В.М. СИМУЛИК

Інститут електронної фізики НАН України

(Вул. Університетська, 21, Ужгород 88017; e-mail: vsimulik@gmail.com)

УДК 539.12

РЕЛЯТИВІСТСЬКІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ДОВІЛЬНОГО СПІНУ, ЗОКРЕМА ДЛЯ СПІНУ $s = 2$ [1]

Продовжено апробацію запропонованого нами рівняння для частинок довільного спіну. Проведено порівняння з відомими рівняннями Баба, Паулі–Фірца, Баргмана–Вігнера, Раріти–Швінгера (для спіну s = 3/2) та інших авторів. Показано, що перевагою нового рівняння є відсутність у ньому зайвих компонент. Детально розглянуто важливий частинний випадок спіну s = 2. Запропоновано 10-компонентне діракоподібне хвильове рівняння для дублета частинка-античастинка спінів s = (2,2). Доведено його Пуанкаре інваріантність. Аналіз виконано на трьох рівнях: релятивістська канонічна квантова механіка, канонічна теорія поля типу Фолді–Ваутхайсена, локально коваріантна теорія поля. На прикладі дублета s = (2,2) продемонстровано схему синтезу релятивістських польових рівнянь довільного спіну.

Ключові слова: рівняння Дірака, релятивістська квантова механіка, довільний спін, гравітон, дублет частинка-античастинка спіну (2,2).

1. Вступ

Нещодавно у [1], див. також [2], було запропоновано рівняння без зайвих компонент для дублета частинка-античастинка, що оминає труднощі, які зустрічають відомі підходи інших авторів. Розгляд довільного спіну розпочинається з [3]. Сьогодні найбільш часто застосовуються рівняння Паулі–Фірца [4], Баба [5], Баргмана–Вігнера [6] та їх сучасні модифікації, див., наприклад, [7]. Більш детальний огляд представлено у [8]. У [1] і [2] основою подальшого застосування є підхід, започаткований у [9] та [10].

Нагадаємо лише деякі загальні труднощі відомих рівнянь для довільного спіну. Звернення до частинних випадків, при виконанні підстановок фіксованих значень спіну, не є успішним для всіх випадків. Зокрема для спіну $s > 1$ існуючі рівняння мають зайві компоненти і повинні доповнюватись додатковими умовами. Дійсно, відомі рівняння Паулі–Фірца [4], Раріти–Швінгера [11] для спіну $s = 3/2$ (і їхнє підтвердження у [12]) суттєво залежать від додаткових умов. Основна трудність у моделях довільного спіну пов'язана із взаємодією полів вищих спінів [13]. Запитання виникають навіть при квантуванні полів вищих спінів [14]. Згадані, а також інші недоліки, відомих рівнянь для вищих спінів є предметом обговорень аж до сьогодення, див., наприклад, [15] (короткий огляд недоліків представлено у [16], або у [17]).

Наша програма синтезу рівнянь для довільного спіну основана на покроковому переході: *релятивістська канонічна квантова механіка → канонічна теорія поля типу Фолді–Ваутхайсена → локальна коваріантна теорія поля*. Таким чином, забезпечується можливість стартувати з квантово-механічних рівнянь без зайвих компонент і завершувати без них. Це визначає наші перспективи.

Рівняння для дублета частинка-античастинка довільного спіну має вигляд

$$\left[i\partial_0 - \Gamma^0_{2\mathrm{N}}(\mathbf{\Gamma}_{2\mathrm{N}} \cdot \widehat{\mathbf{p}} + m)\right] \psi(x) = 0, \qquad (1)$$

де $x \in \mathrm{M}(1,3)$, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\mu = \overline{0,3}$, $j = 1,2,3$, а $\mathrm{M}(1,3) = \{x \equiv (x^\mu) = (x^0 = t, \mathbf{x} \equiv (x^j))\}$ – це простір-час Мінковського, 2N-компонентна функція $\psi(x)$ належить оснащеному простору Гільберта

$$\mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}} \equiv \mathrm{S}(\mathrm{R}^3) \times \mathrm{C}^{2\mathrm{N}} \subset \mathrm{H}^{3,2\mathrm{N}} \subset \mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}*}. \qquad (2)$$

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

Зауважимо, що завдяки спеціальній ролі часової змінної $x^0 = t \in (x^\mu)$ (по очевидній аналогії з нерелятивістською теорією), можливо застосовувати квантово-механічний оснащений простір Гільберта (2). Тут простір основних функцій Шварца $\mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}}$ є ядерним (тобто є щільним як у $\mathrm{H}^{3,2\mathrm{N}}$, так і у просторі $\mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}*}$ 2N-компонентних узагальнених функцій Шварца), а $\mathrm{H}^{3,2\mathrm{N}}$ є квантово-механічним простором Гільберта 2N-компонентних функцій над $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$. Простір $\mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}*}$ є спряженим до простору основних функцій Шварца $\mathrm{S}^{3,2\mathrm{N}}$ по відповідній топології (див., наприклад, [18]).

Використовується система одиниць $\hbar = c = 1$, а метричний тензор у просторі-часі Мінковського $\mathrm{M}(1,3)$ задається наступним чином

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = g^\mu_\nu,\, (g^\mu_\nu) = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)\,; \qquad (3)$$

$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu$, по двом індексам, що повторюються, проводиться сумування.

Матриці Γ у (1) вибираються у вигляді

$$\Gamma^0_{2\mathrm{N}} \equiv \sigma^3_{2\mathrm{N}} = \begin{vmatrix} \mathrm{I_N} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I_N} \end{vmatrix}, \quad \Gamma^j_{2\mathrm{N}} = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma^j_\mathrm{N} \\ -\Sigma^j_\mathrm{N} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Далі, існує ступінь вільності у виборі Σ^j_N матриць у (4). Ця свобода вибору розпочинається з випадку 4×4 Σ^j_4 матриць, які можна вибирати як у вигляді

$$\Sigma^j_4 = \begin{vmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

де $\left\{\sigma^j\right\}$ – це стандартні матриці Паулі, так і у вигляді

$$\Sigma^1_4 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0 \end{vmatrix}, \Sigma^2_4 = \begin{vmatrix} 0 & -i\mathrm{I}_2 \\ i\mathrm{I}_2 & 0 \end{vmatrix}, \Sigma^3_4 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

У наступному розділі представлено частинний випадок, коли спін $s = (2,2)$.

2. Бозонний дублет частинка-античастинка спіну $s = (2,2)$ у релятивістській канонічній квантовій механіці

Відповідне рівняння Шредінгера–Фолдi задається наступним чином

$$(i\partial_0 - \widehat{\omega})f(x) = 0, \quad f = \mathrm{column}\left|f^1, f^2, ..., f^{10}\right|, \qquad (7)$$

де псевдо-диференціальний оператор $\widehat{\omega}$ має вигляд

$$\widehat{\omega} \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}. \qquad (8)$$

У (7) 10-компонентна хвильова функція є прямою сумою хвильових функцій частинки і античастинки. Згідно прийнятій у квантовій механіці традиції хвильова функція античастинки розміщена у нижній частині 10-компонентного стовпця.

Загальний розв'язок рівняння Шредінгера–Фолдi (7) має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k e^{-ikx} g^\mathrm{A}(\mathbf{k})\mathrm{d_A}, \qquad (9)$$

де $\mathrm{A} = \overline{1,10}$, а $\mathrm{d_A}$ – це орти 10-компонентного декартового базису. Отже, простором станів дублета частинка-античастинка спіну $s = (2,2)$ є оснащений простір Гільберта $\mathrm{S}^{3,10} \subset \mathrm{H}^{3,10} \subset \mathrm{S}^{3,10*}$, тобто пряма сума двох просторів $\mathrm{S}^{3,5} \subset \mathrm{H}^{3,5} \subset \mathrm{S}^{3,5*}$.

Очевидно, у модель, що розглядається, закладається інформація про позитивні і рівні між собою маси частинки і античастинки. Далі, інформація про те, що спостерігач бачить античастинку як дзеркальне відображення частинки закладається також, див. нижче формулу (10). Заряд античастинки повинен бути протилежним до заряда частинки (звичайно, у випадку наявності заряда), а проекція спіну античастинки повинна бути протилежною до проекції спіну частинки. Тож відповідні генератори SU(2)-спіну вибираються у вигляді

$$\mathbf{s}_{10} = \begin{vmatrix} \mathbf{s}_5 & 0 \\ 0 & -C\mathbf{s}_5 C \end{vmatrix}, \qquad (10)$$

де 5×5-матриці $\mathbf{s}_5$ задані як

$$s^1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$s^2 = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

$$s^3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

а $C\mathrm{I}_5$ є 5×5 діагональним матричним оператором комплексного спряження. Легко переконатись, що для операторів (10) справедливі комутаційні співвідношення $\left[s^j, s^\ell\right] = i\varepsilon^{j\ell n}s^n$ алгебри SU(2). Оператор Казіміра для цього звідного представлення алгебри SU(2) має вигляд $\mathbf{s}^2 = 6\mathrm{I}_{10} = 2\,(2+1)\,\mathrm{I}_{10}$, де I_{10} – 10×10 одинична матриця.

Розв'язок (9) пов'язаний із стаціонарним повним набором операторів $\widehat{\mathbf{p}}$, $s^3 = s_z$ імпульса та проекції спіну $s = (2,2)$ бозонного дублета частинка-античастинка. Рівняння на власні значення оператора імпульса має вигляд

$$\widehat{\mathbf{p}}e^{-ikx}\mathrm{d}_\mathrm{A} = \mathbf{k}e^{-ikx}\mathrm{d}_\mathrm{A}, \quad \mathrm{A} = \overline{1,10}, \tag{12}$$

а рівняння на власні значення оператора проекції спіну s^3_{10} (10) є такими

$$\begin{aligned} &s^3_{10}\mathrm{d}_1 = 2\mathrm{d}_1,\ s^3_{10}\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_2,\ s^3_{10}\mathrm{d}_3 = 0,\ s^3_{10}\mathrm{d}_4 = -\mathrm{d}_4,\\ &s^3_{10}\mathrm{d}_5 = -2\mathrm{d}_5, \quad s^3_{10}\mathrm{d}_6 = -2\mathrm{d}_6, \quad s^3_{10}\mathrm{d}_7 = -\mathrm{d}_7,\\ &s^3_{10}\mathrm{d}_8 = 0, \quad s^3_{10}\mathrm{d}_9 = \mathrm{d}_9, \quad s^3_{10}\mathrm{d}_{10} = 2\mathrm{d}_{10}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тому функції $g^1(\mathbf{k})$, $g^2(\mathbf{k})$, $g^3(\mathbf{k})$, $g^4(\mathbf{k})$, $g^5(\mathbf{k})$ у розв'язку (9) є імпульсно-спіновими амплітудами частинки (бозона) з імпульсом $\widehat{\mathbf{p}}$ і власними значеннями проекції спіну (+2, +1, 0, –1, –2), відповідно, а функції $g^6(\mathbf{k})$, $g^7(\mathbf{k})$, $g^8(\mathbf{k})$, $g^9(\mathbf{k})$, $g^{10}(\mathbf{k})$ є імпульсно-спіновими амплітудами античастинки з імпульсом $\widehat{\mathbf{p}}$ і власними значеннями проекції спіну (–2, –1, 0, +1, +2).

Рівняння Шредінгера–Фолді (7) і множина {f} розв'язків (9) інваріанті відносно звідного унітарного бозонного представлення $(a,\omega)\rightarrow$

$$U(a,\omega) = \exp(-ia^0\widehat{p}_0 - i\mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\widehat{j}_{\mu\nu}) \tag{14}$$

групи Пуанкаре $\mathcal{P}$. Відповідні 10×10 матрично-диференціальні генератори задані наступним чином

$$\widehat{p}_0 = \widehat{\omega} \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}, \quad \widehat{p}_\ell = i\partial_\ell, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{j}_{\ell n} = x_\ell\widehat{p}_n - x_n\widehat{p}_\ell + s_{ln} \equiv \widehat{m}_{\ell n} + s_{\ell n},\\ &\widehat{j}_{0\ell} = -\widehat{j}_{\ell 0} = t\widehat{p}_\ell - \frac{1}{2}\left\{x_\ell, \widehat{\omega}\right\} - \left(\frac{s_{\ell n}\widehat{p}_n}{\widehat{\omega}+m} \equiv \breve{s}_\ell\right), \end{aligned} \tag{16}$$

де SU(2) генератори $\mathbf{s} = (s^{\ell n}) \equiv \mathbf{s}_{10}$ спіну $s = (2,2)$ задані у (10).

Справедливість цих тверджень перевіряється трьма наступними кроками. I. Розрахунок, що $\mathcal{P}$-генератори (15) і (16) комутують з оператором $i\partial_0 - \widehat{\omega}$ рівняння Шредінгера–Фолді (7). II. Перевірка, що $\mathcal{P}$-генератори (15) і (16) задовольняють комутаційним співвідношенням алгебри Лі групи Пуанкаре $\mathcal{P}$. III. Доведення, що генератори (15) і (16) реалізують неззвідне передставлення спіну $s(s+1)$ цієї групи (або звідне представлення спіну $2s(s+1)$ у випадку дублета). Для цього слід забезпечити проведення класифікацію Баргмана–Вігнера на основі обчислення відповідних операторів Казіміра. Ці кроки виконуються прямими і не дуже громіздкими обчисленнями.

Відповідні оператори Казіміра мають вигляд

$$p^2 = \widehat{p}^\mu\widehat{p}_\mu = m^2\mathrm{I}_{10}, \tag{17}$$

$$W = w^\mu w_\mu = m^2\mathbf{s}^2_{10} = 2\,(2+1)\,m^2\mathrm{I}_{10}, \tag{18}$$

Таким чином, вище представлено короткий огляд основ релятивістської канонічної квантової механіки дублета частинка-античастинка маси $m > 0$ і спіну $s = (2,2)$. У границі $m = 0$ ця модель описує частинний випадок дублета гравітон-антигравітон. Гіпотеза щодо масивного гравітона та інші фундаментальні проблеми гравітації тут не розглядаються.

3. Бозонний дублет частинка-античастинка спіну $s = (2,2)$ у канонічному польовому представленні Фолді–Ваутхайсена

Отже, рівняння Шредінгера–Фолді (7) і його розв'язок (9) зв'язані з рівнянням

$$(i\partial_0 - \Gamma^0_{10}\widehat{\omega})\phi(x) = 0, \quad \Gamma^0_{10} = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_5 & 0\\ 0 & -\mathrm{I}_5 \end{vmatrix} \tag{19}$$

канонічної теорії поля і його розв'язком

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3k\left[e^{-ikx}g^\mathrm{A}(\mathbf{k})\mathrm{d}_\mathrm{A} + e^{ikx}g^{*\mathrm{B}}(\mathbf{k})\mathrm{d}_\mathrm{B}\right], \tag{20}$$

($\mathrm{A} = \overline{1,5}$; $\mathrm{B} = \overline{6,10}$) оператором $v^{-1}_{10} = v^\dagger_{10} = v_{10}$,

$$v_{10} = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_5 & 0\\ 0 & C\mathrm{I}_5 \end{vmatrix}, \quad v_{10}v_{10} = \mathrm{I}_{10}, \tag{21}$$

(орти декартові), C – оператор комплексного спряження, а I_5 – 5×5 одинична матриця.

Оператор v_{10} (21) перетворює довільний оператор $\hat{q}_\mathrm{qm}$ 10-компонентної релятивістської канонічної квантової механіки (представленої у попередньому розділі) у відповідний оператор $\hat{q}_\mathrm{cf}$ канонічної теорії поля і *vice versa*. Оператор (21) зв'язує розв'язки (9) і (20) також. Зауважимо, що це перетворення справедливе лише для операторів представлених у анти-ермітовій (первісній) формі. Математична коректність такого (первісного) вибору операторів і їх фізична інтерпретація обговорені у [19] і [20]. Повернення до ермітових операторів є надзвичайно легким.

Оператори спіну канонічної теорії поля, отримані з відповідного квантово-механічного SU(2) спіну (10) перетворенням (21), задовольняють комутаційним співвідношенням $\left[s^j, s^\ell\right] = i\varepsilon^{j\ell n}s^n$ і мають вигляд

$$\mathbf{s}_{10} = \begin{vmatrix} \mathbf{s}_5 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_5 \end{vmatrix}, \tag{22}$$

де 5×5 SU(2) генератори спіну $s = 2$ представлені у (11). Відповідний оператор Казіміра задається виразом $\mathbf{s}_{10}^2 = 6\mathrm{I}_{10} = 2(2+1)\mathrm{I}_{10}$.

Стаціонарний повний набір утворюють оператори $\widehat{\mathbf{p}}$, $s_{10}^3 = s_z$ імпульса і проекції спіну. Рівняння на власні вектори і власні значення операторів $\widehat{\mathbf{p}}$ і $s_{10}^3 = s_z$ із (22) є наступними

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{p}}e^{-ikx}\mathrm{d}_\mathrm{A} = \mathbf{k}e^{-ikx}\mathrm{d}_\mathrm{A}, \quad \widehat{\mathbf{p}}e^{ikx}\mathrm{d}_\mathrm{B} = -\mathbf{k}e^{ikx}\mathrm{d}_\mathrm{B}, \\ s_{10}^3\mathrm{d}_1 = 2\mathrm{d}_1,\ s_{10}^3\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_2,\ s_{10}^3\mathrm{d}_3 = 0,\ s_{10}^3\mathrm{d}_4 = -\mathrm{d}_4, \\ s_{10}^3\mathrm{d}_5 = -2\mathrm{d}_5,\ s_{10}^3\mathrm{d}_6 = 2\mathrm{d}_6,\ s_{10}^3\mathrm{d}_7 = \mathrm{d}_7, \\ s_{10}^3\mathrm{d}_8 = 0,\ s_{10}^3\mathrm{d}_9 = -\mathrm{d}_9,\ s_{10}^3\mathrm{d}_{10} = -2\mathrm{d}_{10},\end{gathered} \tag{23}$$

і визначають інтерпретацію амплітуд у загальному розв'язку (20). Зауважимо, що безпосередня квантово-механічна інтерпретація амплітуд $g^\mathrm{A}(\mathbf{k})$, $g^\mathrm{B}(\mathbf{k})$ у розв'язку (20) повинна виконуватись на основі рівнянь (12), (13) і наведена у попередньому розділі.

Релятивістська інваріантність рівняння (19) канонічної теорії поля є наслідком інваріантності рівняння Шредінгера–Фолді (7) і перетворення (21) (для анти-ермітових операторів). Явний вигляд відповідних генераторів отримується з явного вигляду генераторів (15) і (16) із спіновими матрицями (10) на основі перетворення (21).

Отже, канонічне польове рівняння (19) і множина $\{\phi\}$ його розв'язків (20) інваріантні відносно звідного унітарного бозонного представлення (14) групи Пуанкаре $\mathcal{P}$, ермітові 10×10 матрично-диференціальні оператори якрго задані як

$$\widehat{p}^0 = \Gamma_{10}^0\widehat{\omega} \equiv \Gamma_{10}^0\sqrt{-\Delta + m^2}, \quad \widehat{p}^\ell = -i\partial_\ell,$$

$$\begin{gathered}\widehat{j}^{\ell n} = x^\ell\widehat{p}^n - x^n\widehat{p}^\ell + s_{10}^{\ell n} \equiv \widehat{m}^{\ell n} + s_{10}^{\ell n}, \\ \widehat{j}^{0\ell} = -\widehat{j}^{\ell 0} = x^0\widehat{p}^\ell - \frac{1}{2}\Gamma_{10}^0\left\{x^\ell, \widehat{\omega}\right\} + \Gamma_{10}^0\frac{(\mathbf{s}_{10}\times\widehat{\mathbf{p}})^\ell}{\widehat{\omega} + m},\end{gathered} \tag{24}$$

де SU(2) генератори $\mathbf{s}_{10} = (s_{10}^{\ell n})$ спіну $s = (2,2)$ мають вигляд (22), а Γ_{10}^0 матриці наведені у (19).

Доведення аналогічне до представленого у попередньому розділі. Відповідні оператори Казіміра мають власні значення, аналогічні до (17) і (18).

Таким чином, завдяки власним значенням із рівнянь (23), позитивно і негативно частотній формі розв'язку (20) і результатам аналізу Баргмана–Вігнера операторів Казіміра приходимо до висновку, що рівняння (19) описує канонічне поле (польовий бозонний дублет частинка-античастингка) спіну $s = (2,2)$ і маси $m > 0$. Перехід до границі $m = 0$ приводить до канонічного польового рівняння для гравітон-антигравітонного поля (якщо гравітон є безмасовим?).

4. Рівняння для бозонного дублета частинка-античастинка спіну $s = (2,2)$ у локально коваріантному польовому представленні

Кінцевий перехід до локально коваріантної польової моделі виконується оберненим перетворенням типу Фолді–Ваутхайсена. Відповідне польове рівняння має вигляд

$$\begin{aligned}&i\partial_0\psi^1 - p^3\psi^6 - m\psi^1 = 0, \\ &i\partial_0\psi^2 - p^3\psi^7 + ip^2\psi^{10} - p^1\psi^{10} - m\psi^2 = 0, \\ &i\partial_0\psi^3 - p^3\psi^8 + ip^2\psi^9 - p^1\psi^9 - m\psi^3 = 0, \\ &i\partial_0\psi^4 + p^3\psi^9 - ip^2\psi^8 - p^1\psi^8 - m\psi^4 = 0, \\ &i\partial_0\psi^5 + p^3\psi^{10} - ip^2\psi^7 - p^1\psi^7 - m\psi^5 = 0, \\ &i\partial_0\psi^6 - p^3\psi^1 + m\psi^6 = 0, \\ &i\partial_0\psi^7 - p^3\psi^2 + ip^2\psi^5 - p^1\psi^5 + m\psi^7 = 0, \\ &i\partial_0\psi^8 - p^3\psi^3 + ip^2\psi^4 - p^1\psi^4 + m\psi^8 = 0, \\ &i\partial_0\psi^9 + p^3\psi^4 - ip^2\psi^3 - p^1\psi^3 + m\psi^9 = 0, \\ &i\partial_0\psi^{10} + p^3\psi^5 - ip^2\psi^2 - p^1\psi^2 + m\psi^{10} = 0, \\ &-ip^2\psi^1 - p^1\psi^1 = 0, \quad -ip^2\psi^6 - p^1\psi^6 = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

або діракоподібний вигляд

$$\begin{gathered}\left[i\partial_0 - \Gamma_8^0(\mathbf{\Gamma}_8\cdot\widehat{\mathbf{p}} + m)\right]\psi(x) = 0, \\ (i\partial_0 - \sigma^1p^3 - \sigma^3m)\chi = 0, \quad (p^1 + ip^2)\chi = 0,\end{gathered} \tag{26}$$

де $\psi = \mathrm{column}(\psi^1, \psi^2, ..., \psi^8)$,

$$\chi = \begin{vmatrix}\psi^9 \\ \psi^{10}\end{vmatrix},\ \Gamma_8^0 = \begin{vmatrix}\mathrm{I}_4 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_4\end{vmatrix},\ \Gamma_8^j = \begin{vmatrix}0 & \Sigma_4^j \\ -\Sigma_4^j & 0\end{vmatrix},$$

це 4×4 матриці Паулі

$$\Sigma_4^1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0 \end{vmatrix}, \Sigma_4^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i\mathrm{I}_2 \\ i\mathrm{I}_2 & 0 \end{vmatrix}, \Sigma_4^3 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Форми (25) і (26) зв'язані звичайним лінійним перетворенням.

5. Короткий коментар

Легко зрозуміти, що запропоноване рівняння не співпадає з відомими рівняннями. Дійсно, рівняння Раріти–Швінгера [11] для спіну $s = 3/2$ містить 16 компонент, тоді як наше рівняння (1) для дублета частинка-античастинка спіну $s = (3/2,\, 3/2)$ має 8 компонент. Рівняння Баргмана–Вігнера [6] для частинного випадку $s = 3/2$ має 12 компонент. Баба особисто [21] проаналізував частинний випадок $s = 3/2$ для свого рівняння [5]. Він знайшов [21], що у цьому випадку запропоноване ним рівняння [5] співпадає з рівнянням Раріти–Швінгера, тобто має 16 компонент, і т.д.

Тут детально розглянуто важливий частинний випадок, коли спін $s = 2$, запропонованого нами рівняння (1) для довільного спіну. Введено у розгляд 10-компонентне діракоподібне рівняння для дублета частинка-античастинка спіну $s = (2, 2)$. Доведено його Пуанкаре інваріантність. Представлено трьохрівневий аналіз, а саме: відповідну релятивістську канонічну квантову механіку, канонічну теорію поля типу Фолді–Ваутхайсена і локально коваріантну теорію поля.

1. V.M. Simulik. Derivation of the Dirac and Dirac-like equations of arbitrary spin from the corresponding relativistic canonical quantum mechanics. *Ukr. J. Phys.* **60**, 985 (2015).
2. V.M. Simulik. Link between the relativistic canonical quantum mechanics of arbitrary spin and the corresponding field theory. *J. Phys: Conf. Ser.* **670**, 012047 (2016).
3. P.A.M. Dirac. Relativistic wave equations. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **155**, 447 (1936).
4. M. Fierz, W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **173**, 211 (1939).
5. H.J. Bhabha. Relativistic wave equations for the elementary particles. *Rev. Mod. Phys.* **17**, 200 (1945).
6. V. Bargman, E.P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat Acad. Sci. USA* **34**, 211 (1948).
7. A. Zecca. Massive field equations of arbitrary spin in Schwarzschild geometry: separation induced by spin-3/2 case. *Int. J. Theor, Phys.* **45**, 2241 (2006).
8. V.M. Simulik. On the relativistic canonical quantum mechanics and field theory of arbitrary spin. *Univ. J. Phys. Appl.* **11**, 202 (2017).
9. L.L. Foldy, S.A. Wouthuysen. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
10. L.L. Foldy. Synthesis of covariant particle equations. *Phys. Rev.* **102**, 568 (1956).
11. W. Rarita, J. Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Phys. Rev.* **60** 61 (1941).
12. А.С. Давыдов. Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля. *ЖЭТФ* **13**, 313 (1943).
13. G. Velo, D. Zwanziger. Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential. *Phys. Rev.* **186** 1337 (1969).
14. J.D. Kimel, L.M. Nath. Quantization of the spin-$\frac{3}{2}$ field in the presence of interactions. *Phys. Rev. D* **6**, 2132 (1972).
15. А.Е. Калошин, В.П. Ломов. Поле Рариты–Швингера и многокомпонентное волновое уравнение. *Письма в ЭЧАЯ* **8**, 868 (2011).
16. A.Z. Capri, R.L. Kobes. Further problems in spin-3/2 field theories. *Phys. Rev. D* **22** 1967 (1980).
17. V.M. Red'kov. Particle with spin $S = 3/2$ in Riemannian space-time. arXiv:1109.3871v1 [math-ph].
18. V.S. Vladimirov. *Methods of the Theory of Generalized Functions* (Taylor and Francis, 2002) [ISBN: 9780429153013].
19. B. Wybourne. *Classical Groups for Physicists* (John Wiley and sons, 1974) [ISBN-13: 978-0471965053].
20. J. Elliott, P. Dawber. *Symmetry in Physics, Vol. 1* (Macmillian Press, 1979) [ISBN-13: 978-0333382707].
21. H.J. Bhabha. On a class of relativistic wave equations of spin 3/2. *Proc. Indian Acad. Sci. A* **34** 335 (1951).

Received 31.08.09

V.M. Simulik

RELATIVISTIC EQUATIONS
FOR ARBITRARY SPIN, ESPECIALLY
FOR THE SPIN $s = 2$

Р е з ю м е

The further approbation of the equation for the particles of arbitrary spin introduced recently in our papers is under consideration. The comparison with the known equations suggested by Bhabha, Pauli–Fierz, Bargmann–Wigner, Rarita–Schwinger (for spin $s = 3/2$) and other authors is discussed. The advantages of the new equations are considered briefly. The advantage of the new equation is the absence of redundant components. The important partial case of spin $s = 2$ is considered in details. The 10-component Dirac-like wave equation for the spin $s = (2, 2)$ particle-antiparticle doublet is suggested. The Poincaré invariance is proved. The three-level consideration (relativistic canonical quantum mechanics, canonical Foldy–Wouthuysen-type field theory, and locally covariant field theory) is presented. The procedure of our synthesis of arbitrary spin covariant particle equations is demonstrated on the example of spin $s = (2, 2)$ doublet.