Г.Г. РОДЕ

Інститут фізики НАН України
(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: ifanrode@gmail.com)

УДК 53.088.3

ПЕРЕНОС ПОХИБОК ТА СЕРЕДНІХ ВИМІРІВ ФІЗИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ x^2 ТА $\sqrt{x}$

Отримані "правила переносу похибки та середнього" однієї вимірюваної фізичної величини на іншу, пов'язану з нею функційним зв'язком x^2 або $\sqrt{x}$. В ці правила по природі закладена вагова схема Гауса. Тому вони мають добре працювати в рамках реальної вагової схеми Гауса з дискретними даними реального фізичного дослідження (з "вибірками"). Аналітична форма, в якій представлені згадані правила ("аналітичні правила переносу"), а також їх точний характер дозволяє спростити і прискорити процедуру обробки й аналізу експериментальних даних.

Ключові слова: перенос похибок, перенос відхилень, перенос помилок.

1. Вступ

Дана робота присвячена актуальній темі оцінки похибок фізичних величин при непрямих вимірюваннях і вирішує частину загальної проблеми переносу похибок.

Більш детально проблема переносу похибок описана в [1, 2]. Є два підходи для вирішення цієї проблеми. Всі сучасні теоретичні й практичні застосування, методики й розробки перенос помилок будують виключно на основі розкладу в ряд Тейлора ("диференціювання") [4–12]. Проблематика "аналітичного" переносу помилок найкраще окреслена в [1]. В даній роботі робляться певні зусилля в цьому напрямку, а саме розглянуті дві поширені елементарні функції x^2 та $\sqrt{x}$, і вона є логічним продовженням роботи [2].

2. Нові правила обчислення середніх та переносу похибок для елементарних функцій x^2 та $\sqrt{x}$

Для отримання аналітичних правил для двох вибраних функцій (x^2 та $\sqrt{x}$) середнє $x_{\text{сер}}$ та "похибка" $k(\Delta x)^2_{\text{сер}}$ були прив'язані (формалізовані) до базових понять математичної статистики [2]:

$$x_{\text{сер}} \approx E_x; \quad k(\Delta x)^2_{\text{сер}} \approx D_x,$$

де E_x і D_x – відповідно, математичне очікування й дисперсія вимірюваної величини x, які згідно з [1] визначаються рівняннями:

$$\begin{aligned} &\mu = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx; \\ &D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx; \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Для функційного зв'язку $y = h(x)$ математичне очікування й дисперсія визначаються [1,2] як:

$$\begin{aligned} &\chi = E_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx; \\ &D_h = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) f(x) dx - E_h^2. \end{aligned} \tag{2}$$

© Г.Г. РОДЕ, 2017

Найважливішим серед розподілів $f(x)$ вважається так званий нормальний (Гаусів) розподіл ймовірності [1, 2]:

$$f(x) = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[-p^2(x-\mu)^2];$$
$$p^2 = \frac{1}{2D_x}; \quad \mu = E_x. \tag{3}$$

В рівняннях (2), (3) $\mu = E_x$ та D_x входять до $f(x)$ як параметри, тому, строго кажучи, $f(x)$ можливо записати, як $f(x, E_x, D_x)$:

$$E_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x, E_x, D_x) dx, \tag{4}$$

$$D_h + E_h^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(x) f(x, E_x, D_x) dx. \tag{5}$$

Легко помітити, що (4) та (5) – інтегральні рівняння, вирішивши які ми отримали б бажаний аналітичний зв'язок між E_h, D_h (аналогами середніх для функції $h(x)$) з одного боку та E_x, D_x (аналогами виміряних середніх) з іншого.

Виявилося, що можливо підібрати табличні інтеграли [3], подібні до (4) та (5) і таким чином вирішити задачу для двох елементарних функцій (x^2 та $\sqrt{x}$) (див. Додаток).

Згадані співвідношення для функції x^2 мають вигляд:

$$E_h = E_{x^2} = E_x^2 + D_x;$$
$$D_h = D_{x^2} = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x, \tag{6}$$

де E і D – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E(x^2)$, $D(x^2)$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію x^2.

Для функції $\sqrt{x}$ співвідношення виглядають як:

$$E_h^4 = E_{\sqrt{x}}^4 = E_x^2 - \frac{1}{2} D_x;$$
$$D_h = D_{\sqrt{x}} = E_x - \sqrt{E_x^2 - \frac{1}{2} D_x}, \tag{7}$$

E_x і D_x – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E_{\sqrt{x}}$ та $D_{\sqrt{x}}$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію $\sqrt{x}$.

Таким чином, ми отримали (див. Додаток) бажані правила "переносу похибки" та обчислення "зміщеного середнього" типу $E_h = E_h(E_x, D_x)$ та $D_h = D_h(E_x, D_x)$ для функцій $h(x) = x^2$ та $h(x) = \sqrt{x}$.

3. Застосуванння нових правил до експериментальних даних

Набір експериментальних даних являє собою сукупність окремих випадкових значень x_i виміряної фізичної величини x, так званої "вибірки" $\{x_i\}$. Величина x може мати безперервний розподіл [1] (іншими словами, працюють з величинами, що випадково "вибрані приладом" з безперервної множини).

Розглянемо, як будуть виконуватись отримані співвідношення саме у випадку вибірок. Для цього обчислимо середні звичайним способом (який ми беремо за взірець) по 4-х вибірках: за 2-ма наборами експериментальних даних $\{x_i\}$ та за 2-ма наборами обчислених функцій x^2 і $\sqrt{x}$. І порівняймо їх з результатами, отриманими за співвідношеннями (6), (7).

Приклад для x^2

Як приклад для x візьмемо вибірку $\{x_i\}$ з 20 вимірів одного з параметрів елементарної ґратки. Тут і далі нижче вибірки побудовані на основі даних вимірювань, отриманих за допомогою 3-кружного дифрактометра [13, 14]:

$$\{x_i\} = 9{,}75,\ 9{,}778,\ 9{,}792,\ 9{,}841,\ 9{,}841,\ 9{,}848,\ 9{,}848,\ 9{,}855,\ 9{,}855,\ 9{,}862,\ 9{,}722,\ 9{,}708,\ 9{,}659,\ 9{,}659,\ 9{,}652,\ 9{,}652,\ 9{,}645,\ 9{,}645,\ 9{,}638,\ 9{,}75\,(\text{Å}).$$

Арифметичні середні (обчислені по цій виборці з сталою ймовірністю $w_i = 1/20$) дадуть нам такі значення:

$$E_n = 9{,}75; \quad D_n = 0{,}00729; \quad \Delta_n = 0{,}08945.$$

Використавши ці значення, як 1-ше наближення, обчислюємо вже Гаусові середні (2–3 ітерації) згідно з ваговою схемою Гауса:

$$E_x = \sum x_i f_i; \quad D_x = \Big(\sum x_i - E_x\Big)^2 f_i;$$
$$\Delta_x = \sqrt{D_x}, \tag{8}$$

де f_i – ймовірність по виборці, (нормована до 1): $f_i = \frac{w_i}{\sum_n w_i}$; $\sum_n f_i = 1$; а

$$w_i = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[-p^2(x_i - \mu)^2], \quad p^2 = \frac{1}{2D_x}. \tag{9}$$

Отримуємо $E_x = 9{,}75$; $D_x = 0{,}00537$; $\Delta_x = 0{,}07328$. Іншими словами, по цій виборці маємо $E_x = 9{,}75 \pm$

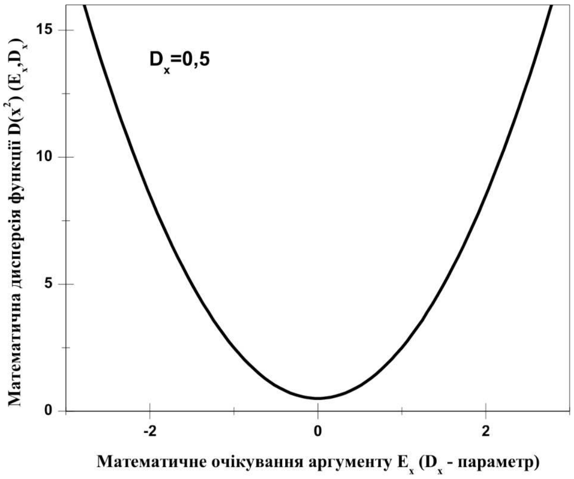

Рис. 1. Залежність дисперсії функції $D_{x^2}(E_x, D_x)$ від E_x

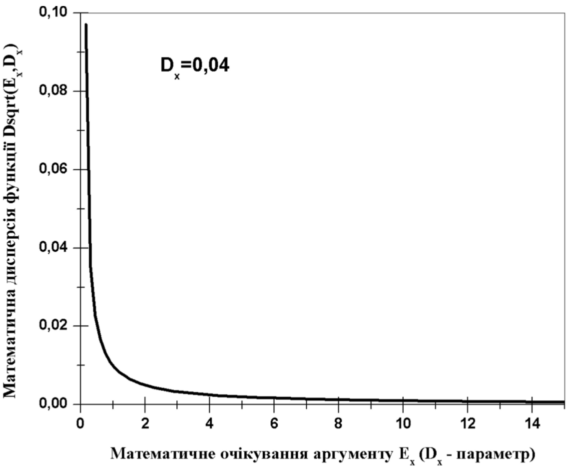

Рис. 2. Залежність дисперсії функції $D_{\sqrt{x}}(E_x, D_x)$ від E_x

$\pm\,0{,}07$. Для того, щоб правильно обчислити середні для функції x^2 необхідно побудувати нову статистичну вибірку $\{x_i^2\}$ і вже по ній обчислити потрібні середні. Нова вибірка буде:

$\{x_i^2\} =$ 95,0625, 95,60928, 95,88326, 96,84528, 96,84528, 96,9831, 96,9831, 97,12103, 97,12103, 97,25904, 95,0625, 94,51728, 94,24526, 93,29628, 93,29628, 93,1611, 93,1611, 93,02602, 93,02602, 92,89104 (Å^2).

Арифметичні середні дадуть нам такі значення:

$$E_n = 95{,}06979; \quad D_n = 2{,}7725; \quad \Delta_n = 1{,}6651.$$

Використавши значення E_x, D_x та Δ_x і рахуючи згідно з (8) та (9), отримаємо бажані середні для функції x^2 звичайним способом:

$$E_{x^2} = 95{,}06786; \quad D_{x^2} = 2{,}04139; \quad \Delta_{x^2} = 1{,}42877.$$

"Перенос помилок" за отриманими співвідношеннями (6) дає такі значення:

$$E_{x^2} = 95{,}06787; \quad D_{x^2} = 2{,}042; \quad \Delta_{x^2} = 1{,}42899.$$

Тут і далі ми навмисне залишили на розгляд більше знаків, ніж потрібно (D_x – 2 знаки; Δ_x – взагалі 1), щоб мати змогу повніше відслідкувати всі обчислення.

Зважаючи на це, можна стверджувати, що в випадку функції x^2 стандартні відхилення Δ_{x^2} повністю збігаються. Іншими словами, "перенос помилок" за співвідношеннями (6) функції x^2 – правильний і добре працює для вибірок.

Приклад для $\sqrt{x}$

Розглянемо ще один приклад, для функції $\sqrt{x}$. Використаємо вибірку вимірів a^2 прямої елементарної ґратки:

$\{y_i\} = \{x_i^2\} =$ 40,45, 40,895, 40,984, 41,518, 41,518, 41,607, 41,607, 41,696, 41,785, 41,785, 40,45, 40,005, 39,916, 39,382, 39,382, 39,293, 39,293, 39,204, 39,115, 39,115 (Å^2).

Згідно з використаною вище стандартною схемою обчислень середніх для вибірки:

а) Обчислюємо спочатку арифметичні середні (ймовірність $w_i = 1/20$) –

$$E_n = 40{,}45; \quad D_n = 1{,}05587; \quad \Delta_n = 1{,}02756.$$

б) Далі обчислюємо Гаусові середні з ваговою схемою (9):

$$E_y = 40{,}45; \quad D_y = 0{,}79847; \quad \Delta_y = 0{,}89357.$$

в) Утворюємо масив-вибірку (згідно з функцією $\sqrt{y}$):

$\{\sqrt{y_i}\} =$ 6,36003, 6,39492,, 6,40187, 6,44345, 6,44345, 6,45035, 6,45035, 6,45724, 6,46413, 6,46413, 6,36003, 6,32495, 6,31791, 6,27551, 6,27551, 6,26841, 6,26841, 6,26131, 6,2542, 6,2542 (Å).

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2017. Т. 62, № 2

Арифметичні середні дадуть нам такі значення:

$E_{\sqrt{y}} = 6{,}35952; \quad D_{\sqrt{y}} = 0{,}00653; \quad \Delta_{\sqrt{y}} = 0{,}08081.$

Робимо статистичну обробку цієї вибірки, використавши значення E_y, D_y та Δ_y:

$E_{\sqrt{y}} = 6{,}35965; \quad D_{\sqrt{y}} = 0{,}00494; \quad \Delta_{\sqrt{y}} = 0{,}07029.$

Розрахунки за співвідношеннями (11) дають такі значення "переносу помилок":

$E_{\sqrt{y}} = 6{,}35964; \quad D_{\sqrt{y}} \ = 0{,}00494; \quad \Delta_{\sqrt{y}} = 0{,}07025.$

Як ми бачимо в цьому випадку збігання – ідеальне. Тобто, як і у випадку функції $\sqrt{x}$ "перенос помилок" за співвідношеннями (7) – правильний і добре працює для вибірок.

Слід зауважити, що "роботу оберненої формули" варто було б перевірити на вибірках для більш широкого діапазону середніх та дисперсій, але це виходить за рамки даної статті.

4. Деякі загальні риси отриманих співвідношень

Аналітичний вигляд отриманих правил переносу дозволяє легко виділити особливості відповідних співвідношень і навіть побудувати графічні залежності, що дуже корисно для планування фізичного експерименту та його аналізу.

1. Слід наголосити, що величини E_h, D_h, E_x, D_x взаємно пов'язані, а також і те, що E_h й D_h – функції 2-х змінних, а не однієї:

$$E_h = E_h(E_x, D_x); \quad D_h = D_h(E_x, D_x).$$

До цього буває важко звикнути, як, наприклад, до факту, що похибки функцій $h(x)$ $\Delta(x^2)$ або $\Delta(\sqrt{x})$ залежать від наміряного середнього значення $x_{\text{сер}}$.

2. Інакше важко збагнути факт, що E_{x^2} ніколи, за ніяких вимірів, не може прийняти 0 – значення. Більше того, E_{x^2} буде завжди більше D_x, точніше $E_{x^2} \geqslant D_x$ (10), 1-е рівняння.

3. З цим же висновком пов'язана умова для зворотної функції ($\sqrt{x}$), яка випливає з 1-го рівняння (11) : $E_y \geqslant \frac{1}{2} D_y$.

4. Все це добре видно на рис. 1 та 2, де подані залежності дисперсій функцій:

$$D_h = D_{x^2}(E_x, D_x); \quad D_h = D_{\sqrt{x}}(E_x, D_x);$$

від значень вимірюваних "середніх" відповідних аргументів E_x (D_x – параметр).

5. Крім того, сама можливість мати графічний вигляд отриманих співвідношень дає змогу обговорювати характер майбутніх вимірів, планувати їх.

6. Зауважимо, що в граничному випадку $D_x = 0$:

$$E_{x^2} = E_x^2; \quad D_{x^2} = 0;$$
$$E_{\sqrt{x}} = \sqrt{E_x}; \quad D_{\sqrt{x}} = 0;$$

і при цьому можна користуватись "звичайними" правилами переносу:

$$E_{x^2} = E_x^2; \quad E_{\sqrt{x}} = \sqrt{E_x}.$$

В інших випадках, коли D_x мають помітні величини, вирази для E_{x^2} (6), (7) дадуть більш правильні значення.

5. Висновки

1. Співвідношення (6), (7) дають правильний результат для виборок і можуть бути широко застосовані для скорочення і суттєвого спрощення обчислювальних процедур статистичних обчислень для функцій x^2 та $\sqrt{x}$.

2. У випадку відсутності початкового масиву експериментальних данних є чи не єдиним простим і правильним способом отримання E_h, D_h і похибки σ зазначених функцій.

3. Оскільки D_h та похибки σ для обох розглянутих функцій практично збігаються з дійсними значеннями, можливий точний перенос похибок для ланцюжка функцій типу $(\sqrt{(\sqrt{x})^2})^2$... або ж враховуючи результати [2] іншою сумішшю функцій x^2, $\sqrt{x}$, $\cos(x)$, $\arccos(x)$.

4. Тому на основі отриманих аналітичних співвідношень можливо побудувати два простих універсальних програмних алгоритми (загального призначення) для обчислення пар окремих значень $(E(x^2); D(x^2))$ та $(E(\sqrt{x}); D(\sqrt{x}))$, що можуть бути вбудовані, як окремі модулі (підпрограми), в будь-які програмні процедури. При цьому цей алгоритм буде прозорим (легким для читання). Це принципово неможливо при інших методах переносу, оскільки в них потрібно розкладати в ряд або диференціювати всю суперпозицію функцій, як єдине ціле. І для кожної задачі треба будувати окрему процедуру.

5. Можливо передбачити величину похибки функції і побудувати її графічну залежність від планованої області вимірів фізичної величини.

6. Цікавою є можливість отримати точне значення зміщення середнього для $E(x^2)$ та $E(\sqrt{x})$. В наведених прикладах це зміщення ніяк не впливає на значення цих середніх і не відіграє ніякої ролі, але воно існує і в деяких застосуваннях його значення може використовуватись.

ДОДАТОК

В цьому додатку наведений математичний доказ правильності отриманих співвідношень для 2-х функцій $E(x^2)$ та $E(\sqrt{x})$, тобто шлях зведення інтегральних рівнянь (4) і (5) до табличних інтегралів і приведення отриманих співвідношень до зручного вигляду (6) та (7).

Математичне очікування E_h для функції $h(x) = x^2$

У випадку $h(x) = x^2$ рівняння (4), з урахуванням Гаусового розподілу (3) виглядає як:

$$E_h = E_{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp[-p(x-\mu)^2] =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-px^2 + 2px\mu - p\mu^2]dx =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-px^2 + 2px\mu]dx =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) J, \tag{10}$$

де $J = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-px^2 + 2p\mu x]dx$.

Інтегральний вираз J є по суті табличним інтегралом T_8 (3.462.8) [3], який має вигляд:

$$T_8 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-px^2+2qx]dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1+2\frac{q^2}{p}\right)\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right).$$

Легко помітити, що $J = T_8$, при $q = p\mu$. Підставивши це значення в вираз для T_8, маємо:

$$J = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1+2\frac{p^2\mu^2}{p}\right)\ \exp\left(\frac{p^2\mu^2}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}(1+2p\mu^2)\ \exp(p\mu^2).$$

Після включення цього виразу в рівняння (10), отримуємо E_{x^2}:

$$E_h = E_{x^2} = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) J =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}(1+2p\mu^2)\ \exp(p\mu^2) =$$

$$= \frac{1}{2p}(1+2p\mu^2) = \frac{1}{2p} + \mu^2.$$

Враховуючи те, що $p = \frac{1}{2D(x)} = \frac{1}{2D_x}$, згідно з (4), остаточно маємо:

$$E_h = E_{x^2} = \mu^2 + D_x = E_x^2 + D_x. \tag{11}$$

Це – майже очікуваний результат. Наявність “зміщення” D_x можна ігнорувати (при невеликих $D_x \approx 0$), але (15) – це точна робоча формула для $h(x) = x^2$.

Дисперсія D_h для функції $h(x) = x^2$

З рівняння (5) маємо “перенос похибки”:

$$D(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx - E_h^2 = J_0 - E_h^2. \tag{12}$$

Розглянемо тепер інтеграл J_0. Він зводиться до відповідного табличного інтеграла перетвореннями, подібними до (10):

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp[-p(x-\mu)^2] =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp[-px^2 + 2px\mu - p\mu^2]dx =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp[-px^2 + 2px\mu]dx =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\pi}} \exp(-p\mu^2) J_{01}, \tag{13}$$

де

$$J_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp[-px^2 + 2p\mu x]dx.$$

Інтегральний вираз J_{01} має вигляд табличного інтеграла T_2 (3.462.2) або табличного інтеграла $T_2^{'}$ (3.461.2), рішення яких в [3] записані в двох формах:

$$T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp[-px^2+2qx]dx = \frac{1}{2^{n-1}p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}}\left[q\exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right],$$

$$T_2' = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp[-px^2 + 2qx]dx =$$

$$= n!\sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^n \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{1}{(n-2k)!k!}\left(\frac{p}{4q^2}\right)^k.$$

При $n = 4$ обидві форми приводять до одного й того ж виразу, тобто $T_2' = T_2$. Отже маємо при $n = 4$:

$$J_{01} = T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp[-px^2 + 2qx]dx =$$

$$= \frac{1}{2^3 p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{d^3}{dq^3}\left[q\exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] = \frac{1}{8p}\sqrt{\frac{\pi}{p}} J_{02},$$

де

$$J_{02} = \frac{d^3}{dq^3}\left[q\exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] = \frac{d^2}{dq^2}\left[\exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{2q^2}{p}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dq}\left[\frac{2q}{p}\exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{4q}{p}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{4q^3}{p^2}\exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] =$$
$$= \frac{d}{dq}\left[\frac{6q}{p}\exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{4q^3}{p^2}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] =$$
$$= \left[\frac{6}{p}\exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{12q^2}{p^2}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) + \frac{12q^2}{p^2}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{8q^4}{p^3}\ \exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\right] = \left[\frac{6}{p} + \frac{24q^2}{p^2}\ + \frac{8q^4}{p^3}\right]\exp\left(\frac{q^2}{p}\right).$$

Підставивши значення $q = p\mu$, добуваємо:

$$J_{02} = \left[\frac{6}{p} + \frac{24p^2\mu^2}{p^2} + \frac{8p^4\mu^4}{p^3}\right]\exp\left(\frac{p^2\mu^2}{p}\right) =$$
$$= \left[\frac{6}{p} + 24\mu^2 + 8p\mu^4\right]\exp(p\mu^2).$$

Відповідно

$$J_{01} = \tfrac{1}{8p}\sqrt{\tfrac{\pi}{p}}J_{02} = \frac{1}{8p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[\frac{6}{p} + 24\mu^2 + 8p\mu^4\right]\exp(p\mu^2) =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp(p\mu^2)\left[\frac{3}{4p^2} + 3\frac{\mu^2}{p}\ + \mu^4\right].$$

Вбудувавши це значення в (13) і врахувавши, що $p = \frac{1}{2D_x}$, маємо:

$$J_0 = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-p\mu^2)J_{01} = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-p\mu^2)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp(p\mu^2) \times$$
$$\times\left[\frac{3}{4p^2} + 3\frac{\mu^2}{p} + \mu^4\right] = \frac{3}{4p^2} + 3\frac{\mu^2}{p} + \mu^4 =$$
$$= \frac{3}{4}4D_x^2 + 3\mu^2 2D_x + \mu^4 = 3D_x^2 + 6\mu^2 D_x + \mu^4.$$

З урахуванням J_0 і (12) отримуємо для $D(x^2)$ (дисперсію для функції $h(x) = x^2$):

$$D(x^2) = J_0 - \chi^2 = \quad 3D_x^2 + 6\mu^2 D_x + \mu^4 - (\mu^2 + D_x)^2 =$$
$$= 3D_x^2 + 6\mu^2 D_x + \mu^4 - \mu^4 - 2\mu^2 D_x - D_x^2 =$$
$$= 2D_x^2 + 4\mu^2 D_x = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x.$$

Остаточний результат:

$$D(x^2) = 2D_x^2 + 4\mu^2 D_x = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x. \tag{14}$$

Тобто це і буде правило "переносу помилок" для $h(x) = x^2$.

Слід зауважити, що всі ці процедури (розкриття підінтегральних виразів у суму інтегралів, перенесення констант, тощо) – коректні з погляду правил статистики [1].

Середнє E_h та дисперсія D_h для функції $h(x) = \sqrt{x}$

Безпосередній шлях обчислення $E_{\sqrt{x}}$ та $D_{\sqrt{x}}$ через табличні інтеграли – досить проблематична справа. Бажані співвідношення можна отримати, розглядаючи функцію $D_{\sqrt{x}}$, як зворотну до x^2, використавши співвідношення (6).

Дійсно, рівняння (6) дають нам явний з'вязок між чотирма інтегралами E_{x^2}, D_{x^2}, E_x, D_x. Грубо кажучи, між 4-ма числами E_{x^2}, D_{x^2}, E_x, D_x:

$$E_{x^2} = E_{x^2}(E_x, D_x);\ D_{x^2} = D_{x^2}(E_x, D_x). \tag{15}$$

Якщо з рівнянь (6) та (15) визначити функції $E_x = E_x(E_{x^2}, D_{x^2})$ і $D_x = D_x(E_{x^2}, D_{x^2})$, обернені до функцій (15), то вони також мусять правильно описувати математичні зв'язки між чотирма інтегралами E_x, D_x, E_{x^2}, D_{x^2}.

При цьому, якщо E_{x^2} та D_{x^2} будуть отримані в якийсь інший спосіб (наприклад, виміряні) і будуть мати ті ж числові значення, що й обчислені за (15), то вони знов-таки задовільнять рівняння зв'язку чотирьох інтегралів (6) та (15) тоді і тільки тоді, коли E_x та D_x матимуть ті самі значення, що задані в (19).

Іншими словами, якщо $y = x^2$ і, відповідно, $x = \sqrt{y}$, то співвідношення $E_x = E_x(E_y, D_y)$ і $D_x = D_x(E_y, D_y)$, обернені рівнянням (6) та (15), дадуть нам вірні значення інтегральних виразів математичного очікування E_x і дисперсії D_x, визначених згідно з (8) та (9) для функції випадкової величини y, яка зв'язана зі змінною x законом $y = x^2$ або $x = \sqrt{y}$.

Тобто, вирішивши (6) і (15) відносно x, ми простим обчисленням можемо отримувати значення E_x і D_x позначеннями E_y, D_y, які є середніми для вимірів випадкової величини y, яка пов'язана з x співвідношенням $x = \sqrt{y}$.

Вирішимо (6). Для цього перепишемо їх, відповідно, у вигляді:

$$E_y = E_x^2 + D_x, \tag{16}$$

$$D_y = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x. \tag{17}$$

Пам'ятаючи, що інтеграли E_y і D_y пов'язані з функцією $y = x^2$, а інтеграли E_x та D_x – з функцією $x = \sqrt{y}$. Вирішимо ці рівняння відносно інтегралів E_x та D_x. Для цього піднесемо обидві частини (16) в квадрат і домножимо на 2. Отримаємо:

$$2E_y^2 = 2(E_x^2 + D_x)^2.$$

Розкривши дужки правої частини і віднявши результат від обох частин (17), маємо:

$$D_y - 2E_y^2 = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x - [2(E_x^2 + D_x)^2] =$$
$$= 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x - 2E_x^4 - 4E_x^2 D_x - 2D_x^2 = -2E_x^4.$$

Звідси ми отримуємо явну функцію $E_x(E_y, D_y)$:

$$E_x^4 = E_y^2 - \frac{1}{2}D_y. \tag{18}$$

Записуючи (16) у вигляді $D_x = E_y - E_x^2$ і підставивши з (18) значення $E_x^2 = \sqrt{E_y^2 - \frac{1}{2}D_y}$ (для радикала беремо знак +, зваживши, що $E_x^2 \geqslant 0$), остаточно маємо явну функцію $D_x(E_y, D_y)$:

$$D_x = E_y - \sqrt{E_y^2 - \frac{1}{2}D_y}. \tag{19}$$

Слід зауважити, що зроблені перетворення не протирічать правилам статистики (1), тобто є коректними.

Наостанок перепишемо отримані співвідношення (16)–(19) у більш зрозумілому символічному вигляді, де x – позначена вимірювана фізична величина (аргумент), а h – відповідна функція (x^2; $\sqrt{x}$):

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{x^2} = E_x^2 + D_x;\\
&D_h = D_{x^2} = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x;\\
&E_h^4 = E_{\sqrt{x}}^4 = E_x^2 - \frac{1}{2}D_x;\\
&D_h = D_{\sqrt{x}} = E_x - \sqrt{E_x^2 - \frac{1}{2}D_x}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи результати [2], корисно привести ще 4 "аналітичні" переноси для 2-х функцій ($\cos(x)$, $\arccos(x)$):

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{\cos} = \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right)\cos E_x;\\
&D_h = D_{\cos} = \frac{1}{2}[1-\exp(-D_x)][1-\exp(-D_x)\cos 2E_x];\\
&E_h = E_{\arccos} = \arccos\frac{E_x}{\pm\sqrt{E_x^2 + \sqrt{(1-E_x^2)^2 - 2D_x}}};\\
&D_h = D_{\arccos} = \ln\left(\frac{1}{E_x^2 + \sqrt{(1-E_x^2)^2 - 2D_x}}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Якщо зважити на формалізацію:

$$x \approx E_x; \quad k(\Delta x)^2 \approx D_x,$$

то отримані співвідношення (20), (21) дають нам бажані "правила переносу" середніх та похибок для функцій x^2, $\sqrt{x}$, $\cos(x)$, $\arccos(x)$:

$$X \to H; \quad |\Delta X| \to |\Delta H|.$$

Матеріали по циклу робіт були представлені на семінарах 8 відділів Інституту Фізики. Автор щиро вдячний колективам і завідуючим цих підрозділів за увагу і надану можливість озвучити їх, подивитись на них зі сторони іншими очима (І.В. Блонському, М.С. Бродіну, А.Г. Наумовцу, А.М. Негрійко, Ю.А. Резнікову, С.М. Рябченко, П.М. Томчуку та Л.П. Яценко). Без критичних зауважень, висловлених на цих представленнях, можна сміливо стверджувати, що робота значно б програла, якщо б взагалі склалась. Особливо хочу подякувати С.М. Рябченко за прискіпливе обговорення результатів і опонування матеріалу, Г.В. Клімушевій за вичитування статті і критичні зауваження, а також А.І. Войтенко за поради. І подяка всім, хто був не байдужим і підтримав виконану роботу.

1. Д. Худсон. *Статистика для физиков* (Мир, 1970).
2. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos(x)$ та $\arccos(x)$. *УФЖ* **61**, №4 (2016) [DOI: 10.15407/ujpe61.04.0345].
3. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматгиз, 1963) [ISBN: 0122947606].
4. *Propagation of uncertainty* (Wikipedia); https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty.
5. H.H. Ku. Notes on the use of propagation of error formulas. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **70C**, 263 (1966) [DOI: 10.6028/jres.070C.025].
6. Ph.R. Bevington, D.K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw-Hill, 2002) [ISBN: 0-07-247227-8].
7. J.R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* (University Science Books, Sausalito, Ca, 1997) [ISBN: 0-935702-42-3 (cloth.) ISBN: 0-935702-75X (pbk.)].
8. B.N. Taylor, C.E. Kuyatt. *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results (NIST Technical Note 1297)* (National Institute of Standards and Technology, 1994).
9. P.K. Sinervo. Denition and treatment of systematic uncertainties in high energy physics and astrophysics. *Proceedings of the PHYSTAT2003 Conference, SLAC, Stanford, CA, September 8–11* (2003), p. 122.
10. J. Denker. Nonlinear least squares. http://www.av8n.com/physics/nonlinear-least-squares.htm.
11. E.W. Weisstein. Standard deviation entry at mathworld. http://mathworld.wolfram.com/StandardDeviation.html.
12. Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents. http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_104_2009_E.pdf.
13. Д.М. Хейкер, Э.Л. Лубе, А.В. Миренский, Н.И. Комяк, О.В. Маклаков, Л.З. Таткин, Э.Н Гуревич, В.С. Рогачев. Конструкция автоматического дифрактометра для исследования монокристаллов ДАР-1. Сб. *Аппаратура и методы рентгеновского анализа* (Машиностроение, 1968), Вып. 3, с. 130–144.
14. Э.Л. Лубе, Д.М. Хейкер. Управляющая программа автоматического дифрактометра ДАР-1. Сб. *Аппаратура и методы рентгеновского анализа* (Машиностроение, 1968), Вып. 3, с. 145–161.

Одержано 23.03.16

G.G. Rode

PROPAGATION OF THE MEASUREMENT ERRORS AND MEASURED MEANS OF PHYSICAL QUANTITIES FOR THE ELEMENTARY FUNCTIONS x^2 AND $\sqrt{x}$

S u m m a r y

Rules for the propagation of the error and the mean value obtained for a measured physical quantity x onto another one, which is coupled to the former by means of the x^2 or $\sqrt{x}$ functional relation, have been derived. Those rules are inherently based on the Gaussian weight scheme, so that they should provide correct results in the framework of the latter with discrete data, which is typical of a real physical experiment (with samplings). The obtained analytical form that cummulates the mentioned rules (the "analytical propagation rules") and their exact character allow the processing and the analysis of experimental data to be simplified and accelerated.