A.M. Gavrilik and A.P. Rebesh, Mod. Phys. Lett. B **25** (2012).
40. *Springer Handbook of Materials Measurement Methods*, edited by H. Czichos, T. Saito, and L. Smith (Springer, Berlin, 2006).

Одержано 10.06.15

*М.Я. Горнецкая, А.А. Ровенчак*

#### ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДИФИКАЦИИ СТАТИСТИК ЭНИОНОВ

##### Резюме

В работе рассмотрены двухпараметрические модели дробных статистик, направленные на установление выражения для чисел заполнения свободных энионов. Найдены вири-

альные коэффициенты для следующих типов статистик:  $\kappa$ -деформированные статистики Полихронакоса и Холдейна–Ву, модифицированные с  $q$ -экспонентой статистики Полихронакоса и Холдейна–Ву в бозонном пределе, неполная и неаддитивная статистика Джентиле для разных значений максимального заполнения уровня. Установлена и проанализирована связь между различными типами дробных статистик и статистикой энионов.

*M. Hornetska, A. Rovenchak*

#### TWO-PARAMETER MODIFICATIONS OF ANYONIC STATISTICS

##### S u m m a r y

Two-parameter models of fractional statistics aimed at finding an expression for the occupation numbers of free anyons have been considered. Virial coefficients are found for statistics of several types:  $\kappa$ -deformed Polychronakos and Haldane–Wu statistics, Polychronakos and Haldane–Wu statistics modified with the  $q$ -exponential in the bosonic limit, and incomplete and nonadditive Gentile statistics for various level-filling maxima. A relation between the anyonic statistics and various statistics of fractional types is found and analyzed.