А.В. ГРАДИСЬКИЙ,[1] Ю.П. СТЕПАНОВСЬКИЙ[2]

[1] Харківський Національний Університет ім. Каразіна
(Майдан Свободи, 4, Харків 61022; e-mail: artem.gradysky@gmail.com)
[2] Національний науковий центр "ХФТІ" НАНУ
(Вул. Академічна, 1, Харків 61108; e-mail: yustep@kipt.kharkov.ua)

УДК 539.1.01

БЕЗМАСОВА ГРАНИЦЯ РІВНЯНЬ БАРГМАНА–ВІГНЕРА ДЛЯ МАСИВНОГО ГРАВІТОНА

Дані про відкриття гравітаційних хвиль привернули увагу до питання існування маси у гравітонів, тобто до питання масивного гравітона. Масивний гравітон – це частинка зі спіном 2 та ненульовою масою. Метою роботи є дослідження границі релятивістських хвильових рівнянь масивного гравітона для випадку нульової маси частинки. Рівняння для гравітона ненульової маси базуються на рівняннях Баргмана–Вігнера у п'ятивимірному просторі-часі із сигнатурою $(++++-)$. Безмасова границя масивного гравітона зберігає усі можливі стани поляризації. Ці стани відповідають LL-гравітону (спіральність 0), TL-гравітону (спіральність ± 1) та TT-гравітону (спіральність ± 2).

Ключові слова: рівняння Баргмана–Вігнера, масивний гравітон, хвильові рівняння.

1. Вступ

Спостереження гравітаційних хвиль в період 2015–2017 рр. привернуло увагу до старого питання, чи є у гравітонів маса, тобто до проблеми масивного гравітона [1, 2]. Масивний гравітон – гіпотетична частинка зі спіном 2, маса m якої оцінюється як менша за 10^{-22}–10^{-32} еВ. Мета даного дослідження – розглянути масивний гравітон як безмасовий у п'ятивимірному просторі-часі та показати, що усі п'ять станів його поляризації зберігаються у безмасовій границі у просторі-часі Мінковського, на відміну від загальноприйнятої точки зору [3].

2. Хвильові рівняння Ландау–Пайерлса для світлових квантів та рівняння Бронштейна для гравітаційних квантів

У 1930 р. Л. Ландау та Р. Пайерлс першими розглянули питання про хвильову функцію світлового кванта. На початку роботи [4] Ландау та Пайерлс слушно припустили, що світловий квант треба описувати рівняннями Максвелла у вакуумі (будемо вважати, що $c = \hbar = 1$):

$$\dot{\mathfrak{E}} = \quad \mathbf{rot}\mathfrak{H}, \quad \mathbf{div}\mathfrak{E} = 0, \tag{1}$$
$$\dot{\mathfrak{H}} = -\mathbf{rot}\mathfrak{E}, \quad \mathbf{div}\mathfrak{H} = 0. \tag{2}$$

За Ландау і Пайерлсом в рівняннях (1), (2) вектори $\mathfrak{E}$ та $\mathfrak{H}$ є комплексними величинами.

Ландау і Пайерлс наклали на $\mathfrak{E}$ та $\mathfrak{H}$ додаткові обмеження, які відтинали розв'язки рівнянь (1), (2) з від'ємними енергіями. Позначивши "хвильову функцію" фотона, як $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{E}$ (або $\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{H}$), Ландау і Пайерлс написали для "хвильової функції" $\mathfrak{F}$ такі "хвильові рівняння":

$$\dot{\mathfrak{F}} = -\sqrt{\Delta}\mathfrak{F}, \tag{3}$$
$$\mathbf{div}\mathfrak{F} = 0. \tag{4}$$

де $\sqrt{\Delta}$ – інтегро-диференційний оператор,

$$\sqrt{\Delta}\mathfrak{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^2 i}\Delta \int \frac{\mathfrak{E}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} d^3y. \tag{5}$$

Якщо шукати розв'язок рівнянь (3), (4) у вигляді плоскої хвилі

$$\mathfrak{F} = e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}\mathbf{f}, \tag{6}$$

то з них випливають такі вирази:

$$\omega = |\mathbf{k}|, \tag{7}$$
$$(\mathbf{kf}) = 0, \tag{8}$$

Рівняння (7) відрізняється від наслідків рівнянь Максвелла (1), (2):

$$\omega = \pm|\mathbf{k}|. \tag{9}$$

Згодом стало зрозуміло, що саме рівняння Максвелла (1), (2) з комплексними $\mathfrak{E}$ та $\mathfrak{H}$ і є хвильовими рівняннями для світлових квантів (фотонів).

Щоб прояснити фізичний квантово-механічний зміст рівнянь Максвелла, як хвильових рівнянь для фотонів, доцільно замість шести комплексних величин $\mathfrak{E}$ та $\mathfrak{H}$ ввести шість комплексних величин (векторів Рімана–Зільберштейна [5–7] $\boldsymbol{\psi}_+$ та $\boldsymbol{\psi}_-$):

$$\boldsymbol{\psi}_\pm = \mathfrak{E} \pm i\mathfrak{H}. \tag{10}$$

Тепер рівняння Максвелла (1), (2) набувають вигляду

$$i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}_\pm = \pm\mathbf{rot}\boldsymbol{\psi}_\pm, \tag{11}$$

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\psi}_\pm = 0. \tag{12}$$

Відзначимо переваги переходу від векторів $\mathfrak{E}$ та $\mathfrak{H}$ до векторів $\boldsymbol{\psi}_+$ та $\boldsymbol{\psi}_-$:

1. Рівняння Максвелла перетворились у дві незалежні пари рівнянь для двох функцій $\boldsymbol{\psi}_+$ та $\boldsymbol{\psi}_-$.

2. Функції $\boldsymbol{\psi}_+$ та $\boldsymbol{\psi}_-$ при перетвореннях власної групи Лоренца перетворюються досить просто і незалежно одна від другої. Так, при переході у систему відліку, що рухається відносно іншої зі швидкістю $\mathbf{v}$, нові функції мають вигляд

$$\boldsymbol{\psi}'_\pm = \frac{\boldsymbol{\psi}_\pm \pm i[\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}_\pm]}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}. \tag{13}$$

3. Рівняння (11) має вигляд рівняння Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{14}$$

з гамільтоніаном $H = \pm\mathbf{rot}$.

4. Фізичний зміст гамільтоніана $H = \pm\mathbf{rot}$ такий: $H = \pm(\mathbf{sp})$, де $\mathbf{s}$ – оператор спіна фотона $(s_i)_{kl} = -i\varepsilon_{ikl}$; $\mathbf{p}$ – оператор імпульсу фотона, $p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$; ε_{ikl} – повністю антисиметричний одиничний символ Леві–Чивіта, $\varepsilon_{123} = 1$.

Таким чином, якщо фотони мають певні енергії та імпульси, то рівняння (11) описують фотони з правою (R, або $+$) та лівою (L, або $-$) спіральностями.

Як було з'ясовано у роботі [8], рівняння Вейля [9] для безмасового нейтрино ($s = \frac{1}{2}$), хвильові рівняння Максвелла для фотона ($s = 1$), та хвильові рівняння Бронштейна [10] для гравітона ($s = 2$) мають однакову теоретико-групову природу і відповідні гамільтоніани $H = \pm\frac{1}{s}(\mathbf{sp})$. (Докладніше про це див. [11–15]).

У роботі М.П. Бронштейна [10] рівняння для слабких гравітаційних хвиль були представлені у формі, у якій спорідненність з рівняннями Максвелла була очевидною. Так, рівняння Максвелла (1), (2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}E_i = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}H_l, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}E_i = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}H_i = -\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}E_l, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}H_i = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Рівняння Айнштайна для слабких гравітаційних хвиль у формі Бронштейна мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}E_{ij} = \varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}H_{lj}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}E_{ij} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}H_{ij} = -\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}E_{lj}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}H_{ij} = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

де E_{ij} та H_{ij} – симетричні безслідні тензори [1],

$$\begin{aligned}
&E_{ij} = R_{4j4i} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}R_{klmn},\\
&H_{ij} = \frac{i}{2}\varepsilon_{imn}R_{4jmn} = \frac{i}{2}\varepsilon_{imn}R_{mn4j},
\end{aligned} \tag{17}$$

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ – айнштайнівський тензор кривизни.

У роботі [10] Бронштейн не вводив термінів "гравітон" та "хвильова функція гравітаційного кванта". Він розглядав комплексні тензори E_{ij} та H_{ij}, як розв'язки рівнянь (16). Що є нічим іншим, як хвильовими функціями гравітонів, а рівняння (16) відповідними хвильовими рівняннями.

3. Хвильові рівняння для фотонів та гравітонів у спінорній формі

У 1929 р. на прохання П. Еренфеста Б.Л. ван дер Варден розвинув спінорний аналіз [16]. Першими у спінорній формі розглянули рівняння Максвелла Лапорт та Уленбек у 1931 р. [17]. Вони згадали про вектор Рімана–Зільберштейна і використали його у своїй роботі (у Рімана та Зільберштейна був тільки один вектор $\mathfrak{H} - i\mathfrak{E}$). Скориставшись векторами

[1] Для перевірки симетричності правої частини рівнянь (16) відносно індексів i та j зробимо таке: розглянемо різницю $\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}H_{lj} - \varepsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_k}H_{li}$. Користуючись властивістю (17) та $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$ можна показати, що ця різниця дорівнює нулю. А отже тензор є симетричним відносно перестановки i та j. Симетричність іншого тензора доводиться аналогічно.

Рімана–Зільберштейна (10), ми можемо записати рівняння (11) та (12) у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi_{(\pm)} = 0, \tag{18}$$

де $\psi_{(\pm)}$ – 2×2-матриця $(\psi_{(\pm)})_\alpha^\beta = (\boldsymbol{\psi}_\pm\sigma)_\alpha^\beta$, $(\sigma)_\alpha^\beta$ – звичайні матриці Паулі. Рівняння (11) та (12) випливають з рівнянь (18) та формули, яка визначає добуток матриць Паулі:

$$\sigma_i\sigma_k = \delta_{ik}I + i\varepsilon_{ikl}\sigma_l. \tag{19}$$

Введемо замість 10 комплексних величин E_{ij} та H_{ij} 10 комплексних величин (аналогів векторам Рімана–Зільберштейна):

$$\psi_{(\pm)_{ij}} = E_{ij} \pm iH_{ij}. \tag{20}$$

Визначимо спінтензор

$$\psi_{(\pm)_{\alpha\beta\gamma\delta}} = \psi_{(\pm)_{ij}}(\sigma_i)_{\alpha\beta}(\sigma_j)_{\gamma\delta}, \tag{21}$$

де $(\sigma_i)_{\alpha\beta} = (\sigma_i)_\alpha^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta}$ – симетричні матриці, тобто $(\sigma_i)_{\alpha\beta} = (\sigma_i)_{\beta\alpha}$, $\varepsilon_{\gamma\beta}$ – повністю антисиметричний одиничний символ Леві–Чивіта, $\varepsilon_{12} = 1$. Можна довести, що спін-тензор (21) повністю симетричний.

Наведемо тепер рівняння Вейля, рівняння Максвелла, та рівняння Бронштейна у спінорній формі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_\alpha^\eta\psi_{(\pm)_\eta} = 0, \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_\alpha^\eta\psi_{(\pm)_{\eta\beta}} = 0, \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}I \pm \sigma\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)_\alpha^\eta\psi_{(\pm)_{\eta\beta\gamma\delta}} = 0. \tag{24}$$

Запис наведених рівнянь у спінорній формі переконливо демонструє спорідненість всіх цих рівнянь.

Рівняння (22)–(24) – це релятивістські хвильові рівняння у нерелятивістських позначеннях. Релятивістська інваріантність цих рівнянь не є очевидною. Це недолік цих рівнянь. У позначеннях, що введені ван дер Варденом (звичайні спінорні індекси та індекси з крапкою), вони набувають вигляду

$$\begin{aligned}&(\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{(-)\alpha}(x) = 0,\\ &(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi^{\dot\alpha}_{(+)}(x) = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{(-)\alpha\beta}(x) = 0,\\ &(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi^{\dot\alpha\dot\beta}_{(+)}(x) = 0,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi_{(-)\alpha\beta\gamma\delta}(x) = 0,\\ &(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta}_{(+)}(x) = 0,\end{aligned} \tag{27}$$

де матриці $(\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}$ та $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}$ визначаються як

$$(\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha} = (\sigma, iI), \quad (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} = (\sigma. - iI). \tag{28}$$

Рівняння (25)–(27) набувають компактнішої форми, якщо від двокомпонентних спінорів перейти до діраківських чотирикомпонентних біспінорів. При цьому, наприклад у випадку фотона, доцільно від векторів Рімана–Зільберштейна повернутися до комплексних векторів Ландау і Пайерлса $\mathfrak{E} \equiv \mathbf{E}$ та $\mathfrak{H} \equiv \mathbf{H}$ та до чотиривимірного антисиметричного тензора комплексного електромагнітного поля $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x) = (\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x))$, який і вважати хвильовою функцією фотона. У спінорній формі обидві пари рівнянь Максвелла

$$F_{\mu\nu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \tag{29}$$

набувають такого вигляду

$$(\gamma_\mu)_\alpha^\beta F_{\rho\sigma,\mu}(\gamma_\rho\gamma_\sigma)_\beta^\delta = 0, \ \text{ тобто } \ \gamma_\mu F_{\rho\sigma,\mu}\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0, \tag{30}$$

де γ_μ – матриці Дірака, а хвильові рівняння для безмасового нотофа [18] $F_\mu(x) = (\mathbf{F}(x), iF_0(x))$

$$F_{\mu,\mu} = 0, \quad F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = 0, \tag{31}$$

набувають такого вигляду

$$(\gamma_\mu)_\alpha^\beta F_{\rho,\mu}(\gamma_\rho)_\beta^\delta = 0, \ \text{ тобто } \ \gamma_\mu F_{\rho,\mu}\gamma_\rho = 0. \tag{32}$$

(Про спінорний аналіз та застосування спінорів у теорії релятивістських хвильових рівнянь та у загальній теорії відносності див. [19–21].)

4. Три різновиди рівнянь Прока, фотон та нотоф

Релятивістські хвильові рівняння для масивної частинки зі спіном 1 (рівняння Прока) можна записати у трьох (при $m \neq 0$) формах [22]:

$$F_{\mu\nu,\nu} = m^2F_\mu, \tag{33}$$

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2018. Т. 63, № 7

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = F_{\mu\nu}, \tag{34}$$

$$W = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + m^2(|\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2), \tag{35}$$

де W – густина енергії. Прока вважав, що його рівняння більш відповідні для опису електрона, ніж рівняння Дірака.

Можна також записати рівняння Прока та позитивну густину енергії у такій формі [23]:

$$F_{\mu\nu,\nu} = F_{\mu}, \tag{36}$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = m^2 F_{\mu\nu}, \tag{37}$$

$$W = m^2(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) + |\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2. \tag{38}$$

Рівняння (33)–(35) у певному сенсі симетричні рівнянням (36)–(38): у першому випадку у безмасовій границі ми втрачаємо нотоф, в другому – фотон. Якщо рівняння (33)–(35) описують "масивний фотон", то рівняння (36)–(38) описують "масивний нотоф". У статті [23] перший та другий варіанти рівнянь Прока детально проаналізовані з використанням рівнянь Баргмана–Вігнера [24].

Третій варіант рівнянь Прока було використано у роботі Басса та Шредингера [25]. У безмасовій границі цих рівнянь "виживають" і фотон, і нотоф:

$$F_{\mu\nu,\nu} = mF_{\mu}, \tag{39}$$

$$F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = mF_{\mu\nu}, \tag{40}$$

$$W = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + |\mathbf{F}|^2 + |F_0|^2. \tag{41}$$

В останніх рівняннях $F_{\mu\nu}$ та F_{μ} мають однакову розмірність, бо і $F_{\mu\nu}$, і F_{μ} це рівноправні компоненти однієї багатокомпонентної хвильової функції. Третій варіант рівнянь Прока просто узагальнюється на випадок п'ятивимірного часопростору, що і буде використано у даній роботі. Слід відзначити, що використаний нами п'ятивимірний опис фотонів та гравітонів вперше було застосовано у теорії релятивістських рівнянь довільного спіну Й.К. Любаньськім у 1942 р. [26] і п'ята додаткова просторово-подібна координата цілком рівноправна з іншими трьома просторово-подібними координатами. Ця п'ятивимірність значно простіша і не пов'язана з п'ятивимірними теоріями Т. Калуци [27] та О. Кляйна [28].

5. Рівняння Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Спочатку розглянемо звичайну масивну нерелятивістську частинку зі спіном 2. Тобто будемо вважати, що хвильова функція масивного гравітона це повністю симетричний спін-тензор четвертого рангу:

$$\varphi_{abcd} = \varphi_{abcd}(\mathbf{x}, t). \tag{42}$$

Як було доведено Е. Майораною у 1928 р. [29], довільна хвильова функція (42) завжди може бути представлена у вигляді:

$$\varphi_{abcd} = A\{\varphi_a^{(1)}\varphi_b^{(2)}\varphi_c^{(3)}\varphi_d^{(4)}\}, \tag{43}$$

де A – деяка константа, позначення $\{\}$ означає повну симетризацію за усіма індексами, $\varphi_a^{(i)}$ – певні двокомпонентні спінори [2]. При переході до релятивістської теорії, у випадку спіну $\frac{1}{2}$, нерелятивістський спінор $\varphi_a (a = 1, 2)$ потрібно замінити 4-компонентним діраківським біспінором $\psi_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 4)$, який задовольняє рівняння Дірака:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_\alpha^\beta \psi_\beta(x) = 0, \tag{44}$$

де γ_μ – матриці Дірака, $x_\mu = (\mathbf{x}, it)$ та m – часопросторова координата та маса частинки. Природно у (43) усі чотири нерелятивістські спінори замінити діраківськими біспінорами та вважати, що хвильова функція масивного гравітона має вигляд:

$$\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = A\{\psi_\alpha^{(1)}\psi_\beta^{(2)}\psi_\gamma^{(3)}\psi_\delta^{(4)}\}. \tag{45}$$

Ясно, що хвильова функція (45) задовольняє рівняння Баргмана–Вігнера [24]:

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_\alpha^\lambda \psi_{\lambda\beta\gamma\delta}(x) = 0. \tag{46}$$

Оскільки спін-тензор $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ є повністю симетричним, то немає значення на який індекс діє матриця $(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)$.

[2] Теорема Майорани була перевідкрита Р. Пенроузом у 1960 р. [30] і використана для аналізу алгебраїчних властивостей тензора кривизни у загальній теорії відносності (класифікації типів гравітаційних полів за Петровим [31]).

6. П'ятивимірна форма рівнянь Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Рівняння Дірака (44) можна представити у п'ятивимірному вигляді. Домножимо рівняння (44) на $i\gamma_5$,

$$\left(i\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+im\gamma_5\right)\psi=0. \tag{47}$$

Введемо п'яту координату X_5, нову хвильову функцію

$$\Psi(x,X_5)=e^{imX_5}\psi(x), \tag{48}$$

та нові матриці Γ_A $(A=1,2,3,4,5)$:

$$\Gamma_\mu=i\gamma_5\gamma_\mu, \Gamma_5=\gamma_5. \tag{49}$$

П'ять координат $(X_\mu=x_\mu,X_5)$ ми будемо позначати великою літерою X. Тепер можемо записати рівняння Дірака для хвильової функції (48) у вигляді

$$\Gamma_A\frac{\partial}{\partial X_A}\Psi(X)=0. \tag{50}$$

Зробивши аналогічні зміни з рівнянням (46), перепишемо його у такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial X_A}(\Gamma_A)^\lambda_\alpha\Psi_{\lambda\beta\gamma\delta}(X)=0. \tag{51}$$

7. П'ятивимірна тензорна форма рівнянь Баргмана–Вігнера для масивного гравітона

Спочатку розглянемо випадок масивного фотона. Будемо вважати, аналогічно до (45), що хвильова функція масивного фотона – це повністю симетричний тензор 2 рангу:

$$\psi_{\alpha\beta}(x)=A\{\psi^{(1)}_\alpha\psi^{(2)}_\beta\}, \tag{52}$$

де A – деяка константа. Ясно, що хвильова функція (52) задовольняє рівняння Баргмана–Вігнера:

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)^\lambda_\alpha\psi_{\lambda\beta}(x)=0. \tag{53}$$

У п'ятивимірному просторі $X_A=(X_\mu=x_\mu,X_5)$ хвильова функція

$$\Psi_{\alpha\beta}(X)=e^{imX_5}\psi_{\alpha\beta}(x) \tag{54}$$

задовольняє рівняння, аналогічне до (51):

$$\frac{\partial}{\partial X_A}(\Gamma_A)^\lambda_\alpha\Psi_{\lambda\beta}(X)=0. \tag{55}$$

Введемо інфінітезимальні оператори $(S_{AB})^\beta_\alpha$ узагальненої групи Лоренца $SO(4,1)$, які діють на діраківські біспінори у п'ятивимірному просторі з п'яти-координатами X_A та інваріантною формою X_AX_A:

$$S_{AB}=\frac{\Gamma_A\Gamma_B-\Gamma_B\Gamma_A}{4i}, \tag{56}$$

Розглянемо нові матриці

$$(S_{AB})^{\alpha\beta}=(C^{-1})^{\alpha\gamma}(S_{AB})^\beta_\gamma, \tag{57}$$

де C – антисиметрична матриця зарядового спряжіння $C_{\alpha\beta}=-C_{\beta\alpha}$. Десять матриць $(S_{AB})^{\alpha\beta}$ мають такі важливі властивості симетрії:

$$(S_{AB})^{\alpha\beta}=-(S_{BA})^{\alpha\beta}=(S_{AB})^{\beta\alpha}. \tag{58}$$

Введемо тензорну хвильову функцію масивного фотона:

$$\Phi_{AB}(X)=-\Phi_{BA}(X)=(S_{AB})^{\alpha\beta}\Psi_{\alpha\beta}(X). \tag{59}$$

Неважко впевнитися, що хвильова функція (59) задовольняє такі рівняння:

$$\Phi_{AB,B}=0, \tag{60}$$

$$\Phi_{AB,C}+\Phi_{BC,A}+\Phi_{CA,B}=0, \tag{61}$$

де комою позначено частинну похідну, тобто $\Phi_{,A}\equiv$ $\equiv\frac{\partial}{\partial X_A}\Phi$.

Введемо хвильову функцію у просторі Мінковського $F_{AB}(x)$:

$$\Phi_{AB}(X)=e^{imX_5}F_{AB}(x), \tag{62}$$

та позначення

$$F_{\mu5}(x)=iF_\mu(x). \tag{63}$$

Для функцій $F_{\mu\nu}$ та F_μ рівняння (60) та (61) перейдуть у рівняння Прока (39) та (40) для масивної частинки зі спіном 1:

$$F_{\mu\nu,\nu}=mF_\mu, \tag{64}$$

$$F_{\mu,\nu}-F_{\nu,\mu}=mF_{\mu\nu}. \tag{65}$$

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2018. Т. 63, № 7

З рівнянь (61) та позначень у рівняннях (62)–(64) випливає рівняння (66):

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \tag{66}$$

Аналогічно із (60) та умов (62)–(64) отримуємо (67):

$$F_{\mu,\mu} = 0. \tag{67}$$

Безмасову границю рівнянь Прока (64), (65) була вперше проаналізовано у 1955 р. Басом та Шредінгером [25]. При $m = 0$ ми одержимо з рівнянь (64)–(67) такі вирази:

$$F_{\mu\nu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0, \tag{68}$$

$$F_{\mu,\mu} = 0, \quad F_{\mu,\nu} - F_{\nu,\mu} = 0. \tag{69}$$

Рівняння (68) є звичайними рівняннями Максвелла для комплексних полів $F_{\mu\nu}(x)$, тобто хвильовими рівняннями для фотонів (T-фотонів, згідно з [25]). Рівняння (69) відповідають частинкам, які у [25] було названо L-фотонами, а пізніше – "нотофами" [18]. З (69) випливає, що

$$F_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}, \quad \Box\phi = 0, \tag{70}$$

тобто L-фотон, або нотоф – це звичайна безмасова скалярна частинка. Таким чином, ми бачимо, що у випадку масивного фотона, який має 3 ступені поляризації, при $m \to 0$ залишаються усі 3 стани, на відміну від хибного уявлення, поширеного Вігнером [3] (Згідно з Вігнером у безмасовій границі, при $m \to 0$, залишаються лише максимальні проекції спіну на напрямок руху частинки, в загальному випадку спіну S, проекції S та $-S$).

Аналогічно до (59), тензорна хвильова функція масивного гравітона має вигляд:

$$G_{ABCD}(X) = S^{\alpha\beta}_{AB} S^{\gamma\delta}_{CD} \Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(X). \tag{71}$$

Зрозуміло, що

$$G_{ABCD}(X) = -G_{BACD}(X) = -G_{ABDC}(X) =$$
$$= G_{CDAB}(X). \tag{72}$$

З узагальнених співвідношень Паулі–Фірця [32] випливає, що

$$G_{ABCB}(X) = 0, \tag{73}$$

$$\varepsilon_{ABCDE} G_{ABCD}(X) = 0. \tag{74}$$

З рівнянь Баргмана–Вігнера (51) витікає, що нова хвильова функція задовольняє рівняння

$$G_{ABCD,D}(X) = 0, \tag{75}$$

$$G_{ABCD,E} + G_{ABDE,C} + G_{ABEC,D} = 0. \tag{76}$$

Ці рівняння не є незалежними: (75) можна отримати із (76) згорткою за парою індексів. Впевнимося у тому, що отримані властивості симетрії тензора G_{ABCD} обмежують кількість його компонент до тієї самої кількості, що і властивості симетрії хвильової функції у формі Баргмана–Вігнера $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, яка є повністю симетричним спінтензором четвертого рангу у чоторивимірному спінорному просторі. Кількість компонент у повністю симетричного тензора n-го рангу у m-вимірному просторі можна знайти за формулою:

$$N = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}, \tag{77}$$

що у нашому випадку дає $N = 35$. Співвідношення (72) обмежують кількість компонент тензора G_{ABCD} до $\frac{10(10+1)}{2} = 55$: 15 рівнянь (73) та 5 рівнянь (74) зменшують загальну кількість до $N = 55 - 15 - 5 = 35$. Таким чином, кількість компонент хвильових функцій $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ та G_{ABCD} збігаються.

Ми бачимо, що симетричні властивості тензора хвильової функції гравітона (71) збігаються з властивостями лінеаризованого тензора Вейля [33] 5-вимірного простору.

8. Узагальнені рівняння Прока для масивного гравітона

Використовуючи рівняння (73), представимо тензорну функцію масивного гравітона у чотиривимірному вигляді:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{78}$$

$$G_{5\nu\rho\sigma} = iH_{\rho\sigma\nu}, \tag{79}$$

$$G_{5\mu5\nu} = H_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}, \tag{80}$$

$$R_{\mu\mu} = R = 0. \tag{81}$$

Підставляючи ці властивості у рівняння (73)–(76), отримуємо такі вирази:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\lambda} + R_{\mu\nu\sigma\lambda,\rho} + R_{\mu\nu\lambda\rho,\sigma} = 0, \tag{82}$$

$$H_{\nu\sigma,\lambda} - H_{\nu\lambda,\sigma} = mH_{\sigma\lambda\nu}. \tag{83}$$

Із рівнянь (75) випливає, що

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\sigma} = -mH_{\mu\nu\rho}. \tag{84}$$

Наслідком рівняння

$$H_{\mu\nu\rho,\sigma} - H_{\mu\nu\sigma,\rho} = -mR_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{85}$$

є рівність

$$H_{\rho\sigma\nu,\sigma} = -mH_{\nu\rho}. \tag{86}$$

Із (76) також випливає

$$H_{\rho\sigma\nu,\lambda} + H_{\sigma\lambda\nu,\rho} + H_{\lambda\rho\nu,\sigma} = 0. \tag{87}$$

У чотиривимірному позначенні з рівняння (75) можна отримати таке важливе співвідношення:

$$H_{\mu\nu,\nu} = 0. \tag{88}$$

Розглянемо безмасову границю рівнянь для масивного гравітона (78)–(88). При $m = 0$ рівняння (83) перейдуть у

$$H_{\nu\sigma,\lambda} - H_{\nu\lambda,\sigma} = 0, \tag{89}$$

Як наслідок, тензор $H_{\nu\sigma}$ є похідною другого порядку від скалярної функції:

$$H_{\nu\sigma} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}, \tag{90}$$

За аналогією до роботи Баса та Шредингера, назвемо частинки, які відповідають цим рівнянням LL-гравітоном. Запишемо попередні вирази для випадку нульової маси. Рівняння (82), (87) та (88) залишаться без змін. Рівняння (84)–(86) можна записати як:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma,\sigma} = 0, \tag{91}$$

$$H_{\mu\nu\rho,\sigma} - H_{\mu\nu\sigma,\rho} = 0, \tag{92}$$

$$H_{\rho\sigma\nu,\sigma} = 0, \tag{93}$$

Залишилися три рівності симетрії

$$H_{\rho\sigma\sigma} = 0, \tag{94}$$

$$H_{\mu\nu\rho} + H_{\nu\rho\mu} + H_{\rho\mu\nu} = 0, \tag{95}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \tag{96}$$

Розглянемо детальніше рівняння (92), (94) та (95). З них можна отримати вирази:

$$H_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}, \tag{97}$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{98}$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial f_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{99}$$

Частинку, яка задовольняє цим рівнянням, знову ж, згідно з [25], назвемо TL-гравітоном.

З рівнянь (81), (91), (96) випливають рівняння Бронштейна [10], що відповідають частинкам зі спіральністю ± 2, тобто TT-гравітонам. Необхідно зазначити, що спіральність суперпозиції лівого та правого гравітонів може дорівнювати довільному дійсному числу між 2 та +2, в тому числі й 0. Випадок нуля є аналогом лінійної поляризації фотонів, саме з таких гравітонів складаються гравітацій хвилі, які були зареєстровані у 2015–2017 рр. Це зауваження стосується і TL-гравітонів. Зауважимо, що у випадку рівнянь Айнштайна, компоненти тензора $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ є дійсними числами, а в рівняннях Бронштейна – комплексними, оскільки тензор $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ це хвильова функція гравітона.

9. Висновки

За допомогою редукції рівнянь Баргмана–Вігнера для безмасового гравітона в 5-вимірному просторі одержано систему хвильових рівнянь, які описують динаміку масивного гравітона в 4-вимірному просторі. В границі нульової маси ці рівняння переходять у рівняння Клейна–Гордона для хвильової функції безмасової скалярної частинки, вакуумні рівняння Максвела для частинок зі спіральностями +1 та −1, а також у рівняння Бронштейна для гравітонів зі спіральностями +2 та −2. Знайдені рівняння узагальнюють на випадок спіну 2 рівняння Прока у формулюванні Баса та Шредінгера й доводять можливість збереження у безмасовій границі всіх 5 станів поляризації масивної частинки зі спіном 2. За аналогією до роботи Баса та Шредінгера, частинки з цими станами названо LL-гравітоном (спіральність 0), TL-гравітоном (спіральність ± 1) і TT-гравітоном (спіральність ± 2). Саме TT-гравітони відповідають частинкам, які вперше були описані М. Бронштейном [10].

1. A.S. Goldhaber, M.M. Nieto. Photon and graviton mass limits. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 939 (2010).
2. C. de Rham, J.T. Deskins, A.J. Tolley, S.-Y. Zhou. Graviton mass bounds. *Rev. Mod. Phys.* **89**, 025004 (2017).
3. E.P. Wigner. Relativistic invariance and quantum phenomena. *Rev. Mod. Phys.* **29**, 255 (1957).
4. L. Landau, R. Peierls. Quantum electrodynamics in the configuration space. *Zs. Phys.* **62**, 188 (1930).
5. I. Bialynicki-Birula. Photon wave function. *Progress in Optics* **36**, edited by E. Wolf (Elsevier, 1996) [quant-ph/0508202].
6. I. Bialynicki-Birula. Photon as a quantum particle. *Acta Physica Polonica B* **37**, 935 (2006).
7. I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicka-Birula. The role of the Riemann–Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 053001 (2013).
8. Yu.P. Stepanovskyi. The little Lorentz group and wave equations of free massless fields with arbitrary spin. *Ukr. J. Phys.* **9**, 1165 (1964).
9. H. Weyl. Electron and gravitation. *Z. Phys.* **56**, 330 (1929).
10. M.P. Bronstein. Quantization of gravitational waves. *JETP* **6**, 195 (1936).
11. Ю. П. Степановский, О волновых уравнениях безмассовых полей. *Теор. Мат. Физ.* **47**, 343 (1981).
12. Yu.P. Stepanovsky. Stepanovskiy Maxwell equation to Berry's phase and sonoluminescence: Problems of theory of electromagnetic and other massless fields. *Electromagnetic phenomenona* **1**, 180 (1998).
13. Yu.P. Stepanovsky. On massless field and infinite component relativistic wave equations. *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* **102** (1), 407 (2001).
14. Yu.P. Stepanovsky. Ettore Majorana and Matvei Bronstein (1906–1938): Men and scientists. In: *Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2002), p. 435 [ISBN: 978-94-010-0347-6].
15. Yu.P. Stepanovsky. In: *Problems in Contemporary Physics* (KIPT, 2008) (in Russian) [ISBN: 978-966-2136-15-9].
16. B.L. Van der Waerden. Spinor analysis. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.* 100 (1929).
17. O. Laporte, G.E. Uhlenbeck. Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations. *Phys. Rev.* **37**, 1380 (1931).
18. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Нотоф и его возможные взаимодействия. *Ядерн. Физ.* **4**, 216 (1966).
19. Yu.B. Rumer. *Spinor Analysis* (Librocom, 2010) (in Russian) [ISBN: 978-5-397-01381-9].
20. Yu. B. Rumer, A.I. Fet. *Group Theory and Quantum Fields* (Nauka, 1977) (in Russian).
21. R. Penrose, W. Rindler. Spinors and Space-Time (Cambrige University Press, 1984) [ISBN: 0521337070].
22. A. Proca. Wave theory of positive and negative electrons. *J. Phys. Radium* **7**, 347 (1936).
23. V.V. Dvoeglazov Photon-notoph equations. *Physica Scripta* **64**, 201 (2001).
24. V. Bargmann, E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **34**, 211 (1948).
25. L. Bass, E. Schrödinger. Must the photon mass be zero? *Proc. R. Soc. Lond. A* **232**, 1 (1955).
26. J.K. Lubański. Sur la theorie des particules elementaires de spin quelconque. I. *Physica* **9**, 310 (1942).
27. T. Kaluza. Zum unitatsproblem der physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)* 966 (1921).
28. O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeit. Phys.* **37**, 895 (1926).
29. E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cimento* **9**, 43 (1932).
30. R. Penrose. A spinor approach to general relativity. *Ann. Phys.* **10**, 171 (1960).
31. А.З. Петров. Классификация пространств определяющих поля тяготения. *Учен. Записки Казан. Госуд. Унив.* **114**, 55 (1954).
32. Yu.P. Stepanovsky. Complete set of Fierz's relations in six-dimensional form. *Ukr. J. Phys.* **11**, 1191 (1966).
33. H. Weyl. Reine infinitesimalgeometrie. *Mat. Zeit.* **2**, 384 (1918).

Одержано 26.01.18

A. Hradyskyi, Y. Stepanoskiy

THE MASSLESS LIMIT
OF BARGMANN–WIGNER EQUATIONS
FOR A MASSIVE GRAVITON

S u m m a r y

Information about the discovery of gravity waves attract attention to the graviton's mass problem. The massive graviton is a spin-2 particle with a non-zero mass. In this work, relativistic wave equations for a massive graviton have been studied in the limiting case of zero particle mass. The equations for the non-zero-mass graviton are based on the Bargmann–Wigner equations in the five-dimensional space-time with the $(++++-)$ signature. In the massless limit of massive graviton, all states with possible helicity values –0 (LL-graviton), ± 1 (TL-graviton), and ± 2 (TT-graviton) –are preserved.