

А.В. ТИХИЙ

Інститут ядерних досліджень НАН України
(Просп. Науки, 47, Київ 03680; e-mail: tykhyu@kinr.kiev.ua)

СТОХАСТИЧНА ДИФУЗІЯ ЕНЕРГІЙНИХ ЙОНІВ У СТЕЛАРАТОРАХ ТИПУ WENDELSTEIN

УДК 539

Розглянуто беззіткненневу стохастичну дифузію енергійних йонів в оптимізованих стелараторах типу Wendelstein, існування якої в цих пристроях було передбачено раніше за допомогою спрощеної теорії переходу йонів через сепаратрису. Обчислено стрибки адіабатичного інваріанта у стелараторних магнітних конфігураціях. Аналіз отриманих виразів підтверджує важливість стохастичної дифузії та демонструє, що коефіцієнт дифузії може значно перевищувати відомі оцінки.

Ключові слова: стохастична дифузія, стеларатори, орбіти частинок, адіабатичні інваріанти.

1. Вступ

В оптимізованих стелараторах типу Wendelstein миттєвим втратам енергійних йонів з супербананових орбіт запобігають, модифікуючи магнітну конфігурацію високим β (відношення тиску плазми до тиску магнітного поля) у такий спосіб, щоб контури поздовжнього адіабатичного інваріанта локально захоплених частинок, $J = \oint v_{\parallel} dl$, замикалися всередині плазми [1, 2]. Тим не менше, магнітний дрейф призводить до перетворення деяких із цих частинок на локально пролітні і навпаки, тобто до утворення класу перехідних частинок. Перетворення орбіт відбувається тоді, коли частинки перетинають сепаратрису між локально захопленим та локально пролітними станами. Перетин сепаратриси супроводжується хаотичним стрибком J , що приводить до беззіткненневої стохастичної дифузії. Коефіцієнт стохастичної дифузії термоядерних α -частинок у реакторі “Helias” – стелараторі типу Wendelstein – було обчислено в роботі [3]. За висновком [3], беззіткненнева стохастична дифузія є важливим механізмом втрат енергійних йонів в оптимізованих стелараторах типу Wendelstein. Зокрема, у розглянутому реакторі вона приводить

до втрати значної частки α -частинок на стінку до того, як вони передадуть свою енергію основній плазмі через кулонівські зіткнення. Цей висновок узгоджувався з результатами чисельного моделювання орбіт частинок. Проте в теоретичній частині роботи [3] було вжито вираз для неадіабатичного стрибка J для частинки у гармонічному електростатичному потенціалі, що повільно змінюється з часом [4–6]. Застосовність цього виразу до поведінки перехідних частинок у стелараторних магнітних конфігураціях не доводилася і не обговорювалася, що і мотивувало розглянути теорію стохастичної дифузії в оптимізованих стелараторах у даній роботі. На відміну від [3] ми виводимо вираз для стрибків J у стелараторному магнітному полі за методом роботи [6], враховуючи асиметрію між локально пролітними частинками з протилежними знаками v_{\parallel} , викликану наявністю магнітного поля.

Решта роботи складається з таких частин: у частині 2 ми вводим скорочений лагранжіан руху ведучого центру в фазовому просторі. У частині 3 ми застосовуємо його до магнітної конфігурації стелараторів типу Wendelstein. У частині 4 ми розглядаємо переходи між локально захопленими та локально пролітними станами та виводимо вираз для імовірності такого переходу. У частині 5 ми ви-

користуємо виведені у Додатку вирази для неадиабатичної зміни J при переході через сепаратрису, отримуємо вираз для коефіцієнта стохастичної дифузії і порівнюємо його із виразом, виведеним в [3]. У частині 6 наведено підсумки та коротке обговорення отриманих результатів.

2. Лагранжіан ведучого центру

В першому порядку по гірорадіусу, рух ведучого центру частинки у магнітному полі можна описувати лагранжіаном у фазовому просторі [8]:

$$L_{gc} = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mu \dot{\Theta} - \mathcal{E}, \quad (1)$$

де \mathbf{X} – координати ведучого центру, μ та \mathcal{E} – магнітний момент та енергія частинки, Θ – гірофаза, \mathbf{A} – векторний потенціал, а \mathbf{B} – вектор індукції магнітного поля, $B = |\mathbf{B}|$ – сила магнітного поля, m та e – маса та заряд частинки, а v_{\parallel} – поздовжня швидкість ведучого центру, яка визначається рівнянням $\mathcal{E} = \mu B + mv_{\parallel}^2/2$.

Вираз (1) має просту форму, але вживає неканонічні координати і незручний для застосування звичайних методів гамільтонової механіки. Тому в цій та наступній частині ми слідуватимемо Литлджону [9] і застосовуватимемо формалізм, у якому зручно працювати з неканонічними координатами, а саме формалізм $(2n + 1)$ -вимірною розширеного фазового простору (див., наприклад, [10], ч. 9). У цьому формалізмі механічна система описується диференційною 1-формою γ , яка діє на розширеному фазовому просторі. Ця форма називається фундаментальною 1-формою або інтегральним інваріантом Пуанкаре–Картана. Траєкторії частинок можна знайти, варіюючи $\int \gamma$, або, що те саме, обчисливши лінії вихору γ , тобто інтегральні криві нульового векторного поля Z зовнішньої похідної $d\gamma$, яке задовольняє $d\gamma(Z) = 0$. У канонічних координатах $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, γ набуває стандартного вигляду $\gamma = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt$, де H – гамільтоніан системи, а нульове векторне поле Z зводиться до рівнянь Гамільтона. Однією з переваг цього підходу є те, що координати у фазовому просторі можуть бути неканонічними, а час не є, взагалі кажучи, виділеною змінною.

У нашому випадку, розширений фазовий простір – це $(\mathbf{X}, \mu, \Theta, \mathcal{E}, t)$, а фундаментальна 1-форма

$$\gamma_{gc} = L_{gc} dt = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X} + \mu d\Theta - \mathcal{E} dt. \quad (2)$$

γ_{gc} не залежить від Θ та t , тому магнітний момент та енергія частинки є інтегралами руху, а Θ є циклічною змінною. Оскільки нас не цікавить гірофаза частинки, ми можемо відділити спряжену пару μ, Θ і розглянути замість γ_{gc} 1-форму

$$\gamma'_{gc} = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X} - \mathcal{E} dt, \quad (3)$$

що діє на скороченому фазовому просторі $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, t)$, вважаючи тепер μ константою. (Більш формально, легко показати ([10], ч. 9, § 45Б) що проєкції ліній вихору γ_{gc} при заданому сталому μ на гіперповерхню $\Theta = \text{const}$ є лініями вихору γ'_{gc} .)

Щоб мати змогу обчислити стрибки адиабатичних інваріантів при переходах через сепаратрису та відповідні зміщення в радіальному напрямку, нам достатньо знати форму траєкторій частинок у просторі. Тому ми скорочуємо фазовий простір ще раз, розглядаючи час t як циклічну змінну і відділяючи “спряжену пару” \mathcal{E}, t у той самий спосіб, як і μ, Θ . Траєкторії частинок можна отримати у параметричному вигляді із 1-форми

$$\gamma''_{gc} = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X}, \quad (4)$$

яка діє на тривимірному скороченому фазовому просторі, що складається з самого лише \mathbf{X} , при цьому і \mathcal{E} , і μ ми тепер розглядаємо як константи.

3. Магнітна конфігурація

Ми користуватимемося Бузеровими координатами $(\psi, \vartheta, \varphi)$, де ψ – тороїдальний магнітний потік, ϑ та φ – відповідно полоїдальна та тороїдальна кутові змінні. У цих координатах рівняння магнітних силових ліній – $\vartheta - \iota(\psi)\varphi = \text{const}$, де $\iota = d\psi_p/d\psi$ – обертальне перетворення, ψ_p – полоїдальний магнітний потік. А також у цих координатах $\mathbf{A} = \psi \nabla \vartheta - \psi_p \nabla \varphi$, а $B_{\varphi} \approx BR \gg B_{\psi}, B_{\vartheta}$. Ми розглядатимемо типову для стелараторів лінії Wendelstein магнітну конфігурацію, у якій дзеркальна та гвинтова гармоніки домінують у B , а число заходів стеларатора N велике ($\iota/N \ll 1$). Ми приймаємо для B вираз

$$\frac{B}{B} = 1 + \epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta + \epsilon_m \cos N\varphi - \epsilon_h \cos(N\varphi - \vartheta), \quad (5)$$

де ϵ_h , ϵ_m та ϵ_t – відповідно амплітуди гвинтової, дзеркальної та тороїдальної гармонік, а ϵ_0 описує

модифікацію вакуумної магнітної конфігурації за рахунок впливу скінченного тиску плазми. Ці амплітуди, як і ϵ_0 , є $o(1)$ функціями ψ . Тоді рівняння (4) зводиться до

$$\gamma_{gc}'' = \frac{e}{c}(\psi d\vartheta - \psi_p d\varphi) - mv_{\parallel} R d\varphi = \frac{e}{c}\psi d\vartheta - p_{\varphi} d\varphi, \quad (6)$$

де $p_{\varphi} = (e/c)\psi_p + mv_{\parallel}R$. Формально, 1-форма (6) описує одновимірну гамільтонову систему із залежним від часу гамільтоніаном, де ϑ , φ та ψ , відповідно, відіграють роль часу, координати та енергії, а p_{φ} є канонічним моментом, спряженим до φ . Оскільки $N \gg 1$, ми розглядатимемо залежність φ від ϑ як збурення. З фізичної точки зору, ми розглядаємо рух частинок у локальних магнітних ямах, пов'язаних із дзеркальною та гвинтовою гармоніками B . Період цих гармонік має порядок $2\pi/N$, тоді як період тороїдальної гармоніки – $2\pi/\iota$. Для зручності, ми комбінуємо дзеркальну та гвинтову гармоніки B :

$$\frac{B}{\bar{B}} = 1 + \epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta + \epsilon_{hm} \cos N(\varphi - \chi), \quad (7)$$

де ϵ_{hm} та χ – функції ψ та ϑ . Тоді для p_{φ} отримуємо

$$p_{\varphi} = -\frac{e}{c}\psi_p \mp m\omega_B \bar{\rho}_l R \sqrt{\epsilon_{hm} (\kappa^2 - \cos^2 N(\varphi - \chi)/2)}, \quad (8)$$

де $\omega_B = e\bar{B}/(mc)$, $\bar{\rho}_l$ – ларморівський радіус частинки на магнітній осі, R – великий радіус плазми, а

$$\kappa^2 = \frac{\alpha - (\epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta - \epsilon_{hm})}{2\epsilon_{hm}}, \quad (9)$$

де $\alpha = \mathcal{E}/\mu\bar{B} - 1$ – пітч-кутовий параметр. Після цих спрощень система, що описується (6), виявляється подібною до нелінійного маятника. Траєкторії локально захоплених частинок відповідають лібрації, а траєкторії локально пролітних частинок – обертання маятника.

Фазовий портрет цієї системи (рис. 1) – це фазовий портрет нелінійного маятника, зсунутий на $\frac{e}{c}\psi_p/N$. Змінна дії у цій системі – це стандартний адіабатичний інваріант J_{\parallel} . Для локально захоплених частинок, $\kappa^2 < 1$ і маємо одну гілку:

$$I_t = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\varphi} d\varphi = I_s f(\kappa), \quad (10)$$

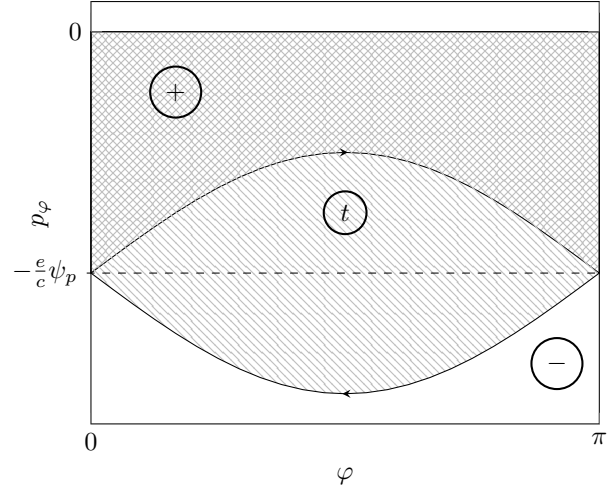


Рис. 1. Фазовий портрет “зсунутого” нелінійного маятника (6). (+) та (–)-локально пролітні стани займають області фазового простору, відповідно, над верхньою та під нижньою гілкою сепаратриси. Области фазового простору, що входять до S_+ і S_- , позначено похилою штриховкою. S_+ та S_- мають протилежний знак, бо контури, що обмежують ці області, обходяться у протилежних напрямках

де

$$I_s = \frac{4}{\pi N} m\omega_B \bar{\rho}_l R \sqrt{\epsilon_{hm}},$$

$f(\kappa) = E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)$, K та E – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно. Для локально пролітних частинок інтегрування виконується по всьому періоду $2\pi/N$ і адіабатичний інваріант має дві гілки:

$$I_{\pm} = \mp \frac{e}{c} \frac{\psi_p}{N} + \frac{1}{2} I_s f(\kappa), \quad (11)$$

де $f(\kappa)$ – та сама функція, що і у (10), але з $\kappa^2 > 1$; стандартним перетворенням її можна звести до виду $f(\kappa) = \kappa E(\kappa^{-1})$, (10) та (11) збігаються із результатами [3]. Баунс-усереднені траєкторії частинок відповідають контурам сталого I_i у площині (ψ, ϑ) (рис. 2). Індекс i має значення + чи – для двох знаків v_{\parallel} локально пролітних частинок та t для локально захоплених частинок.

Контур $\kappa^2 = 1$ у цій площині є сепаратрисою між локально пролітними та локально захопленими частинками з даним пітч-кутом. Стохастична дифузія виникає внаслідок накопичення стрибків, що I_i зазнає при переході баунс-усередненої траєкторії частинки через сепаратрису, де адіабатичність I_i порушується.

4. Переходи

У магнітних конфігураціях Wendelstein-7X, у всьому діапазоні пітч-кутового параметра α , де існують перехідні орбіти, є дві точки переходу, розташовані симетрично відносно площини $\vartheta = 0$. (Це стає невірним, коли $\epsilon'_m > \epsilon'_h$ і одночасно $\epsilon'_0 < \epsilon_t$, але ця умова не виконується ні в одній із конфігурацій, наведених у [11].) Види та імовірності переходів, що відбуваються у системі, визначаються відносними змінами фазового об'єму, зайнятого кожним із станів.

Фазовий об'єм, зайнятий локально захопленими частинками – це площа всередині сепаратрис:

$$\frac{S_t(\vartheta)}{2\pi} = I_t|_{\kappa^2=1} = I_s.$$

Тут і далі, якщо не вказано інше, всі величини і похідні обчислюються при $\kappa^2 = 1$. Фазові об'єми, заняті локально пролітними станами, є необмеженими, бо $|v_{\parallel}|$ може набувати довільно великих значень. Проте нас цікавить не абсолютна величина, а зміна цих фазових об'ємів, викликана зміщенням положення сепаратрис з “часом” ϑ . Наслідуючи [6], ми позначаємо S_{\pm} площі між відповідною гілкою сепаратрис та віссю φ , так, що $S_t = S_+ + S_-$:

$$\frac{S_{\pm}(\vartheta)}{2\pi} = I_{\pm}|_{\kappa^2=1} = \mp \frac{e \psi_p}{c N} + \frac{1}{2} I_s.$$

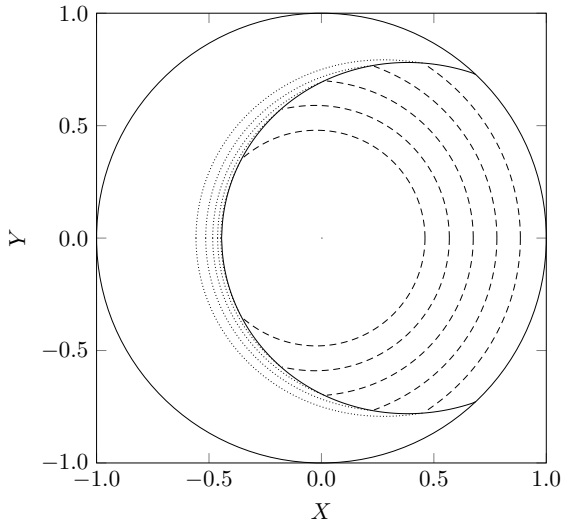


Рис. 2. Контури сталого J_{\parallel} для локально захоплених (крапками) та локально пролітних (пунктиром) частинок з $\alpha = 0,2$. Суцільною лінією позначена сепаратриса $\kappa^2 = 1$

Зміни фазового об'єму даються виразами

$$\Theta_i = \frac{dS_i}{d\vartheta} = \frac{\partial S_i}{\partial \vartheta} - \frac{\partial S_i}{\partial \psi} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \{ \kappa^2, S_i \}, \quad (12)$$

де ми використовуємо позначення

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{\partial G}{\partial \psi}.$$

Відзначимо, що фазовий об'єм, зайнятий відповідним станом, зменшується, коли $\Theta_{\pm} > 0$. Для локально захоплених частинок

$$\frac{\Theta_t}{2\pi} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \{ \kappa^2, I_s \} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{I_s}{4\epsilon_{hm}^2} \{ \kappa^2, \epsilon_{hm}^2 \} = \frac{I_s}{2\epsilon_{hm}^2} \frac{\delta}{\delta_1} \sin \vartheta,$$

де r – безрозмірна псевдо-радіальна координата, визначена з рівняння $\psi = \bar{B} a^2 r^2 / 2$, a – малий радіус плазми, а

$$\delta = \epsilon_h \epsilon_m (\epsilon'_0 - \epsilon'_t \cos \vartheta) - \epsilon_t (\epsilon_{hm}^2)'/2,$$

$$\delta_1 = \epsilon'_0 + \epsilon'_{hm} - \epsilon'_t \cos \vartheta,$$

де похідні по r позначені штрихом. Для локально пролітних частинок,

$$\frac{\Theta_{\pm}}{2\pi} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \left(\left\{ \kappa^2, \mp \frac{e \psi_p}{c N} \right\} + \frac{1}{2} \{ \kappa^2, I_s \} \right) = \frac{1}{2} \frac{\Theta_t}{2\pi} \pm \frac{e \psi_p}{c N} \frac{d\psi}{d\vartheta} \Big|_{\kappa^2=1}.$$

Для зручності ми вводимо псевдо-імовірність переходу

$$\tilde{P} = \frac{2\Theta_t}{\Theta_+ - \Theta_-} = \frac{2}{\pi l r} \frac{\bar{\rho}_l R}{a^2} \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon_{hm}} (\epsilon_h \epsilon_m + \epsilon_t \epsilon_{hm})}.$$

Чисельні оцінки показують, що для термоядерних α -частинок у реакторі Helias \tilde{P} додатна і менша за 0,1 у всьому об'ємі плазми, і ще менша для енергійних йонів нейтральної інжекції у Wendelstein-7X. Відповідно, зміни фазового об'єму локально пролітних частинок завжди мають протилежний знак і близькі за абсолютним значенням:

$$\frac{\Theta_+}{\Theta_-} = \frac{(\Theta_+ - \Theta_-)/2 + \Theta_t/2}{(\Theta_- - \Theta_+)/2 + \Theta_t/2} = -\frac{1 - \tilde{P}}{1 + \tilde{P}} = O(1),$$

а фазовий потік локально захоплених частинок є $O(\tilde{P})$.

Ми визначили знаки у (11) таким чином, що $\Theta_+ > 0$ у верхній точці переходу ($0 < \vartheta < \pi$). Оскільки у цій точці фазовий об'єм, зайнятий (+)-локально пролітними частинками, зменшується, а об'єм, зайнятий локально захопленими частинками – збільшується, (+)-локально пролітні частинки перетворюватимуться на локально захоплені із імовірністю $P = \Theta_t/\Theta_+ = \tilde{P}/(1 - \tilde{P}/2) \approx \tilde{P}$ (цей результат збігається із (25) у [3], хоча тут він отриманий в дещо інший спосіб). Решта (+)-локально пролітних частинок змінюють напрямок дрейфу і перетворюються на (–)-локально пролітні. У нижній точці переходу, знаки Θ_i змінюються на протилежні: фазовий об'єм, зайнятий локально захопленими частинками, зменшується. Відповідно, вони “випадають” із локальних магнітних ям з імовірністю 1 та стають локально пролітними, тоді як (–)-локально пролітні частинки стають (+)-локально пролітними і дрейфують назад до верхньої точки переходу.

5. Коефіцієнт дифузії

Щоб отримати вирази для стрибків адіабатичних інваріантів біля точок переходу, ми використовуємо теорію переходу через сепаратрису, розроблену Нейштадтом [6]. Оскільки фазовий портрет нелінійного маятника відрізняється від фазового портрета системи, розглянутої в [6], ми не можемо прямо використати виведені там вирази. Дещо громіздкі обчислення стрибків за тією схемою, винесені у Додаток, дають для стрибка адіабатичного інваріанта I_t при переході між локально захопленим і локально пролітним станами вираз

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow t} = \frac{\Theta_t}{\Theta_+} (b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+) \xi + a\Theta_t \ln \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\xi + \frac{\Theta_+}{\Theta_t})\Gamma(\frac{\Theta_t}{\Theta_+}(1 - \xi))}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left| \xi - 1 + \frac{\Theta_+}{\Theta_t} \right|}, \quad (13)$$

де a та b'_i – коефіцієнти, що визначаються із розвинення I_i біля сепаратриси, а $0 < \xi < 1$ – параметр переходу, що відповідає точній координаті частинки у момент перетину сепаратриси; ми опускаємо члени, що не залежать від ξ , бо вони не дають внеску в коефіцієнт дифузії. При повторних переходах через сепаратрису, ξ можна вважа-

ти рівномірно розподіленою випадковою величиною, і адіабатичний інваріант зазнаватиме випадкового блукання з середньоквадратичним кроком $\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle$, де кутові дужки позначають усереднення по ξ . Відзначимо, що у спеціальному випадку, коли

$$\Theta_+ = \Theta_- = \Theta_t/2, b_+ = b_-, \quad (14)$$

вираз (13) зводиться до $a\Theta_t \ln \sin \xi$ і середньоквадратичний крок адіабатичного інваріанта дорівнюватиме

$$\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle = (a\Theta_t)^2 \pi^2 / 12. \quad (15)$$

Цей спеціальний випадок відповідає задачі про частинку у гармонічному електричному потенціалі, який повільно змінюється з часом [4–6]. Проте умови (14) означають, що, залежно від знака Θ_t , “пролітні” частинки захоплюються потенціалом, а захоплені – перетворюються на пролітні з імовірністю 1, а між локально пролітними станами переходів немає. На противагу, в нашому випадку імовірність перетворення у верхній точці переходу $P \ll 1$, а у нижній точці переходу фазовий потік локально захоплених частинок, що перетворюються на локально пролітні, становить малу ($\sim P$) частку потоку локально пролітних частинок, що змінюють напрямок дрейфу на протилежний. Крім цього, умови (14) вимагають симетрії між локально пролітними станами, відсутньої в нашому випадку через наявність у рівнянні (8) члена $-\frac{\epsilon}{c}\psi_p$. (Фізично, ця асиметрія означає, що та частина траєкторії локально захопленої частинки, яка є близькою до (–) гілки сепаратриси, є “довшою” за ϑ , ніж та, що є близькою до (+) гілки, і навпаки у нижній точці переходу.)

У випадку, що ми розглядаємо, $\tilde{P} \ll 1$ і середньоквадратичний крок дається (31). Нехтуючи малим кореляційним членом та наближаючи введене вище виразу за $\tilde{P} \Theta_t/\Theta_+ \approx \tilde{P}$,

$$\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle \approx M_2 (a\Theta_t)^2 + \frac{1}{12} \left(-a\Theta_t \ln \tilde{P} + \tilde{P}(b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+) \right)^2, \quad (16)$$

де $M_2 \approx 0,77$ – константа, що виникає з інтегралів з Γ -функціями.

Тепер нам потрібні вирази для коефіцієнтів a та b'_i . Наслідуючи [6], ми розкладаємо адіабатичні інваріанти за “енергетичною відстанню” від сепаратриси $h = \psi - \psi_s$ при фіксованому значенні “часу”

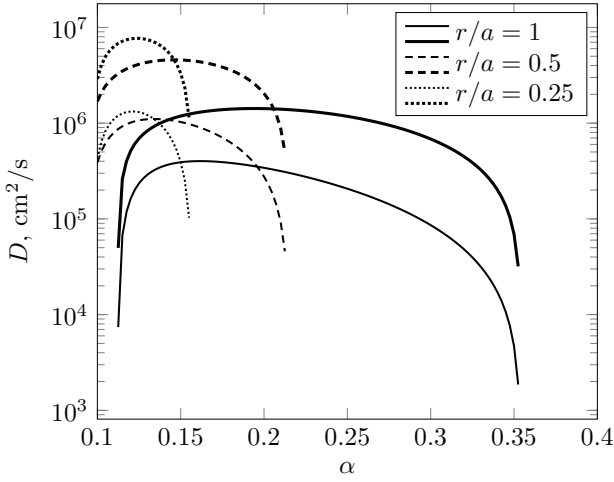


Рис. 3. Залежність коефіцієнта дифузії від підкутового параметра $\alpha = \mathcal{E}/\mu\bar{B} - 1$ для різних r/a . Товсті лінії: D , тонкі лінії: $D^{(0)}$

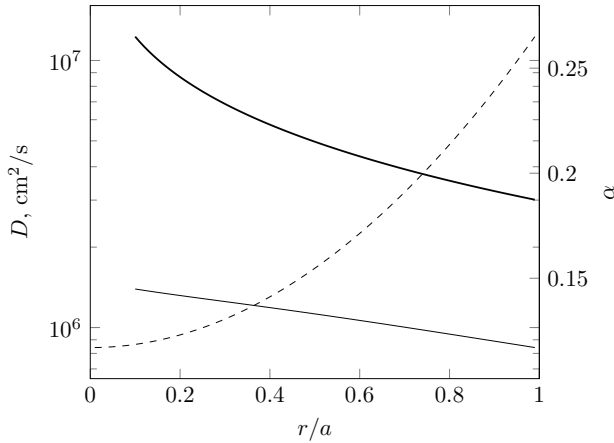


Рис. 4. Залежність коефіцієнтів дифузії від радіуса при $\alpha = (\alpha_{\min} + \alpha_{\max})/2$. Товсті лінії: D , тонкі лінії: $D^{(0)}$. Пунктирна лінія дає значення середнього α при кожному значенні радіуса

ϑ . Тут ψ_s – положення сепаратриси, визначене із рівняння $\kappa^2(\psi_s, \vartheta) = 1$. Поблизу $\kappa^2 = 1$ для функції f справедлива оцінка

$$f(\kappa) = 1 - \frac{s}{4} \left(1 + \ln \frac{16}{|s|} \right) + O(s^2 \ln |s|),$$

де

$$s = 1 - \kappa^2 \approx -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h$$

додатне для локально захоплених і від'ємне для локально пролітних частинок. Тоді для I_{\pm} маємо

$$I_{\pm} \approx \mp \frac{e \psi_p}{c N} \mp \frac{e \iota}{c N} h + \frac{1}{2} I_s + \frac{1}{2} \frac{\partial I_s}{\partial \psi} h - \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h \ln \left| \frac{1}{16e} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h \right|$$

і коефіцієнти у (21) даються виразами

$$\frac{a_{\pm}}{2\pi} \equiv \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi},$$

$$\frac{b_{\pm}}{2\pi} = \mp \frac{\iota}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial I_s}{\partial \psi} - \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \ln \left| \frac{1}{16} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right|,$$

тоді як для локально захоплених частинок з $I_t = I_+ + I_-$ впливає $b_t = b_+ + b_-$, $a_t = 2a$. Позначаючи $b'_i = b_i - a_i \ln |\Theta_i|$ та залишаючи скрізь лише ведучі члени за \tilde{P} , після деяких перетворень отримуємо

$$b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+ = b'_+ \Theta_- - b'_- \Theta_+ = 2\pi \Theta_+ \left(\frac{\iota}{N} \tilde{P} - \frac{\partial I_s}{\partial \psi} + \frac{I_s}{4} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \ln \left| \frac{\pi}{8} \left\{ \kappa^2, \frac{\psi_p}{N} \right\} \right| \right).$$

Крім цього, ми маємо співвіднести зміну адіабатичного інваріанта із радіальним зміщенням точки, де дрейфова траєкторія частинки перетинає сепаратрису:

$$\delta\psi_{+ \rightarrow t} = \frac{d\psi}{dI_i} \Big|_{\kappa^2=1} \delta J_{+ \rightarrow t}, \quad (17)$$

де

$$\frac{d\psi}{dI_i} \Big|_{\kappa^2=1} = \frac{d\psi}{d\vartheta} \Big|_{\kappa^2=1} \left(\frac{dI_i}{d\vartheta} \right)^{-1} = -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{2\pi}{\Theta_i}.$$

Комбінуючи наведені вище формули, отримуємо для середньоквадратичного радіального зміщення частинки при переході між локально пролітним та локально захопленим станами

$$\langle (\delta\psi_{+ \rightarrow t} - \langle \delta\psi_{+ \rightarrow t} \rangle)^2 \rangle = \left(\frac{\pi I_s}{4} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^2 \left(M_2 - \frac{Q^2}{12} \right), \quad (18)$$

де

$$Q = \ln \tilde{P} + 2 \ln \left| \frac{\pi}{8} \left\{ \kappa^2, \frac{\psi_p}{N} \right\} \right| + 8 \frac{1}{I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^{-1}.$$

Коефіцієнт стохастичної дифузії, що виникає внаслідок стрибків адіабатичних інваріантів при цих переходах, можна оцінити виразом

$$D = \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 \langle (\delta\psi_{+\rightarrow t} - \langle \delta\psi_{+\rightarrow t} \rangle)^2 \rangle \frac{2P}{\tau}, \quad (19)$$

де τ – середній час між перетвореннями частинки у верхній точці переходу. Множник $2P$ враховує, що кожного разу, коли частинка з імовірністю P перетворюється на локально захоплену, відбувається два переходи між локально пролітним та локально захопленим станами. Використовуючи оцінку для τ з [3], отримуємо

$$D = D^{(0)} \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^{-1} \left(M_2 - \frac{Q^2}{12} \right), \quad (20)$$

де

$$D^{(0)} = \frac{\pi^3 R^2 \omega_B \rho_l^4}{3N^2 a^4 r^3} \epsilon_{hm} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^2 \frac{\delta}{\epsilon_h \epsilon_m + \epsilon_{hm} \epsilon_t + \delta / \delta_1}$$

– коефіцієнт стохастичної дифузії, що дається формулою (36) у [3]. Його можна отримати, підставивши в (17) вираз (15) замість (16).

Отриманий нами вираз для коефіцієнта стохастичної дифузії враховує лише внесок від переходів між локально захопленим та локально пролітними станами і нехтує можливим внеском у стохастичну дифузію від перетворення частинки між двома локально пролітними станами, тобто від зміни напрямку дрейфу локально пролітних частинки на протилежний. Цей внесок дається виразом

$$D_{\pm} = \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 \langle (\delta\psi_{+\rightarrow -} - \langle \delta\psi_{+\rightarrow -} \rangle)^2 \rangle \frac{2}{\tau},$$

де середньоквадратичний крок адіабатичного інваріанта дається рівнянням (28). Ми не враховуємо цей внесок, бо неясно, чи можна вважати параметр переходу при кожному наступному переході рівномірно розподіленою випадковою величиною. Крім цього, D_{\pm} має той самий порядок величини, що й $D^{(0)}$, і навряд чи вплине на будь-які висновки щодо наслідків стохастичної дифузії в нашому випадку.

Щоб порівняти D та $D^{(0)}$, ми обчислюємо числові значення обох коефіцієнтів для тієї самої магнітної конфігурації та параметрів частинки, які були використані в роботі [3], а саме для термоядерних α -частинки у реакторі Helias з $\langle \beta \rangle = 4,7\%$,

$B = 4,75T$ та $a/\rho_l = 30$. Результати обчислень наведені на рис. 3, 4. Загальний вигляд залежності D від r та α залишається тим самим, але значення, обчислені за формулою (20), перевищують попередні оцінки у кілька разів, особливо поблизу α_{\max} , тобто для слабо перехідних частинок.

Вираз $D^{(0)}$ дає якісно правильні результати через те, що стрибки адіабатичного інваріанта є добутком фазового потоку частинки через сепаратрису та безрозмірного множника, що враховує інтервали, в яких розподілені параметри переходу, та структуру фазового простору біля сепаратриси (зокрема кількість і порядок наближень траєкторії частинки до гіперболічних точок). Фазові потоки між станами не залежать ні від параметрів переходу окремих частинок, ні від структури фазового простору біля сепаратриси, і визначаються прямо із виразів для адіабатичних інваріантів (12). Імовірності переходів також залежать лише від цих потоків, тому наш вираз для імовірності переходу збігається з обчисленим у [3].

6. Підсумки

Виведено коефіцієнт стохастичної дифузії перехідних частинок у стелараторах типу Wendelstein, заснований на виразі для стрибків адіабатичного інваріанта в стелараторному магнітному полі, що враховує створювану магнітним полем асиметрію між локально пролітними частинками із протилежними знаками v_{\parallel} . Показано, що висновки роботи [3] залишаються якісно вірними незважаючи на використання виразу для стрибків адіабатичного інваріанта частинки у гармонічному електричному потенціалі, що повільно змінюється з часом [4–6], але коефіцієнт дифузії, обчислений за новою формулою, в кілька разів перевищує попередні оцінки. Перевищення особливо помітне для слабо перехідних частинок.

Автор висловлює подяку Я.І. Колесниченку та В.С. Марченку за цінні дискусії та коментарі.

ДОДАТОК:

Перехід через сепаратрису у “зсунутому” нелінійному маятнику

У цій частині методом, наведеним у [6], буде виведено вирази для зміни адіабатичних інваріантів при повільному переході через сепаратрису у гамільтоновій системі, фазовий портрет якої зображено на рис. 1, гамільтоніан якої

$H(p, q, \varepsilon t)$ повільно залежить від часу. Для зручності, гамільтоніан $H(p, q, \varepsilon t)$ вважатимемо рівним нулю на сепаратрисі та від'ємним у "захопленій" області, як в звичайному нелінійному маятнику. Позначимо фазові об'єми станів S_i , а відповідні фазові потоки $\Theta_i = \dot{S}_i$, як в основному тексті. Вважатимемо, що $\Theta_+ \Theta_- < 0$ і, без втрати загальності, покладемо $\Theta_+ > 0$. Тоді між трьома станами відбуватимуться такі переходи:

$$\Theta_t < 0: \begin{cases} (+) \rightarrow (-) & (a), \\ (t) \rightarrow (-) & (b), \end{cases}$$

$$\Theta_t > 0: \begin{cases} (+) \rightarrow (-) & (c), \\ (+) \rightarrow (t) & (d). \end{cases}$$

Різниця між переходами (a) та (c) полягає у тому, що у випадку (a) всі (+)-пролітні траєкторії перетворюються на (-)-пролітні, а у випадку (c) деякі (+)-пролітні траєкторії стають захопленими.

Визначимо коефіцієнти a_i, b_i та S_i з розвинення адиабатичних інваріантів I_i біля сепаратрис:

$$2\pi I_i = \oint pdq = S_i - a_i h \ln |h| + (b_i + a_i)h + O(h^2 \ln |h|), \quad (21)$$

де h – енергія системи на траєкторії. Відповідно,

$$\oint_{H=h} \frac{\partial H}{\partial t} dt = -2\pi \frac{\partial I_i}{\partial t} = -\Theta_i + O(h \ln |h|). \quad (22)$$

Період руху частинки по траєкторії біля сепаратрис дається виразом

$$T_i = 2\pi \left(\frac{\partial h}{\partial I_i} \right)^{-1} = b_i - a_i \ln |h| + O(h \ln |h|).$$

Якщо $\dot{H} \neq 0$, то адиабатичні інваріанти не будуть константами і зазнаватимуть відхилень порядку $O(\varepsilon)$ від середнього значення на періоді, [6] використовує додатково усереднені адиабатичні інваріанти $J_i = I_i + u_i$, де

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_i} \left(\frac{T_i}{2} - t \right) \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

які відхиляються від середнього значення на періоді лише на величину порядку $O(\varepsilon^2)$. Поведінка поправок u_i біля сепаратрис залежить від того, скільки разів за період траєкторія наближається до гіперболічних точок. У нашому випадку, як і у розглянутому в [6], "пролітні" траєкторії наближаються до єдиної гіперболічної точки один раз за період, і $2\pi u_{\pm} = d_{\pm} + O(\sqrt{h} \ln |h|)$ зі сталими d_{\pm} , а для "захоплених" траєкторій, що наближаються до неї двічі за період, $2\pi u_t = (T_+ \Theta_- - T_- \Theta_+)/2 + dt + O(\sqrt{h} \ln |h|)$ з $d_t = d_+ + d_-$. У подальшому, ми опускаємо оцінки відкинутих членів, аналогічні [6].

Розглянемо спершу перехід (a). Поки система знаходиться далеко від сепаратрис, $I_+ = I_{+\infty}$ та $J_+ = J_{+\infty}$ майже не змінюються. Ми можемо визначити час псевдоперетину [7] τ_* як корінь рівняння $S_+(\tau_*) = 2\pi J_{+\infty}$. Це той час, який знадобився б траєкторії, щоб перетнути сепаратрису,

якби адиабатичний інваріант лишався незмінним до самого перетину. Ми також можемо визначити псевдо-кінцеве значення J_- після переходу: $2\pi J_{-*} = S_-(\tau_*)$.

З рівняння (22) видно, що з кожним періодом енергія системи зменшується на Θ_+ : $h_n = h_0 + n\Theta_+$, де ми нумеруємо послідовні точки максимального наближення траєкторії до гіперболічної точки, починаючи з останнього наближення перед перетином. Моменти часу, що відповідають цим моментам максимального наближення, будуть відноситися як $\tau_{+|n-1} = \tau_{+|n} + \frac{1}{2}(T_+(h_n) + T_+(h_{n-1}))$, бо кожен інтервал між послідовними наближеннями складається із повільного віддалення від гіперболічної точки, коли енергія системи близька до h_n , та повільного наближення до неї, коли енергія системи близька до h_{n-1} ; в періоді руху $T_i(h)$ домінує час, потрібний траєкторії, щоб пройти повз гіперболічну точку при майже сталому значенні енергії h . За визначенням останнього перед перетином сепаратрис максимального наближення, $0 < h_0 < \Theta_+$. Визначимо безрозмірний параметр переходу $\xi_+ = h_0/\Theta_+$. Коли траєкторія перетинає сепаратрису і потрапляє в (-)-область, вона спершу є близькою до гілки сепаратрис, що відділяє (+)-від (-)-області, потім наближається до гіперболічної точки і відходить від неї вздовж гілки сепаратрис, що відділяє (t)- та (-)-області. Відповідно, енергія системи біля гіперболічної точки в той момент, коли траєкторія наближається до неї всередині (t)-області, буде рівною $g_* = h_0 - \Theta_+$, а при наближенні до гіперболічної точки в (-)-області – $g_0 = g_* - \Theta_- = h_0 - \Theta_t$. g_0 буде додатним (як йому і слід бути в (-)-"пролітному" стані), бо $\Theta_t < 0$. Параметр перетину в (-)-області $\xi_- = -g_0/\Theta_-$ пов'язаний з ξ_+ очевидним співвідношенням $\Theta_+(1 - \xi_+) = -\Theta_-(1 - \xi_-)$. Зазначимо, що, хоча $0 < \xi_+ < 1$, це, взагалі кажучи, несправедливо для ξ_- : частину фазового потоку в (-)-області становлять траєкторії, що переходять до неї власне із "захопленого" стану. Додаючи внески в час, потрібний траєкторії, щоб дістатися від h_0 до g_0 , і пригадуючи, що у (t)-стані траєкторія наближається до гіперболічної точки двічі за період, ми отримуємо $\tau_{-|0} = \tau_{+|0} + \frac{1}{2}T_+(h_0) + \frac{1}{2}T_t(g_*) + \frac{1}{2}T_-(g_0)$. Між наступними моментами максимального наближення до гіперболічної точки траєкторії, яка тепер віддаляється від сепаратрис, енергія системи збільшуватиметься на Θ_- за період: $g_n = g_0 - n\Theta_-$. Аналогічні міркування показують, що часи цих послідовних моментів максимального наближення до гіперболічної точки в (-)-області будуть пов'язані співвідношенням $\tau_{-|n} = \tau_{-|n-1} + \frac{1}{2}(T_-(g_{n-1}) + T_-(g_n))$. Підставляючи наближені вирази для T_i та I_i біля сепаратрис та перетворюючи рекурентні співвідношення на суми, легко отримати, що

$$\tau_{+|0} \approx \tau_{+|n} + n(b_+ - a_+ \ln \Theta_+) - \frac{1}{2}a_+ \ln \frac{\xi_+ + n}{\xi_+} - a_+ \ln \frac{\Gamma(\xi_+ + n)}{\Gamma(\xi_+)},$$

а згідно з (21),

$$2\pi(J_{+0} - J_{+n}) \approx \Theta_+(\tau_{+|0} - \tau_{+|n}) - (a_+ + b_+)n\Theta_+ - a_+(h_0 \ln h_0 - h_n \ln h_n).$$

Розглянемо момент, коли траєкторія ще досить далека від сепаратриси, тобто $n \gg 1$. Застосовуючи розвинення Стірлінга для Γ -функції $\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ там, де її аргумент містить n , та переходячи до границі $n \rightarrow \infty$, отримуємо для зміни J_+ при наближенні до сепаратриси

$$2\pi(J_{+0} - J_{+\infty}) \approx -a_+\Theta_+ \left[\xi_+ \ln \xi_+ - \xi_+ + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\xi_+\Gamma(\xi_+)}} \right]. \quad (23)$$

Насправді наближення до сепаратриси не займає нескінченного часу, але похибка наближення Стірлінга менша за 5% вже при $x = 2$.

Наближення до сепаратриси та віддалення від неї у випадку переходу $(+) \rightarrow (-)$ є симетричними, тому (23) з заміною індексів $+$ на $-$ справедливе для $J_{-\infty}$, значення J_- в пізніший момент часу, коли траєкторія вже віддалилася від сепаратриси:

$$2\pi(J_{-\infty} - J_{-0}) \approx -a_-\Theta_- \left[\xi_- \ln \xi_- - \xi_- + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\xi_-\Gamma(\xi_-)}} \right]. \quad (24)$$

Тепер потрібно зшити наближення до сепаратриси та віддалення від неї. Ми не знаємо точного часу переходу $\tau_{\pm|0}$, але ми можемо обчислити різницю $\tau_{-|0} - \tau_{+|0}$ і виразити $\tau_{-|0}$ через остаточне значення, якого набуває J_- після віддалення траєкторії від сепаратриси. Використовуючи час псевдоперетину τ_* як відому точку відліку, незалежну від ξ_i , виключаємо $\tau_{\pm|0}$ із наближених рівнянь

$$\begin{aligned} S_+(\tau_{+|0}) &\approx S_+(\tau_*) + \Theta_+(\tau_{+|0} - \tau_*), \\ S_-(\tau_{-|0}) &\approx S_-(\tau_*) + \Theta_-(\tau_{-|0} - \tau_*), \end{aligned}$$

що дає

$$\begin{aligned} S_-(\tau_{-|0}) - S_-(\tau_*) &\approx \Theta_-(\tau_{-|0} - \tau_{+|0}) + \\ &+ \frac{\Theta_-}{\Theta_+} (S_+(\tau_{+|0}) - S_+(\tau_*)). \end{aligned} \quad (25)$$

Фазові об'єми $S_i(\tau_{i|0})$ можна виразити із J_{i0} та розвинень I_i та u_i біля сепаратриси. У свою чергу, J_{i0} співвідносяться з $J_{i\infty}$ через (23) та (24), зрештою з'єднуючи стан системи до наближення та після віддалення від сепаратриси. Поєднуючи ці міркування із визначенням J_{-*} , можна отримати

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+\rightarrow-} &= 2\pi(J_{-\infty} - J_{-*}) = 2\pi(J_{-\infty} - J_{-0}) + \\ &+ (2\pi J_{-0} - S_-(\tau_{-|0})) + \Theta_-(\tau_{-|0} - \tau_{+|0}) - \\ &- \frac{\Theta_-}{\Theta_+} (2\pi J_{+0} - S_+(\tau_{+|0})) + \frac{\Theta_-}{\Theta_+} 2\pi(J_{+0} - J_{+\infty}). \end{aligned} \quad (26)$$

Цей вираз поєднує неадіабатичну зміну J_- зі значенням J_+ та є застосовним до будь-якого переходу між станами з відповідними замінами індексів.

Для нелінійного маятника $a_+ = a_- = a$, $a_t = 2a$, і, підставляючи (23), (24), (25) та розвинення J_i в (26), після деяких спрощень отримуємо

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+\rightarrow-} &= -a\Theta_- \ln \frac{2\pi(1-\xi_+)}{\Gamma(\xi_-)\Gamma(\xi_+)} + (1-\xi_+)b'_{[+}\Theta_-] + \\ &+ \text{члени, що не містять } \xi_i, \end{aligned} \quad (27)$$

де $b'_i = b_i - a_i \ln |\Theta_i|$ і для компактності використано позначення $x_{[i}y_{j]} = x_i y_j - x_j y_i$. Ми випускаємо члени, що не містять ξ_i , бо при обчисленні середньоквадратичного відхилення вони випадають. (Це рівняння відповідає (9) в [6].) Перехід (c) можна розглянути як обернений у часі перехід (a), де тепер $0 < \xi_- < 1$. Вводячи \tilde{P} як в основному тексті та покладаючи $\tilde{P} \ll 1$, маємо $\ln \Gamma(\xi_-) = \ln \Gamma(\xi_+) - \tilde{P}(1-\xi_+) \ln \xi_+ + o(\tilde{P})$. Залишаючи ведучі члени за \tilde{P} , отримуємо із (27)

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow-} = -a\Theta_- \ln \frac{2\pi(1-\xi_+)}{\Gamma(\xi_+)^2} + (1-\xi_+)b'_{[+}\Theta_-] +$$

+ члени, що не містять ξ_+ .

При послідовних переходах через сепаратрису, параметри переходу можна вважати рівномірно розподіленими випадковими величинами. Середня зміна адіабатичного інваріанту при переходах (a) та (c) має протилежний знак і скорочується, але J_{\pm} (разом із I_{\pm}) зазнаватиме випадкового блукання із середньоквадратичним кроком

$$\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow-} - \langle \delta J_{+\rightarrow-} \rangle))^2 \rangle = M_4(a\Theta_-)^2 +$$

$$+ M_3 a \Theta_- b'_{[+}\Theta_-] + \frac{1}{12} (b'_{[+}\Theta_-])^2, \quad (28)$$

де

$$M_3 = \int_0^1 dx \left(\ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} - \gamma_2 \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \approx 0,25,$$

$$M_4 = \int_0^1 dx \left(\ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} - \gamma_2 \right)^2 \approx 2,6,$$

та

$$\gamma_2 = \int_0^1 dx \ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} = -1 - \ln 2\pi.$$

Тепер розглянемо перехід (d) і віддалення від сепаратриси всередині (t)-області. Аналогічно до викладеного вище, енергія системи при послідовних моментах максимального наближення до гіперболічної точки буде $f_n = f_0 - n\Theta_t$, а самі моменти часу співвідноситимуться, як $\tau_{t|n+1} = \tau_{t|n} + \frac{1}{4}T_t(f_n) + \frac{1}{2}T_t(f_n - \Theta_+) + \frac{1}{4}T_t(f_{n+1})$, бо повільні частини n -го витка траєкторії – це віддалення від гіперболічної точки при енергії f_n , прохід повз неї при $f_n - \Theta_+$ (на половині траєкторії, близькій до гілки сепаратриси між (t)- та (+)-областями, енергія системи зменшується на Θ_+) та наближення при f_{n+1} . Енергія в момент першого максимального наближення в (t)-області буде $f_0 = g_* - \Theta_- = h_0 - \Theta_t$, але траєкторія, що приходить з (+)-області, захопиться лише тоді, коли її енергія при останньому максимальному наближенні в (+)-області достатньо мала, тобто $h_0 < \Theta_t$; інакше траєкторія потрапить до (-)-області. Оскільки $h_0 = \xi_+ \Theta_+$, параметр переходу $\xi_t = -f_0/\Theta_t$ буде відноситися до параметра переходу траєкторії у (+)-області як $\Theta_t(1 - \xi_t) = \Theta_+ \xi_+$, причому перехід відбудеться за умови $0 < \xi_+ <$

$< \Theta_t/\Theta_+$. Час, потрібний траєкторії на перетин сепаратри-
си, буде $\tau_{t|0} = \tau_{+|0} + \frac{1}{2}T_+(h_0) + \frac{1}{2}T_t(g_*) + \frac{1}{4}T_t(f_0)$: трає-
кторія віддаляється від гіперболічної точки в (+)-області
при енергії h_0 , проходить повз неї у (t)-області при g_* та,
якщо її енергія недостатня, щоб досягти (-)-області, знову
наближається до гіперболічної точки при f_0 .

Аналогічно до попереднього випадку отримуємо

$$2\pi(J_{t0} - J_{t\infty}) = a_t \Theta_t \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Gamma(\xi_t)\Gamma(\xi_t + \frac{\Theta_{\pm}}{\Theta_t})}{2\pi} + \xi_t - \left(\xi_t - \frac{1 - \Theta_+/\Theta_t}{2} \right) \ln |\xi_t| \right] \quad (29)$$

(це рівняння відповідає (4) в [6]).

Об'єднуючи (23), (29) та (26) з відповідними замінами
індексів, отримуємо

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow t} = a\Theta_t \ln \frac{\Gamma(\xi_t)\Gamma(\xi_t + \frac{\Theta_{\pm}}{\Theta_t})\Gamma(\xi_+)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left| \xi_t - 1 + \frac{\Theta_{\pm}}{\Theta_t} \right|} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+ \Theta_t]} \xi_t + \text{члени, що не містять } \xi_i. \quad (30)$$

Знову покладаючи $\tilde{P} \ll 1$, параметр переходу після пере-
тину сепаратриси $\xi_+ = O(\tilde{P})$ і можна розвинути $\Gamma(\xi_+) =$
 $= \xi_+^{-1} + O(1)$. Крім цього, оскільки $\Theta_+/\Theta_t = O(\tilde{P}^{-1})$,
можна розвинути $\ln \Gamma(\xi_t + \Theta_+/\Theta_t) = \ln \Gamma(\Theta_+/\Theta_t) +$
 $+ \xi_t \ln(\Theta_+/\Theta_t) + O(\tilde{P})$. Залишаючи ведучі члени за \tilde{P} , отри-
муємо із (30)

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow t} = a\Theta_t \left(\ln \frac{\Gamma(\xi_t)}{1 - \xi_t} + \xi_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} \right) + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+ \Theta_t]} \xi_t + \text{члени, що не містять } \xi_i.$$

Середньоквадратичний крок у цьому випадку дорівнюва-
тиме

$$\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle = M_2(a\Theta_t)^2 + M_1 a \Theta_t \left(a\Theta_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+ \Theta_t]} \right) + \frac{1}{12} \left(a\Theta_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+ \Theta_t]} \right)^2, \quad (31)$$

де

$$M_1 = \int_0^1 dx \left(\ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} - \gamma_1 \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \approx 0,001,$$

$$M_2 = \int_0^1 dx \left(\ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} - \gamma_1 \right)^2 \approx 0,77,$$

та

$$\gamma_1 = \int_0^1 dx \ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} = 1 + \ln \sqrt{2\pi}.$$

1. J. Nührenberg, R. Zille. Quasi-helically symmetric toroidal stellarators. *Phys. Lett. A* **129**, 113 (1988).
2. J. Nührenberg, W. Lotz, S. Gori. Theory of fusion plasma. In *Proc. Joint Varenna-Lausanne Int. Workshop (Varenna, Italy, 1994)* (Editrice Compositori, Bologna, 1994). p. 3.
3. C.D. Beidler, Ya.I. Kolesnichenko, V.S. Marchenko, I.N. Sidorenko, H. Wobig. Stochastic diffusion of energetic ions in optimized stellarators. *Phys. Plasmas* **8**, 2731 (2001).
4. A.V. Timofeev. On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of the motion changes. *Sov. Phys. JETP* **48**, 656 (1978).
5. J.R. Cary, D.F. Escande, J.L. Tennyson. Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing. *Phys. Rev. A* **34**, 4256 (1986).
6. A.I. Neishtadt. Change of an adiabatic invariant at a separatrix. *Sov. J. Plasma Phys.* **12**, 568 (1986).
7. J.R. Cary, S.G. Shasharina. Helical plasma confinement devices with good confinement properties. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 674 (1997).
8. R.G. Littlejohn. Variational principles of guiding centre motion. *J. Plasma Phys.* **29**, 111 (1983).
9. R.G. Littlejohn. Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates. *J. Math. Phys.* **23**, 742 (1982).
10. V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, 1978).
11. T. Andreeva. *Vacuum Magnetic Configurations of Wendelstein 7-X*. Preprint IPP III/270 (Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 2002).

Одержано 29.12.17

A. V. Tykhyy

STOCHASTIC DIFFUSION OF ENERGETIC IONS IN WENDELSTEIN-TYPE STELLARATORS

S u m m a r y

The collisionless stochastic diffusion of energetic ions in optimized stellarators of the Wendelstein type has been considered. The phenomenon concerned was predicted earlier in the framework of a simplified theory describing the separatrix crossing by ions. The jumps of the adiabatic invariant in magnetic configurations of a stellarator are calculated. The analysis of the results obtained confirms the importance of the stochastic diffusion and demonstrates that the diffusion coefficient can considerably exceed the available result.