

Л.А. БУЛАВІН,<sup>1</sup> Ю.Ф. ЗАБАШТА,<sup>2</sup> Б.В. БАЦАК,<sup>3</sup> О.М. ТРЕМБОВЕЦЬКА<sup>3</sup><sup>1</sup> Інститут проблем безпеки АЕС НАН України,Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Лабораторія медичної фізики  
(Вул. Лисогірська, 12, корп. 106, Київ 03028)<sup>2</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Лабораторія медичної фізики  
(Просп. Академіка Глушкова, 2/1, Київ 03680)<sup>3</sup> ДУ "Національний інститут серцево-судинної хірургії імені М.М. Амосова НАМН України"  
(Вул. М.М. Амосова, 6, Київ 03110; e-mail: dr.batsak@gmail.com)**ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНОСТІ СТІНОК АРТЕРІЙ  
В ПРОЦЕСІ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

УДК 616.12-008.33-073.7

*В даній статті вивчається напружений стан біологічної тканини, а саме: стінки артерії, при поширенні пульсової хвилі. Артерія розглядається як канал в пружному середовищі. Моделью крові є ідеальна рідина. Задача зводиться до розв'язання системи рівнянь, що складається з рівнянь пружної рівноваги та ейлерових рівнянь гідродинаміки. Перші описують поведінку оточення артерії, другі – течію крові в артерії. В результаті розв'язання системи рівнянь, отримано формулу, що пов'язує зсувний модуль пружного середовища із характеристиками пульсової хвилі – швидкістю крові та деформацією стінки аорти, які можна визначити за допомогою традиційного ультразвукового дослідження. Як приклад, визначено зсувний модуль стінки сонної артерії.*

*Ключові слова:* артеріальний тиск, пульсовий тиск, ультразвукове дослідження, зсувний модуль, судинна стінка.

**1. Вступ**

За своєю тематикою дана стаття відноситься до медичної фізики – науки, що виникла на стику фізики та медицини. Як це зазначено в заголовку статті, конкретна проблема, що нас цікавить в даному випадку – це деформаційні властивості стінки артерії. Як відомо (див. наприклад, [1] та ін.), здатність до деформації є важливим фактором, який забезпечує функціонування серцево-судинної системи. В медичній літературі (див. статтю [2] та ін.) прийнято вважати деформації стінки судини пружними. Для їх характеристики вводиться модуль Юнга  $E$ . Його визначають за формулою  $c = \sqrt{\frac{Eh}{2R\rho}}$ , де  $c$  – швидкість поширення пульсової хвилі,  $h$  – товщина стінки артерії,  $R$  – внутрі-

шній радіус артерії,  $\rho$  – густина крові. Із величин, що входять в наведену формулу, експериментально визначається  $c$  та  $R$ .  $R$  можна визначити по М-ехограмі УЗД, а для визначення  $c$  використовували формулу  $c = \frac{l}{t}$ , де  $t$  – час, за який пульсова хвиля проходить відстань  $l$ . На нашу думку, цей метод є недостатньо коректним з огляду на такі недоліки. По-перше, в нашому розпорядженні немає загально вживаних, не інвазивних методів визначення товщини стінки, оскільки з практики відомо, що ця величина становить від 1 мм до 0,1 мм, тому, якщо ми будемо застосовувати, наприклад, метод УЗД, то такі виміри нам зробити не вдасться, оскільки роздільна здатність цього метода значно нижче згаданої величини. По-друге, існують певні обмеження, що пов'язані із вимірюванням швидкості звуку. Дійсно, як відомо, момент проходження пульсової хвилі фіксується УЗ-датчиком. Нам потрібно зафіксувати два таких моменти: момент

© Л.А. БУЛАВІН, Ю.Ф. ЗАБАШТА, Б.В. БАЦАК,  
О.М. ТРЕМБОВЕЦЬКА, 2017

входу та момент виходу пульсової хвилі із просторового елемента з довжиною  $l$ , тобто нам потрібно два таких датчика. Частота появи імпульсів, генерованих датчиком, дорівнює 50 Гц, отож часовий масштаб одиниць вимірювання становить 0,02 с. Якщо прийняти, що швидкість поширення дорівнює 5 м/с, то відстань між датчиками повинна бути суттєво більша за 10 см. В літературі йдеться про відстані порядку 1 м. Разом з тим на такій відстані може суттєво змінюватися як радіус судини, так і модуль пружності. Таким чином, цей метод не дозволяє отримати локальне значення модуля Юнга. На відміну від цього в даній статті пропонується метод, який дозволяє визначити локальне значення пружного модуля – зсувного модуля  $G$ . Питання, яке розглядається в даній статті – як визначити модуль  $G$  стінки судини в процесі діагностики пацієнта.

## 2. Фізична модель артерії

Розглянемо судину як циліндричний канал в пружному середовищі із зсувним модулем  $G$ . Під час течії в каналі кров створює тиск на стінку каналу, завдяки чому пружне середовище, що оточує канал, деформується. Під тиском  $P$  будемо розуміти пульсовий артеріальний тиск – максимальну різницю між систолічним та діастолічним тиском, вважаючи, що в діастолу оточення судини знаходиться в недеформованому стані. Діаметр каналу в діастолу позначимо через  $d_0 = 2b_0$ , в систолу – через  $d = 2b$ , де  $b_0$  та  $b$  – відповідні радіуси. Введемо циліндричні координати, позначивши через  $Z$  координату уздовж осі каналу. Задачу вважатимемо осесиметричною. Радіальну координату позначимо через  $r$ . Поздовжнє та радіальне зміщення будемо позначати через  $u_z$  та  $u_r$ . Для радіального зміщення стінок судини  $u_r$  ( $r = b$ ) введемо позначення  $u_b$ . В дійсності задача, яку ми намагатимемося розв'язати, розпадається на два етапи її вирішення. Перший етап – розрахунок напружень в середовищі, що оточує артерію ( $r > b_0$ ). Це є задачею теорії пружності. Другий етап – розрахунок тисків і швидкостей крові в судині ( $r < b_0$ ). Постановка другої задачі належить до гідродинаміки. Зіставлення обох згаданих розрахунків дасть змогу пов'язати модуль  $G$  з параметрами, що характеризують течію крові. З точки зору теорії пружності (див., наприклад, [3] та ін.) задача формулює-

ться таким чином: необхідно розв'язати рівняння пружної рівноваги

$$\operatorname{div} \sigma = 0, \quad (1)$$

де  $\sigma$  – тензор напруження, за граничної умови

$$\sigma_{rr} = -P, \quad (2)$$

де  $\sigma_{rr}$  – радіальне напруження. Розв'язок такої задачі відомий (див., наприклад, [3] та ін.). Зокрема, для зміщення отримано формулу

$$u_r = \frac{B}{r}, \quad (3)$$

а для радіального напруження вираз

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{B}{r^2}. \quad (4)$$

Значення сталої  $B$  отримують, підставляючи рівність (4) в умову (2)

$$B = \frac{Pb^2}{2G}. \quad (5)$$

Відповідно для зміщення стінки судини маємо

$$u_b = \frac{b}{2G} P. \quad (6)$$

Перепишемо попередній вираз у вигляді

$$P = \alpha u_b, \quad (7)$$

де прийнято позначення

$$\alpha = \frac{2G}{b}. \quad (8)$$

Як видно із формули (6), модуль зсуву  $G$  ми можемо розрахувати, якщо відомі  $P$ ,  $u_b$  та  $b$ . Значення перших двох величин пов'язані із особливостями течії крові в судині, тому розглянемо поширення пульсової хвилі в артерії.

## 3. Пульсова хвиля в артерії

Як відомо (див., наприклад, [2]), виникнення артеріального тиску  $P$  пов'язане із поширенням в судині пульсової хвилі. Тому, з огляду на необхідність визначення цієї величини, звернемось до теорії пульсової хвилі. Нами використовуватиметься варіант цієї теорії, викладений в роботі [4]. Кров

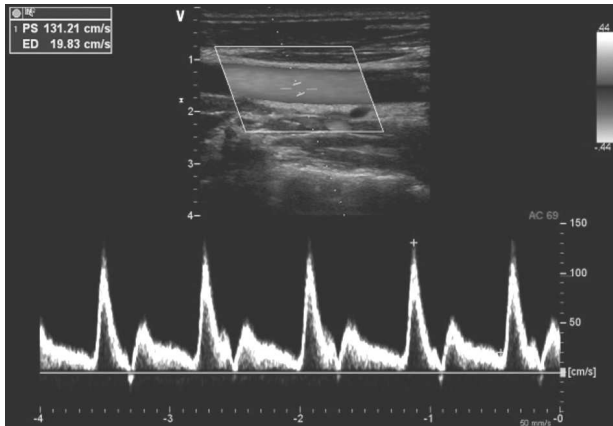


Рис. 1. Допплер-ехограма судини

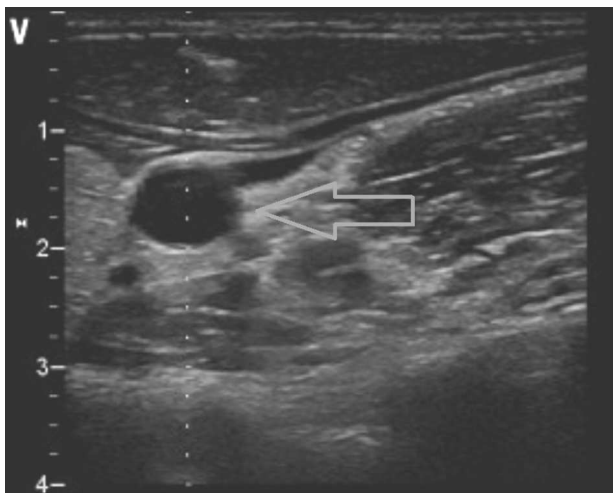


Рис. 2. В-ехограма судини

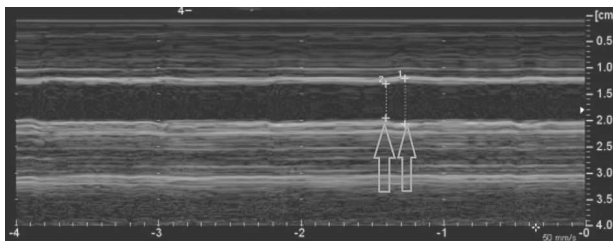


Рис. 3. М-ехограма судини

будемо розглядати як ідеальну рідину. Течію крові будемо описувати за допомогою рівнянь Ейлера:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (10)$$

380

де  $t$  – час,  $v_z$  і  $v_r$  – осьова та радіальна компоненти швидкості. Граничною умовою залишається вираз (7). Розв'язок рівняння (9) будемо шукати у вигляді

$$v_z = f\left(\frac{t-z}{c}\right). \quad (11)$$

Вважаючи кров нестисливою рідиною, запишемо

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

За визначенням

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}. \quad (13)$$

Введемо позначення  $\xi = t - \frac{z}{c}$ . Згідно з формулою (2) будемо мати

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{c}\right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \xi}. \quad (15)$$

Порівнюючи два останніх вирази, запишемо

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} \left(-\frac{1}{c}\right). \quad (16)$$

Підставляючи (13) і (16) в формулу (12), маємо

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial t}\right) = 0. \quad (17)$$

Інтегруючи рівняння (17) за  $r$  і  $t$ , отримуємо

$$u_r = \frac{v_z r}{2c} + \frac{S(t)}{r} + \frac{\psi(r)}{r}, \quad (18)$$

де  $S(t)$  і  $\psi(r)$  – довільні функції  $t$  і  $r$ . У випадку  $v_z = 0$  радіальне зміщення повинно дорівнювати нулю, так що

$$S(t) = \psi(r) = 0. \quad (19)$$

Відповідно формула (18) набуває вигляду

$$u_r = \frac{v_z r}{2c}. \quad (20)$$

Як відомо [4], швидкість поширення пульсової хвилі визначається формулою

$$c = \sqrt{\frac{\alpha b}{2\rho}}. \quad (21)$$

Підставляючи рівність (21) в формулу (20) і враховуючи вираз (8), отримуємо

$$G = \frac{\rho v_z^2 b^2}{4u_b^2}. \quad (22)$$

#### 4. Визначення зсувного модуля стінки артерії при ультразвуковому дослідженні *in vivo*

Як видно з формули (22), модуль зсуву ми можемо розрахувати, маючи в своєму розпорядженні значення швидкості течії крові  $v_z$ , радіусу судини  $b$ , густини крові  $\rho$  та зміщення стінки судини  $u_b$ . За винятком густини крові, яке можна вважати сталою величиною, що дорівнює  $1,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, усі інші величини визначаються за допомогою сучасних УЗ приладів [5]: швидкість  $v_z$  визначають за допомогою доплер-ехограми; зміщення стінки  $u_r$  та радіус судини ми визначаємо по  $M$ -ехограмі. Для прикладу покажемо, як вимірювався зсувний модуль стінки сонної артерії. На рис. 1 наведена доплер-ехограма для згаданої судини, на рис. 2 і 3 відповідно  $B$ - та  $M$ -ехограми. На  $B$ -ехограмі (рис. 2) синьою стрілкою показано досліджувану артерію в поперечному перерізі. Необхідне для розрахунку значення  $z$  відповідає розміру синьої стрілки на рис. 1. На  $M$ -ехограмі (рис. 3) двома стрілками позначено діаметр судини в діастолу та в систолу. В результаті вимірювань були отримані такі числові дані:  $d_0 = 6,7$  мм,  $d = 8,7$  мм,  $v_z = 1,35$  м/с. Для густини крові було прийнято значення  $\rho = 1,05 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>. Підставляючи вказані числові дані в формулу (22), отримуємо  $G \approx 2,5 \cdot 10^4$  Па, що і характеризує пружність дослідженої нами стінки артерії.

1. Р. Шмидт, Г. Тевс. *Физиология человека* (Мир, 1996), Т. 2.
2. K. Hirata, M. Kawakami, M.F. O'Rourke. Pulse wave analysis and pulse wave velocity: A review of blood pressure interpretation 100 years after Korotkov. *Circ J.* **70** (10), 1231 (2006).
3. Л.Д. Ландау. *Теория упругости* (Наука, 1982).
4. Л.А. Булавін, Г.В. Книшов, Ю.Ф. Забашта, Б.В. Батцак, С.В. Северилов. Возмущение потока при инвазивном измерении давления крови. *РЖБ* **17**, №3, 29 (2013).
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Наука, 1980).

Одержано 06.02.16

L.A. Bulavin, Y.F. Zabashta,  
B.V. Batsak, E.M. Trembovetska

#### EVALUATION OF ARTERIAL WALL ELASTICITY DURING ULTRASOUND DIAGNOSTICS

#### S u m m a r y

A strained biological tissue, namely, arterial walls under the propagation of a pulse wave, has been studied. The artery is considered as a channel in an elastic medium, and blood as an ideal liquid. The problem is reduced to a system of equations including both the equations for elastic equilibrium, which describe the behavior of the arterial environment, and the hydrodynamic Euler equations, which describe the blood flow in the artery. The obtained solution of the system relates the shear modulus of the elastic medium with those parameters of a pulse wave that can be determined, by using the conventional ultrasound method, namely, the velocity of a blood flow and the deformation of an aortic wall. As an example, the shear modulus of the carotid artery wall is found.