А.Д. СУПРУН, Л.В. ШМЕЛЬОВА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Вул. Володимирська, 64/13, Київ 01601; e-mail: lshmel@univ.kiev.ua)

УДК 538.9

ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНІ СОЛІТОНИ ЗІ СТУПЕНЕВОЮ АСИМПТОТИКОЮ ДЛЯ СЕРЕДОВИЩ РІЗНОЇ РОЗМІРНОСТІ

У роботі проаналізовано аналітичні розв'язки радіально-симетричних нелінійних рівнянь Шредінгера з двома нелінійними доданками у різних ступенях для 1D, 2D і 3D просторів. Вони типові для рівнянь, у яких є два нелінійних доданки, а не один, як правило, кубічний. Важливою особливістю отриманих розв'язків є те, що вони виражаються не через гіперболічні функції, а через раціональні функції, скінченні у всьому просторі і мають ступеневу асимптотику на нескінченності. Отримані розв'язки істотно розширюють коло застосувань нелінійного рівняння Шредінгера. Окремі актуальні випадки загального розв'язку розглянуті в додатках.

Ключові слова: центрально-симетричні солітони, нелінійне рівняння Шредінгера, графен.

1. Вступ

Нелінійні рівняння Шредінгера мають широкий ареал застосувань. Від полімерів [1] і полімероподібних систем [2,3] до твердих тіл [4–9] і плазми [10, 11]. Але, незважаючи на це, залишається ще низка проблем, що потребують розв'язання. Однією з таких проблем донедавна була відсутність аналітичних розв'язків радіально-симетричного нелінійного рівняння Шредінгера. Останнім часом, крім числових і асимптотичних розв'язків [12, 13] проводяться дослідження з пошуку аналітичних розв'язків [4–7]. В роботах [4–6] розглядається радіально-симетричне модифіковане нелінійне рівняння Шредінгера з диференціально-ступеневою нелінійністю у 2D-просторі [4, 5], та проводиться аналіз локалізованих станів [6] у 2D-просторі і у квазіімпульсному представленні. Знайдено випадок [7], який допускає аналітичний розв'язок для радіально-симетричного нелінійного рівняння Шредінгера. Радіально-симетричні солітонні розв'язки у двовимірних системах нині особливо актуальні у зв'язку із широким застосуванням надтонких плівок (кілька атомних шарів) [14] і графенів [8]. З іншого боку, одновимірні системи також не втрачають актуальності. Вони мають добре відомі [15] солітонні розв'язки, що виражаються через гіперболічні функції.

Було проаналізовано модифіковане радіально-симетричне нелінійне рівняння Шредінгера зі складною ступеневою нелінійністю і нульовими граничними умовами на нескінченності. На відміну від модифікованого рівняння Шредінгера, розглянутого в [4–6], тут розглядається нелінійність, що складається з двох доданків, кожний з яких містить шукану функцію в різних ступенях. Така нелінійність звичайно є результатом розкладання, наприклад, деякого потенціалу в ряд зі збереженням двох доданків (зазвичай при подібних розкладаннях зберігається тільки перший незникаючий доданок). Крім того, у рівняння було введено параметр, що дозволяє одночасно аналізувати цю радіально-симетричну задачу для всіх трьох просторових розмірностей: 1D (полімери), 2D (графен і ін.) і 3D (об'єкти кристалічного типу).

Розглянута задача актуальна у зв'язку з пошуком радіально-симетричних розв'язків солітонного типу в нелінійній оптиці, нелінійній квантовій механіці, нелінійній теорії твердого тіла (або конденсованих середовищ). Вона може бути актуальна й у дослідженнях взаємодії плазми з електромагнітним випромінюванням. Слід зауважити, що знайдені розв'язки, строго кажучи, не є солітонами, хоча і є локалізованими розв'язками стаціонарних нелінійних рівнянь. Вони не належать до класу біжучої хвилі і не узагальнені на випадок відмінної від нуля швидкості. Але для спрощення аналізу, як це іноді робиться у інших дослідженнях [4–7], ми розглядаємо стаціонарний випадок (солітон з нульовою швидкістю).

Знайдено розв'язок у вигляді радіально-симетричних солітонів, що являють собою функцію вигляду: $\varphi(r) = A/(1+\alpha r^2)^n$, де $0 < n \le 1$ – будь-яке дійсне число. Проаналізовано вплив комбінацій ступенів нелінійностей і параметра просторової розмірності на отриманий розв'язок. Показано, що узгоджене збільшення ступенів нелінійностей у рівнянні приводить до зменшення показника ступеня n незалежно від просторової розмірності задачі. А при збільшенні розмірності простору солітон звужується і збільшується його амплітуда.

2. Загальна постановка і розв'язок задачі

Солітонні задачі у нелінійних фізичних системах зазвичай зводяться до нелінійного рівняння Шредінгера зі ступеневою нелінійністю. Як правило, вони виникають із рівнянь загального вигляду:

$$\Delta\psi + \psi\, G(\psi) + \varepsilon\, \psi = 0.$$

При цьому хвильова функція будується у вигляді модульованої по амплітуді плоскої хвилі: $\psi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Це приводить до перевизначення власного значення ε за рахунок дисперсійного енергетичного доданка, а саме рівняння набуває тоді вигляду

$$\Delta\varphi + \varphi\, g(\varphi) + \lambda\, \varphi = 0. \tag{1}$$

Далі функцію $g(\varphi)$ розкладають у ряд за ступенями φ. Це може приводити до ще одного перевизначення, тепер уже, параметра λ. А для визначення модулюючого множника $\varphi(\mathbf{r})$, виникають рівняння, які в радіально-симетричному представленні, можна привести до вигляду узагальненого нелінійного рівняння Шредінгера:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^a - g_2\varphi^b + L\,\varphi = 0. \tag{2}$$

Узагальненість рівняння (2), по відношенню до тих, що розглядаються зазвичай, зводиться до двох обставин. Перша обставина – це наявність множника $\beta = 0, 1, 2$, відповідно, для 1D-просторів ($\beta = 0$), 2D-просторів ($\beta = 1$) і 3D-просторів ($\beta = 2$). Така можливість одночасного врахування у розв'язку всіх трьох просторових розмірностей є специфічною особливістю радіально-симетричного розгляду. Друга обставина – це наявність двох нелінійних ступеневих доданків: $g_1\varphi^a$ і $g_2\varphi^b$ (а не одного, зазвичай кубічного). Коефіцієнти g_1, g_2 разом з коефіцієнтом L залежать від параметрів задачі, що конкретно розглядається. При цьому ступені a, b у цих доданках не задані і у процесі побудови розв'язку можуть узгоджуватись з ним. Наявність двох нелінійних доданків у рівнянні (2) дозволяє знайти аналітичні розв'язки для ряду комбінацій ступенів a, b, які відносяться до реальних фізичних ситуацій і будуть розглянуті далі. Сполучення знаків при коефіцієнтах g_1, g_2 забезпечує максимальну фізичну коректність як рівняння (2), так і більшості розглянутих далі конкретних ситуацій. Є, однак, окремі випадки, що вимагають або іншої комбінації знаків, або навіть відсутності одного з нелінійних доданків. Вони будуть аналізуватися також.

Розв'язок рівняння (2) будується у вигляді підстановки:

$$\varphi(r) = \frac{A}{(1+\alpha r^2)^n}. \tag{3}$$

Параметри A, α і n визначаються з умови тотожного перетворення на нуль лівої частини рівняння (2) після підстановки в нього розв'язку (3). Така підстановка, після деяких перетворень, приводить до співвідношення:

$$-\frac{4\alpha n(n+1)}{(1+\alpha r^2)^2} + \frac{2\alpha n(2n+1-\beta)}{(1+\alpha r^2)} + \\ + \frac{g_1 A^{a-1}}{(1+\alpha r^2)^{(a-1)n}} - \frac{g_2 A^{b-1}}{(1+\alpha r^2)^{(b-1)n}} + L = 0.$$

Як видно, для перетворення лівої частини цього рівняння в нуль необхідно вимагати рівності нулю суми першого і третього доданка, а також другого й четвертого доданків. Параметр L необхідно теж покласти рівним нулю. Як показано в [9–16], для квантових і твердотільних задач умова $L = 0$ приводить до визначення власного значення задачі, яка розглядається, що відповідає рівнянню (2). Це пов'язано з тим, що в найпростішому випадку L має структуру різниці між цим власним значенням і дисперсійним енергетичним доданком, який визначає динамічні властивості квазічастинки. В інших задачах цей доданок у рівнянні (2) може взагалі бути відсутнім. Маючи далі на увазі тільки такі задачі, вважаємо $L = 0$ і вимагаємо рівності нулю суми першого та третього, а також другого та четвертого доданків.

В результаті вимоги рівності знаменників отримуємо 2 умови, які зв'язують ступені нелінійних доданків a, b і ступінь розв'язку n:

$$a = \frac{2}{n} + 1; \quad b = \frac{1}{n} + 1. \tag{4}$$

Для чисельників тоді залишається дві умови:

$$\begin{aligned} &-4\alpha n(n+1) + g_1 A^{a-1} = 0; \\ &2\alpha n(2n + 1 - \beta) - g_2 A^{b-1} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

За допомогою цих чотирьох умов необхідно визначити три характеристики розв'язку (3): амплітуду A, показник росту α й ступінь n. У цьому сенсі система (4), (5) є перевизначеною. Однак, як згадувалося вище, один з факторів, узагальненості рівняння (2), пов'язаний з тим, що ступені a, b не задані і система (4), (5) стає вже недовизначеною: п'ять невідомих при чотирьох рівняннях. У більшості фізичних задач ступені a, b цілі. Це пов'язане з тим, що нелінійні доданки в (2) звичайно є наслідком розкладання в ряд деякої потенціальної енергії, що залежить від шуканої функції $\varphi(r)$. Із співвідношень (4) видно, що забезпечити цілі ступені a, b можна, поклавши $n = 1/j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді: $a = 2j + 1$, $b = j + 1$. При цьому рівняння (2) для кожного j набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^{2j+1} - g_2\varphi^{j+1} = 0, \tag{6}$$

а розв'язок (3) для цього значення j стає таким:

$$\varphi(r) = \frac{A}{(1 + \alpha r^2)^{1/j}}. \tag{7}$$

Коефіцієнти A і α визначаються рівняннями (5). Підставляючи в них $n = 1/j$ і розв'язуючи їх відносно A, α, одержуємо:

$$A = \left(\frac{2(1+j)\,g_2}{(2 + (1-\beta)\,j)\,g_1}\right)^{1/j}; \quad \alpha = \frac{j^2(1+j)\,g_2^2}{(2 + (1-\beta)\,j)^2\,g_1}. \tag{8}$$

Рівняння (6) і його розв'язок у вигляді (7), (8) для різних значень $j = 1, 2, 3, \ldots$, відповідають різним фізичним ситуаціям. Деякі з них, найпоширеніші, будуть розглянуті в наступних розділах.

3. Узагальнена кубічна нелінійність ($j = 1$)

Поклавши в (6)–(8) $j = 1$, одержимо рівняння:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^3 - g_2\varphi^2 = 0, \tag{9}$$

його розв'язок:

$$\varphi(r) = \frac{A}{1 + \alpha r^2}, \tag{10}$$

і коефіцієнти:

$$A = \frac{4g_2}{(3-\beta)\,g_1}; \quad \alpha = \frac{2g_2^2}{(3-\beta)^2\,g_1}. \tag{11}$$

Рівняння (9) нетипове для твердотільних задач, пов'язаних з відгуком ґратки кристала на збудження. Це пов'язане з тим, що в них функція $g(\varphi)$ рівняння (1) зазвичай залежить не від φ, а від φ^2. І, при розкладанні цієї функції в ряд, структура $\varphi g(\varphi)$ не може в принципі містити доданок φ^2. В інших квантових задачах, задачах електростатики або взаємодії плазми з електромагнітним випромінюванням рівняння типу (9) можуть реалізовуватися.

На рис. 1 наведені порівняльні графіки розв'язку (10), (11) для всіх трьох просторових розмірностей: $\beta = 0,\ 1,\ 2$.

Із графіків на рисунку видно, що зі збільшенням розмірності простору солітон звужується і збільшується його амплітуда.

З розв'язку (10) для розглянутого випадку випливає важлива властивість. На нескінченності солітон має асимптотику: $\varphi(r) \sim 1/r^2$. Вона більш типова для фізичних полів, ніж експоненційна.

Зокрема, вона характерна для силових характеристик типу напруженості поля. І, в той самий час, солітон скінченний у всьому просторі, зокрема в точці $r = 0$.

4. Узагальнена нелінійність п'ятого ступеня ($j = 2$)

Поклавши тепер в (6)–(8) $j = 2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + g_1 \varphi^5 - g_2 \varphi^3 = 0, \tag{12}$$

його розв'язок:

$$\varphi(r) = \frac{A}{(1 + \alpha r^2)^{1/2}}, \tag{13}$$

і коефіцієнти:

$$A = \left(\frac{3g_2}{(2-\beta)\, g_1}\right)^{1/2}; \quad \alpha = \frac{3g_2^2}{(2-\beta)^2\, g_1}. \tag{14}$$

У твердотільних задачах це рівняння може мати фізичний зміст при певній симетрії функції $g(\varphi)$ рівняння (1). У цих задачах, як уже згадувалося, функції $g(\varphi)$ залежить не від φ, а від φ^2. Тобто, $g(\varphi) \equiv q(\varphi^2)$. При цьому, якщо розкладання функції $q(x)$ починається із квадратичного доданка, як, наприклад, якби $q(x) = 1 - \cos(x)$, то розкладання функції $q(\varphi^2)$ починалося б із доданку φ^4 (у наведеному прикладі: $q(\varphi^2) = 1 - \cos(\varphi^2)$). Розв'язок (13) на нескінченності має асимптотику: $\varphi(r) \sim 1/r$, що теж є типовим для фізичних полів. Зокрема, вона характерна для енергетичних характеристик типу потенціалу поля.

4.1. Випадки нормального розв'язку

Як видно з визначення коефіцієнтів A і α, тут для 1D-просторів ($\beta = 0$) і 2D-просторів ($\beta = 1$) тенденція така сама, як на рис. 1. Зокрема, на рис. 2 наведене 3D зображення розподілу огинаючої солітона (квадрата функції (13)) у 2D-просторі ($\beta = 1$).

Для розглянутого в розділі 3 випадку узагальненої кубічної нелінійності ($j = 1$) вигляд 2D-солітона ($\beta = 1$) якісно буде таким самим. Якісно він буде таким самим і для випадків, які будуть розглядатися далі.

4.2. Випадок окремого розв'язку

Випадок 3D-солітона ($\beta = 2$) тут вимагає окремого розгляду. Як випливає з визначень (14), цей випадок є виродженим, оскільки при $\beta = 2$ коефіцієнти A і α формально стають нескінченними. Для того щоб вони були скінченні необхідно, розглядаючи випадок $\beta = 2$ при $j = 2$, відразу покласти $g_2 = 0$. Цей випадок (узагальненої нелінійності п'ятого ступеня для 3D-просторів ($\beta = 2$)) докладно розглядався в [17]. Там було показано, що в розв'язку залишається один "вільний" параметр. У співвідношеннях (14) цього можна формально домогтися, якщо вважати, що при одночасному прямуванні параметра g_2 й різниці $2 - \beta$ до нуля (зверху) їхнє відношення $g_2/(2-\beta)$ прямує до деякого числа χ. Тоді співвідношення (14) формально набувають вигляду $A = \sqrt{3\chi/g_1}$, $\alpha = 3\chi^2/g_1$. Виключаючи параметр χ, можна ці два співвідношення привести до вигляду, у якому незаданим параметром буде показник росту α: $A = \sqrt[4]{3\alpha/g_1}$.

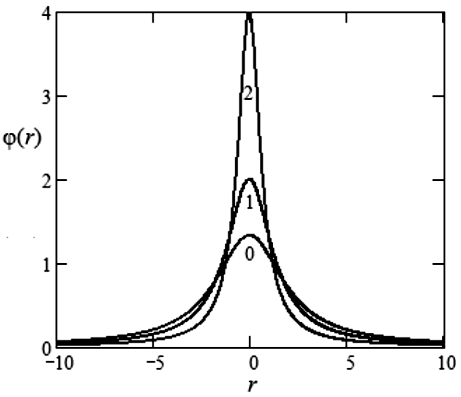

Рис. 1. Порівняльні графіки розв'язку (10) для $j = 1$ й трьох значень параметра просторової розмірності $\beta = 0, 1, 2$. Цифри на графіку відповідають значенням β. На графіках наведений частинний випадок $g_1 = g_2 = 1$

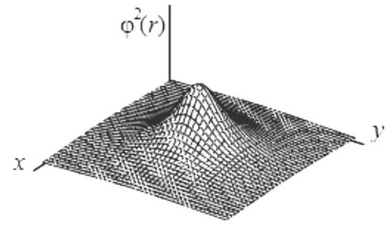

Рис. 2. Просторова форма 2D-солітона ($\beta = 1$) для частинного випадку $g_1 = g_2 = 1$. Амплітуда A і показник росту α при цьому мають чисельні значення $A = \sqrt{3}$, $\alpha = 3$

5. Узагальнена нелінійність сьомого ступеня ($j = 3$)

Тут рівняння (6) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^7 - g_2\varphi^4 = 0, \tag{15}$$

його розв'язок (7) визначається співвідношенням:

$$\varphi\,(r) = \frac{A}{(1+\alpha r^2)^{1/3}},$$

а коефіцієнти A, α, означені у (8), зводяться до рівностей:

$$A = \left(\frac{8g_2}{(5-3\beta)\,g_1}\right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{36g_2^2}{(5-3\beta)^2\,g_1}.$$

Цей випадок може реалізуватися, коли функція $g\,(\varphi)$ рівняння (1) має парну симетрію і її розкладання починається з кубічного доданка. Як, наприклад, якби $g\,(\varphi) = \cos(\varphi^{3/2}) - 1$. Зокрема, наявність аргументу $\varphi^{3/2}$ говорить про те, що цей випадок не реалізується у твердотільних задачах. Асимптотика розв'язку на нескінченності викликає інтерес незвичайним ступенем спадання: $\varphi\,(r) \sim 1/r^{2/3}$.

5.1. Випадки нормального розв'язку

З визначень коефіцієнтів A і α випливає, що, як і в розділі 4, для 1D-просторів ($\beta = 0$) і 2D-просторів ($\beta = 1$) зі збільшенням розмірності простору спостерігається та сама тенденція, що й на рис. 1.

5.2. Випадок окремого розв'язку

Але є й одна особливість. Для 3D-простору ($\beta = 2$) солітон має від'ємну амплітуду. Таку ситуацію можна розглядати, як окремий випадок. Але від'ємність амплітуди не є окремим розв'язком, якщо фізичний зміст має квадрат амплітуди. Крім того, амплітуда 3D-солітона для цього випадку ($j = 3$, $\beta = 2$) стає додатною, якщо $g_2 < 0$, тобто, якщо $g_2 = -|g_2|$. При цьому рівняння (15) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^7 + |g_2|\varphi^4 = 0.$$

Воно може реалізуватися тоді, коли функція $g\,(\varphi)$ не обмежена у всьому просторі свого аргументу, як, наприклад, якби $g\,(\varphi) = \mathrm{ch}(\varphi^{3/2}) - 1$.

6. Узагальнена нелінійність дев'ятого ступеня ($j = 4$)

Тепер рівняння (6) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + g_1\varphi^9 - g_2\varphi^5 = 0.$$

Розв'язок (7) визначається рівністю:

$$\varphi\,(r) = \frac{A}{(1+\alpha r^2)^{1/4}}.$$

А коефіцієнти A, α, означені у (8), мають тепер такий конкретний вигляд:

$$A = \left(\frac{5g_2}{(3-2\beta)\,g_1}\right)^{1/4}; \quad \alpha = \frac{20g_2^2}{(3-2\beta)^2\,g_1}.$$

Цей випадок може реалізуватися при такій самій симетрії функції $g\,(\varphi)$ рівняння (1), як і в підрозділі 4.2. З тією лише різницею, що тут це могла б, наприклад, бути така функція: $g\,(\varphi) = \cos\left(\varphi^2\right) - 1$. У цьому сенсі розглянутий випадок може бути цікавий для твердотільних задач. Асимптотика розв'язку на нескінченності тут, так само, як і в попередньому розділі, нетипова для фізичних полів, але теж викликає інтерес незвичайним ступенем спадання: $\varphi\,(r) \sim 1/r^{1/4}$. У той самий час асимптотика: $\varphi^2\,(r) \sim 1/r^{1/2}$ може бути вже цікава в деяких випадках і для фізичних полів.

6.1. Випадки нормального розв'язку

З визначення коефіцієнта A відразу можна зробити висновок про те, що солітони у випадку просторів розмірності 1D ($\beta = 0$) і 2D ($\beta = 1$) мають такі самі властивості, як і у всіх попередніх розділах (рис. 1).

6.2. Випадок окремого розв'язку

Для 3D-простору ($\beta = 2$) амплітуда стає комплексною:

$$A = \left(-\frac{5g_2}{g_1}\right)^{1/4} \equiv \sqrt{i}\left(\frac{5g_2}{g_1}\right)^{1/4},$$

де i – уявна одиниця. Оскільки амплітуда $\varphi\,(r)$ тут повинна бути дійсною, то забезпечити це можна тільки заміною знака перед параметром g_2, поклавши, наприклад: $g_2 = -|g_2|$ (так само, як і в розділі 5).

Інші узагальнені нелінійності, для яких $j \geq 5$, мало цікаві з фізичної точки зору й тут розглядатися не будуть.

7. Висновки

У статті проаналізоване узагальнене нелінійне рівняння Шредінгера з метою пошуку радіально-симетричних солітонних розв'язків. Рівняння містить параметр, що дозволяє проводити аналіз одночасно для всіх трьох просторових розмірностей 1D, 2D і 3D. Крім того, воно містить два нелінійні доданки в різних ступенях. Розглянуто чотири комбінації ступенів, названі узагальненими нелінійностями третього, п'ятого, сьомого і дев'ятого ступеня, які можуть відноситися до фізично актуальних задач. Для розглянутого тут рівняння знайдені радіально-симетричні розв'язки, які на нескінченності мають степеневу асимптотику $\sim 1/r^v$, а не експоненційно-спадаючу. Із збільшенням ступенів нелінійностей розглянутого рівняння, ступінь v зменшується. У всіх розглянутих випадках для 1D-просторів (полімери) і 2D-просторів (графени й ін.) знайдені розв'язки є нормальними з фізичної точки зору (мають дійсну та додатно означену амплітуду). Для 3D-просторів, із чотирьох розглянутих варіантів нелінійності, три варіанти вимагають окремого розгляду. Всі вони пов'язані з необхідністю або зміни знака коефіцієнта при доданку з меншим ступенем або навіть обертанням цього коефіцієнта на нуль. Показано, що у всіх розглянутих випадках зі збільшенням розмірності простору солітон стає вужчим, а його амплітуда зростає.

1. S. Dutta, E.J. Mueller. Collective modes of a soliton train in a Fermi superfluid. *Phys. Rev. Let.* **118**, 260402 (2017).
2. N. Taghizadeh, Q. Zhou, M. Ekici, M. Mirzazadeh. Soliton solutions for Davydov solitons in α-helix proteins. *Superlattices and Microstructures* **102**, 323 (2017).
3. L. Brizhik. Influence of electromagnetic field on soliton-mediated charge transport in biological systems. *Electromagnetic biology and medicine* **34**, 123 (2015)
4. L.S. Brizhik, A.A. Eremko, B. Piette W.J. Zakrzewski. Static solutions of a *D*-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity* **16**, 1481 (2003).
5. L.S. Brizhik, A.A. Eremko, B. Piette, W.J. Zakrzewski. Spontaneous localization of electrons in lattices with nonlocal interactions. *Phys. Rev. B* **68**, 104301 (2003).
6. L.S. Brizhik, A.A. Eremko, B. Piette, W.J. Zakrzewski. Spontaneous localization of electrons in two-dimensional lattices within the adiabatic approximation. *J. Math. Phys.* **44**, 3689 (2003).
7. E.A. Kuznetsov, V.E. Zakharov. Nonlinear coherent phenomena in continuous media. In: *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century.* Edited by P.L. Christiansen, M.P. Sorensen, A.C. Scott (Springer, 2000), Chap. 1 [ISBN: 3-540-66918-3].
8. Yu. Rapoport, V. Grimalsky, A. V. Lavrinenko, A. Boardman. Double resonant excitation of the second harmonic of terahertz raditation in dielectric-graphene layered metamaterials. *J. Optics* **19**, 095104 (2017).
9. A.D. Suprun, L.V. Shmeleva. The centrally-symmetric solutions of electronic excitations of semiconductors in the conditions of relativistic like degeneracy of dynamical properties. *Funct. Mater.* **21**, 69 (2014).
10. T.A. Davydova, A.I. Fishchuk. Upper hybrid nonlinear wave structures. *Ukr. Fiz. Zh.* **40**, 487 (1995).
11. S. Hussain, S. Mahmood. Magnetosonic hump and dip solitons in a quantum plasma with Bohm potential effect. *Phys. Plasmas* **24**, 032122 (2017).
12. R.Y. Chiao, E. Garmire, C.H. Townes. Self-trapping of optical beams. *Phys. Rev. Let.* **13**, 479 (1964).
13. A.C. Scott. Dynamics of Davydov solitons. *Phys. Rev. A* **26**, 578 (1982).
14. C.B. Muratov, V.V. Slastikov. Domain structure of ultrathin ferromagnetic elements in the presence of Dzyaloshinskii–Moriya interaction. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **473**, 20160666 (2017).
15. L.S. Brizhik. Electron correlations in molecular chains. In: *Correlations in Condensed Matter under Extreme Conditions.* Edited by G.G.N. Angilella, A. La Magna (Springer, 2017), Chap. 15, p. 215–232.
16. A.D. Suprun. Self-accelerating Painleve-II soliton: A curious mathematical trick or fundamental physics? *Funct. Mater.* **9**, 389 (2002).
17. A.D. Suprun. Two types of soliton solution of Schroedinger equation with the total nonlinearity of 5th degree. *Funct. Mater.* **8**, 436 (2001).

Одержано 16.01.18

A.D. Suprun, L.V. Shmeleva

CENTROSYMMETRIC SOLITONS
WITH POWER ASYMPTOTICS FOR MEDIA
OF DIFFERENT DIMENSIONS

S u m m a r y

Analytic solutions of radially symmetric nonlinear Schrödinger equations with two nonlinear terms with different powers are analyzed for 1D, 2D, and 3D spaces. They are typical of the equations, where there are two nonlinear terms instead of one cubic term, as a rule. An important feature of the solutions obtained is that they are expressed not in terms of hyperbolic functions, but in terms of rational functions finite in the entire space with a power asymptotics at infinity. The solutions obtained significantly expand the range of applications of the nonlinear Schrödinger equations. Separate relevant cases of the general solution are considered in the applications.